THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY
515
~~517~~
C126
v.9
MATHEMATICS

515
C126
v. 9

Math

LIBRARY UNIVERSITY OF ILLINOIS URBANA

25253
4/2
2u

Einundvierzigster Jahresbericht

der deutschen

Staats-Oberrealschule

in Triest,

veröffentlicht am Schlusse des Schuljahres

1910-1911.

INHALT:

Elemente der Funktionenlehre von Prof. Johann Rajakowitsch.

Schulnachrichten vom Direktor Dr. Artur Brandeis.

TRIEST.

Im Selbstverlage der k. k. Staats-Oberrealschule.

1911.

INHALT.

Seite

Elemente der Funktionenlehre von Professor Johann Rajakowitsch. für Schüler der oberen Klassen I

I. Der Lehrkörper und die Lehrfächerverteilung 3

II. Die Lehrverfassung 6

III. Schriftliche Aufgaben aus der Unterrichtsprache für die oberen Klassen 22

IV. Die Lehrmittelsammlungen 25

V. Unterstützungswesen 31

VI. Maturitätsprüfung 34

VII. Chronik der Schule 37

VIII. Körperliche Ausbildung der Schüler 42

IX. Die wichtigsten Verfügungen der vorgesetzten Behörden . . . 45

X. Statistische Notizen 47

XI. Verzeichnis der Schüler 50

XII. Verzeichnis der Lehrbücher für 1911-1912 56

XIII. Kundmachung bezüglich des nächsten Schuljahres 60

Elemente der Funktionenlehre.

(Fortsetzung.)

Geschrieben für Schüler

von

JOHANN RAJAKOWITSCH,

k. k. Professor.

8. Aufgaben aus dem Gebiete der Maxima und Minima einer reellen Veränderlichen.

a) Wie groß ist die Grundlinie eines Dreieckes zu nehmen, damit der Flächeninhalt des Dreieckes am größten wird, wenn die Summe (s) aus der Grundlinie und Höhe konstant bleibt?

Ist x die gesuchte Grundlinie, so ist $s - x$ die Höhe des Dreieckes. $f(x) = \frac{x(s-x)}{2} = \frac{sx}{2} - \frac{x^2}{2}$ ist die Funktion, die ein Extremum werden soll. Man hat sich $f'(x)$ zu bilden und dieses gleich Null zu setzen.

$f'(x) = \frac{s}{2} - x = 0$. Die Gleichung ist nach x aufzulösen und dann ist das Vorzeichen von $f''(x)$ zu beachten.

Für $x = \frac{s}{2}$ wird $f(x)$ ein Extremum und da $f''(x) = -1$ ist, wird $f(x)$ für $x = \frac{s}{2}$ ein Maximum.

Die Grundlinie und Höhe des Dreieckes müssen gleich $\frac{s}{2}$ sein, dabei nimmt der Flächeninhalt den Wert $\frac{s^2}{8}$ an.

b) Welches von allen Dreiecken, die im $\sphericalangle a = 30^0$ und in der Summe $s = 16\ cm$ der diesen Winkel einschließenden Seiten übereinstimmen, hat den größten Flächeninhalt?

Ist x die eine Seite, so ist die andere $16 - x$. Die Funktion heißt: $f(x) = \frac{x(16-x)}{2} \cdot \sin 30^0 = 4x - \frac{x^2}{4}$.

Aus $f'(x) = 4 - \frac{x}{2} = 0$ folgt $x = 8$. Da $f''(x) = -\frac{1}{2}$ ist, müssen die Dreiecksseiten je 8 cm betragen, damit der Flächeninhalt ein Maximum wird (hier 16 cm^2).

595523

c) Wie lang sind die Kanten einer quadratischen Säule mit dem Volumen 343 cm^3, wenn die Oberfläche am kleinsten ist?

Die Oberfläche der Säule beträgt:

$f(x) = 2x^2 + 4x.\ \frac{343}{x^2} = 2x^2 + \frac{1372}{x}$. Dann ist $f'(x) = 4x - \frac{1372}{x^2} = 0$ zu setzen und die Gleichung $4x^3 = 1372$ nach x aufzulösen. Die reelle Lösung von $x^3 = 343$ ist $x = 7$.

Da $f''(x) = 4 + \frac{2744}{x^3}$ ist und $f''(7) = 4 + \frac{2744}{343} = 12$ positiv ausfällt, ist die Oberfläche ein Minimum (hier $98 + 196 = 294$). Die Säule muß ein Kubus sein.

d) Einer gegebenen Kugel mit dem Radius r ist der gerade Kegelstumpf mit der kleinsten Mantelfläche umzuschreiben.

Sind x und y die Radien der Grundkreise, so ist $x + y$ die Seite des Kegelstumpfes. Aus $4r^2 = (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$ folgt $y = \frac{r^2}{x}$.

Der Mantel des Kegelstumpfes beträgt: $f(x) = (x+y)^2\pi = \left(x + \frac{r^2}{x}\right).^2\pi = \left(x^2 + 2r^2 + \frac{r^4}{x^2}\right)\pi$.

Daraus ergibt sich: $f'(x) = 2x\pi - \frac{2r^4\pi}{x^3} = 0$. Die reelle Lösung ist $x = r$. $f''(x) = 2\pi + \frac{6r^4\pi}{x^4} = 8\pi$ ist positiv. Der der Kugel umgeschriebene Zylinder hat somit die kleinste Mantelfläche.

e) In welcher Zeit erreicht ein mit der Geschwindigkeit c vertikal in die Höhe geworfener Körper die größte Höhe?

Ist x die verflossene Zeit und $f(x)$ der jeweilig zurückgelegte Weg, so ist dieser $= cx - \frac{\gamma x^2}{2}$, wenn mit γ die Erdbeschleunigung bezeichnet wird. Aus $f'(x) = c - \gamma x = 0$ ergibt sich $x = \frac{c}{\gamma}$. $f''(x) = -\gamma$ fällt negativ aus. $\frac{c}{\gamma}$ heißt Steigzeit und die größte Entfernung vom Horizonte beträgt $\frac{c^2}{2\gamma}$.

f) Unter welchem Winkel muß eine Kugel mit der Anfangsgeschwindigkeit c abgeschossen werden, damit sie eine a (m) entfernte vertikale Wand möglichst hoch trifft?

Die jeweilige Vertikaldistanz vom Horizonte ist gegeben durch $f(x) = ct \sin x - \frac{\gamma}{2}.\ t^2$, wenn t die verflossene Zeit und x den Elevationswinkel bedeuten. Aus $a = ct \cos x$ errechnet man t und setzt es in $f(x)$ ein, was dann gibt: $f(x) = a \operatorname{tg} x - \frac{a^2\gamma}{2c^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$. Daraus folgt: $f'(x) = \frac{a}{\cos^2 x} - \frac{a^2\gamma}{c^2} \cdot \frac{\sin x}{\cos^3 x} = 0$. Für $\operatorname{tg} x = \frac{c^2}{a\gamma}$ findet dies statt.

g) Wo ist die dunkelste Stelle in der Verbindungslinie zweier leuchtender Punkte, welche die Lichtstärken L_1 und L_2 (Normalkerzen) besitzen, wenn die Distanz der Punkte a beträgt?

Der gesuchte Punkt habe von L_1 die Entfernung x, von L_2 die Entfernung $a - x$. Die Funktion, die ein Extremum werden soll, lautet: $\frac{L_1}{x^2} + \frac{L_2}{(a-x)^2}$. Daraus resultiert: $f'(x) = -\frac{2L_1}{x^3} + \frac{2L_2}{(a-x)^3} = 0$; $\frac{\sqrt[3]{L_1}}{x} = \frac{\sqrt[3]{L_2}}{a-x}$; $\left(\sqrt[3]{L_1} + \sqrt[3]{L_2}\right) : a = \sqrt[3]{L_1} : x$.

Daher beträgt die gesuchte Entfernung von L_1: $\frac{a\sqrt[3]{L_1}}{\sqrt[3]{L_1} + \sqrt[3]{L_2}}$ und die von L_2: $\frac{a\sqrt[3]{L_2}}{\sqrt[3]{L_1} + \sqrt[3]{L_2}}$.

Für $f''(x)$ resultiert: $\frac{6L_1}{x^4} + \frac{6L_2}{(a-x)^4}$, was bei Berücksichtigung der Werte von x und $a - x$ $\frac{6\left(\sqrt[3]{L_1} + \sqrt[3]{L_2}\right)^4}{a^4} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{L_1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{L_2}}\right)$ gibt. Dieser Ausdruck läßt keinen negativen Wert zu.

h) Bei welchem Elevationswinkel ist die Wurfweite am größten (schiefer Wurf)?

Ist x der Elevationswinkel, so ist die Funktion $f(x) = \frac{c^2 \sin 2x}{\gamma}$, worin die Wurfgeschwindigkeit c und die Erdbeschleunigung γ konstant sind. $f'(x) = \frac{2c^2 \cos 2x}{\gamma} = 0$; $\cos 2x = 0$ ist die Bedingung für die gestellte Frage. $x = 45^0$ ist der verlangte Winkel. Es tritt ein Maximum ein, da $f''(45^0) = -\frac{4c^2}{\gamma}$ ist.

i) Eine in A befindliche Person nähert sich mit der Geschwindigkeit c einem in gerader Linie von B nach M fahrenden Straßenbahnwagen (Geschwindigkeit C). Welche Richtung hat die Person einzuschlagen, wenn sie vor dem Straßenbahnwagen einen möglichst großen Vorsprung gewinnen soll? (Beide Bewegungen werden als gleichförmig vorausgesetzt.)

Durch A lege man eine Gerade, welche die Strecke BM in N unter dem Winkel x schneidet. AB schließe mit BM den Winkel β ein. Zwischen B und N fixiere man P (Lage des Straßenbahnwagens nach der Zeit t).

Aus dem Dreiecke ABN folgt: $AN = \frac{AB \sin \beta}{\sin x}$ und $BN = \frac{AB \cdot \sin(\beta + x)}{\sin x}$. Da $AN = c.t$ ist, ist der vom Straßenbahnwagen zurückgelegte Weg: $BP = C.t = \frac{C.AN}{c} = \frac{C.AB.\sin\beta}{c.\sin x}$.

Der Vorsprung der Person beträgt: $PN = \frac{A\,B.\sin(\beta+x)}{\sin x} - \frac{C.\,A\,B.\sin\beta}{c\sin x} = f(x)$.

Somit ist: $f'(x) = \frac{A\,B.[\sin x.\cos(\beta+x) - \sin(\beta+x)\cos x]}{\sin^2 x} + \frac{C.\,A\,B.\sin\beta.\cos x}{c\sin^2 x} = 0$. Dividiert man durch $\frac{A\,B}{\sin^2 x}$ und schreibt für den in der Klammer stehenden Ausdruck $\sin(-\beta)$, so folgt nach Weglassung von $\sin\beta$: $-1 + \frac{C}{c}\cos x = 0$.

Die Richtung, welche die Person einzuschlagen hat, ergibt sich aus der goniometrischen Gleichung: $\cos x = \frac{c}{C}$.

k) Vier gleiche Stangen von 6 *m* Länge sind als Kanten eines pyramidenförmigen Zeltes mit quadratischer Basis so aufzustellen, daß der Luftraum des Zeltes ein Maximum wird. Wie hoch wird das Zelt sein und wie groß ist der größte erzielbare Luftraum?

Ist y die Grundkante und x die Höhe der Pyramide, so folgt: $\frac{y^2}{2} = 36 - x^2$ oder $y^2 = 72 - 2x^2$. Das Volumen der Pyramide ist: $f(x) = 24x - \frac{2x^3}{3}$. Aus $f'(x) = 24 - 2x^2 = 0$ ergibt sich $x = 2\sqrt{3}$. Das Volumen beträgt $f(2\sqrt{3}) = 32\sqrt{3}$ und ist ein Maximum, da $f''(x) = -8\sqrt{3}$ ist.

l) Welcher Kreissektor hat bei gegebenem Inhalte den kleinsten Umfang?

Ist α der Zentriwinkel und r der Kreisradius, so ist der Inhalt des Kreissektors $= \frac{r^2\pi\alpha}{360^0} = k$, worin k gegeben ist. Der zugehörige Kreisbogen $\frac{r\pi\alpha}{180^0}$ ist dann $\frac{2k}{r}$. Der Umfang ist: $f(r) = 2r + \frac{2k}{r}$. Daraus folgt: $f'(r) = 2 - \frac{2k}{r^2} = 0$; $r^2 = k$; $\alpha = \frac{360^0}{\pi}$. $f''(r) = \frac{4}{\sqrt{k}}$ ist positiv.

m) Welcher Kreissektor hat bei gegebenem Umfange den größten Inhalt?

$2r + \frac{r\pi\alpha}{180^0} = k$ ist gegeben. Daraus folgt: $\frac{r\pi\alpha}{180^0} = k - 2r$ und dann der Flächeninhalt des Sektors: $f(r) = \frac{kr}{2} - r^2$; $f'(r) = \frac{k}{2} - 2r = 0$. $r = \frac{k}{4}$. Zur Bestimmung von α dient die Gleichung: $\frac{k\pi\alpha}{720^0} = \frac{k}{2}$ $\alpha = \frac{360^0}{\pi}$ $f''(r) = -2$ ist negativ.

n) Eine gegebene Strecke a ist so zu teilen, daß die Summe der Flächeninhalte der aus beiden Teilen gebildeten Quadrate einen kleinsten Wert annimmt.

Ist x der eine Teil, so ist der andere $a - x$. Ein Extremum soll werden: $f(x) = x^2 + (a - x)^2$. Daraus resultiert: $f'(x) = 2x - 2(a - x) = 0$ und $x = \frac{a}{2}$. Die Strecke ist zu halbieren. Aus $f'(x) = 4x - 2a$ folgt $f''(x) = 4$.

o) Unter allen Rechtecken mit der konstanten Diagonale d dasjenige vom größten Flächeninhalt zu bestimmen.

Ist x der von den Diagonalen eingeschlossene Winkel, so ist der Flächeninhalt des Rechteckes: $f(x) = \frac{d^2}{2} \cdot \sin x$ und $f'(x) = \frac{d^2}{2} \cdot \cos x = 0$, was für $x = 90^0$ erfüllt ist. Das Quadrat genügt den Anforderungen. $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{d^2}{2}$ ist negativ.

p) Eine kreisförmige Papierscheibe vom Radius r soll längs eines Halbmessers durchschnitten und zu einer kegelförmigen Düte von möglichst großem Volumen umgebogen werden. Wie groß wird bei diesem Maximum der Winkel an der Spitze des Achsenschnittes sein und wie groß der Fassungsraum der Düte?

Der Radius r des gegebenen Kreises ist Seite des Kegels. Ist x der Winkel an der Spitze des Achsenschnittes, so ist $r \cdot \sin \frac{x}{2}$ der Radius des Grundkreises und $r \cdot \cos \frac{x}{2}$ die Höhe des Kegels. Das Kegelvolumen beträgt: $f(x) = \frac{r^3\pi}{3} \cdot \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$. Aus $f'(x) = \frac{r^3\pi}{3} \cdot \left(\sin \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin^3 \frac{x}{2}\right) = \frac{r^3\pi}{3} \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \right.$
$\left. - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 \frac{x}{2}\right) = 0$.

$\sin \frac{x}{2} = 0$ gibt entweder die Lösung $x = 0$ oder $x = 360^0$. Beide sind im vorliegenden Falle unbrauchbar.

Setzt man den Klammerausdruck gleich Null, so läßt sich x aus $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm\sqrt{2}$ berechnen. Direkt ergibt sich x aus $\operatorname{tg} x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = +2\sqrt{2}$. Man erhält: $x = 109^0\,28'\,16''$ oder $x = 70^0\,31'\,44''$.

Zur Volumsberechnung braucht man $\sin^2 \frac{x}{2}$ und $\cos \frac{x}{2}$. Aus $1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \sec^2 \frac{x}{2}$ folgt $\cos \frac{x}{2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{2}{3}$. Daher beträgt der Fassungsraum $\frac{2r^3\pi}{9\sqrt{3}}$.

q) Die Richtungen zweier Kräfte P und Q schließen den Winkel α ein. In welcher Richtung wird die Summe der von den Kräften auf einem Wege s geleisteten Arbeiten am größten sein?

s schließe mit P den Winkel x und mit Q den Winkel $\alpha - x$ ein. Die Teilarbeit von P ist $Ps\cos x$, die Teilarbeit von Q ist $Qs\cos(\alpha - x)$. Ein Extremum soll werden $f(x) = s.[P.\cos x + Q.\cos(\alpha - x)]$.

Es ist: $f'(x) = s[-P\sin x + Q\sin(\alpha - x)] = 0$. Die vorliegende goniometrische Gleichung löst man in folgender Weise auf: $\sin x : \sin(\alpha - x) = Q : P$.

$$\frac{\sin x - \sin(\alpha - x)}{\sin x + \sin(\alpha - x)} = \frac{Q - P}{Q + P}.$$

$$\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{Q - P}{Q + P}.$$

Aus $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{Q - P}{Q + P}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ läßt sich die unbekannte Richtung ermitteln.

r) Für welchen Wert von x wird $\sin(\alpha + \beta x).\cos(\alpha - \beta x)$ ein Extremum?

$f'(x) = \beta.\cos(\alpha + \beta x)\cos(\alpha - \beta x) + \beta\sin(\alpha + \beta x).\sin(\alpha - \beta x) = \beta.\cos 2\beta x = 0$.

Daraus: $2\beta x = 90^0$ und $x = \frac{45^0}{\beta}\cdot f''(x) = -2\beta^2\sin 2\beta x = 2\beta^2$.

s) Über einem Tische befindet sich eine nur vertikal verschiebbare Hängelampe; in welcher Höhe über dem Tisch muß sich die Flamme befinden, damit eine $3\sqrt{2}$ *dm* seitwärts von der Mittellinie der Lampe befindliche Stelle des Tisches die stärkste Beleuchtung erhält?

Die unbekannte Höhe sei x. Die Beleuchtungsstärke ist: $f(x) = \frac{i\sin\varphi}{x^2 + 18}$, wenn i die Lichtstärke der Flamme ist, und die Verbindungslinie der Flamme und der betrachteten Stelle zur Tischplatte unter dem Winkel φ geneigt ist.

Da $\sin\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 18}}$ ist, nimmt $f(x)$ die Form: $ix.(x^2 + 18)^{-\frac{3}{2}}$ an.

Es ergibt sich $f'(x) = i(x^2 + 18)^{-\frac{3}{2}} - 3ix^2(x^2 + 18)^{-\frac{5}{2}} = 0$ und $1 = \frac{3x^2}{x^2 + 18}$. Die gesuchte Höhe beträgt 3 *dm*.

t) Die Zahl 100 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß die Summe aus den Kuben dieser Summanden ein Minimum wird. Ist x der eine Teil, so muß $f(x) = x^3 + (100 - x)^3$ ein Minimum werden. $f'(x) = 3x^2 - 3(100 - x)^2 = -30000 + 600x = 0$. Für x gleich 50 findet dies statt. $f''(x) = 600$ ist positiv.

u) Unter allen Rechtecken von gegebenem Umfange $2s$ jenes zu bestimmen, das den größten Flächeninhalt besitzt.

Ist x die Grundlinie, so ist $s-x$ die Höhe des Rechteckes. Ein Extremum soll werden $f(x)=sx-x^2$. Dies gibt: $s-2x=0$ und $f''(x)=-2$. Die Grundlinie und Höhe betragen $\frac{s}{2}$. Das Quadrat besitzt diese Eigenschaft.

v) Welche Zahl gibt, um ihren reziproken Wert vermehrt, die kleinste Summe?

$f(x)=x+\frac{1}{x}$ $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$ $f''(x)=\frac{2}{x^3}$. Die Zahl 1 hat diese Eigenschaft.

9. Die zyklometrischen Funktionen und ihre Differentialquotienten.

Die Umkehrung der goniometrischen Funktionen sind die zyklometrischen Funktionen. Ist $y=\sin x$, so ist $x=\arc\sin y$ (lies: x ist der arc, dessen Sinus y ist). Während die goniometrischen Funktionen eindeutig waren, sind die zyklometrischen vieldeutig. Denn der arc sin 0 entspricht den Kreisbögen $0, \pi, 2\pi, \ldots$. Die Differentialquotienten ergeben sich aus:

$y=\sin x.$ $\quad \frac{dy}{dx}=\cos x.$ $\quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}.$

$$\frac{d\arc\sin y}{dy}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

In analoger Weise geht man bei der Auffindung von $\frac{d\arc\cos y}{dy}$ vor und bekommt dafür: $-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Zu letzterem Resultat hätte man auch kommen können, wenn man überlegt, daß der arc sin y und der arc cos y komplementär sein müssen. Dann ist:

$$\arc\sin y+\arc\cos y=\frac{\pi}{2} \text{ und } \frac{d\arc\sin y}{dy}+\frac{d\arc\cos y}{dy}=0.$$

Aus $y=\operatorname{tg} x$ folgt $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$ $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sec^2 x}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

$$\frac{d\arc\operatorname{tg} y}{dy}=\frac{1}{1+y^2}.$$

In analoger Weise geht man bei der Auffindung von $\frac{d\arc\cot y}{dy}$ vor und bekommt dafür $-\frac{1}{1+y^2}$.

Zu letzterem Resultate hätte man auch kommen können, wenn man überlegt, daß der arc tg y und der arc cot y komplementär sein müssen. Dann ist:

$$\arc\operatorname{tg} y+\arc\cot y=\frac{\pi}{2} \text{ und } \frac{d\arc\operatorname{tg} y}{dy}+\frac{d\arc\cot y}{dy}=0.$$

10. **Die Bedeutung des Differentialquotienten in der Physik.**

a) Der zurückgelegte Weg s ist eine Funktion der verflossenen Zeit t oder in Zeichen $s = f(t)$. Sind s_1 bzw. s_2 die in den Zeiten t_1 und t_2 zurückgelegten Wege, so ist $s_2 - s_1 = f(t_2) - f(t_1)$ der im Zeitabschnitte $t_2 - t_1$ zurückgelegte Weg. $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ stellt uns die mittlere Geschwindigkeit während der Zeit $t_2 - t_1$ vor. $\lim_{t_1 = t_2} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{ds}{dt} = f^1(t)$ ist die Geschwindigkeit zur Zeit t_1; man setzt dabei voraus, daß der unendlich kleine Weg ds in der unendlich kleinen Zeit dt gleichförmig zurückgelegt wird.

Die Geschwindigkeit ist der Differentialquotient des Weges nach der Zeit. Ist $\frac{ds}{dt}$ von t unabhängig, so ist die Bewegung gleichförmig.

Wir ziehen im Besonderen die harmonische Bewegung eines Punktes heran. Die Elongation s ist hier durch $r \sin \frac{2\pi}{T} \cdot t$ gegeben. Darin ist r die Amplitude, T die Schwingungsdauer, t die Phasenzeit. Die Bahngeschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ zur Zeit t ist: $\frac{2r\pi}{T} \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \cdot t$. Da hier $\frac{ds}{dt}$ von t abhängt, ist die Bewegung ungleichförmig.

b) Die jeweilige Geschwindigkeit v ist eine Funktion der verflossenen Zeit t oder in Zeichen $v = \varphi(t)$. Sind v_1 bzw. v_2 die nach den Zeiten t_1 und t_2 erlangten Endgeschwindigkeiten, so ist $v_2 - v_1 = \varphi(t_2) - \varphi(t_1)$ der im Zeitabschnitte $t_2 - t_1$ erlangte Geschwindigkeitszuwachs. $\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ stellt uns die Geschwindigkeitszunahme in der Zeiteinheit vor. $\lim_{t_1 = t_2} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{dv}{dt} = \varphi'(t)$ ist die Beschleunigung zur Zeit t_1; man setzt dabei voraus, daß die Bewegung während der unendlich kleinen Zeit dt gleichförmig beschleunigt ist.

Die Beschleunigung ist der Differentialquotient der Geschwindigkeit nach der Zeit. Ist $\frac{dv}{dt}$ von t unabhängig, so ist die Bewegung gleichförmig beschleunigt.

Wir ziehen wieder die harmonische Bewegung eines Punktes heran. Die Bahngeschwindigkeit ist hier durch $\frac{2r\pi}{T} \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \cdot t$ gegeben. Die Bahnbeschleunigung $\frac{dv}{dt}$ zur Zeit t ist: $-\frac{4\pi^2 r}{T^2} \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \cdot t$. Da hier $\frac{dv}{dt}$ von t abhängt, ist die Bewegung ungleichförmig beschleunigt, bzw. ungleichförmig verzögert.

c) Das elektrische Potential der Ladungsmenge e im Abstande r ist $\frac{e}{r} = f(r)$. Das Potential ist eine Funktion von r. Bildet man sich $f'(r)$ und nimmt das negative Resultat, so ist dieses $\frac{e}{r^2}$ die Feldstärke der Ladungsmenge e in der Entfernung r. Das hier Vorgebrachte läßt sich auch auf das magnetische Potential und das Gravitationspotential übertragen.

Der negativ genommene Differentialquotient des Potentiales nach der Entfernung ist die Feldstärke für jene Lage.

11. Die Potenzsummen der natürlichen ganzen Zahlen.

Im folgenden bezeichnen wir mit $s_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$, mit $s_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ usw.

Der Wert von s_1 ergibt sich als Summe einer arithmetischen Reihe in der Form $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$.

Bei der Bestimmung von s_2 bildet man sich die Summe der dritten Potenzen aller ganzen Zahlen von 1 bis inklusive $n+1$, schreibt dabei für $2^3 : 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$, für $3^3 : 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$ u. s. f., für $n^3 : (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$. Wenn man die obige Schreibweise berücksichtigt, bekommt man: $s_3 + (n+1)^3 = s_3 + 3s_2 + 3s_1 + (n+1)$, woraus sich der Wert von s_2 in der Form: $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ ergibt.

Bei der Bestimmung von s_3 bildet man sich die Summe der vierten Potenzen aller ganzen Zahlen von 1 bis inklusive $n+1$, schreibt für $2^4 : 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1$, für $3^4 : 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1$ u. s. f.

Bei Berücksichtigung der obigen Schreibweise resultiert: $s_4 + (n+1)^4 = s_4 + 4s_3 + 6s_2 + 4s_1 + (n+1)$ und dann $s_3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$. $s_4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$ errechnet man aus: $s_5 + (n+1)^5 = s_5 + 5s_4 + 10s_3 + 10s_2 + 5s_1 + (n+1)$. Ebenso bestimmt man: $s_5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}$ aus $s_6 + (n+1)^6 = s_6 + 6s_5 + 15s_4 + 20s_3 + 15s_2 + 6s_1 + (n+1)$.

Nicht selten benötigt man den $\lim$ von $\frac{s_k}{n^{k+1}}$ für $n = \infty$.

Es folgt: $\lim_{n=\infty} \frac{s_1}{n^2} = \lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$, analog: $\lim_{n=\infty} \frac{s_2}{n^3} = \frac{1}{3}$, $\lim_{n=\infty} \frac{s_3}{n^4} = \frac{1}{4}$ usw. Im folgenden wird gezeigt, wann man hievon praktische Anwendungen macht.

$y = f(x)$ sei die Gleichung der in Fig. 30 (Jahresbericht 1909-10) gezeichneten Kurve $M_1 N$. Ist $0P_1 = x_1$, $0P_2 = x_2$, $0P = x$, $0P' = x + dx$ (in der Fig. 30 ist aus Versehen der Fußpunkt der Ordinate von M' mit P_1 statt mit P' bezeichnet worden) und $0Q = a$, so läßt sich die Fläche, welche von der Kurve, der Anfangsordinate $P_1 M_1$, der Endordinate NQ und von der Abszissenachse begrenzt wird, bestimmen, indem man das Flächenelement $MPP'M'$ als Rechteck ansieht mit der Grundlinie $PP' = dx$ und der Höhe $MP = f(x)$ und sich dann die Summe aus allen Rechtecken $f(x)\,dx$ bildet. Die Summation erstreckt sich auf eine unendlich große Anzahl von Gliedern.

Derlei Summen treffen wir bei den mannigfachsten Aufgaben.

a) Wie groß ist das Trägheitsmoment eines materiellen Stabes von der Masse M und der Länge l, wenn die Drehung um einen seiner Endpunkte erfolgt? (Fig. 31.)

Wir setzen voraus, daß der Stab homogen ist. Seine Dichte ist konstant. Wird die Länge in n gleiche Teile geteilt, so hat jeder Teil die Länge $\frac{l}{n}$ und die Masse $\frac{M}{n}$. Die Teilpunkte haben vom Endpunkte 0 die Abstände: $\frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \ldots\ldots \frac{nl}{n}$. Die Trägheitsmomente der einzelnen Massen betragen: $\frac{M}{n} \cdot \frac{l^2}{n^2}$, $\frac{M}{n} \cdot \frac{4l^2}{n^2}, \ldots\ldots \frac{M}{n} \cdot \frac{n^2 l^2}{n^2}$ und das Trägheitsmoment das ganzen Stabes ist: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{Ml^2}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2)$. Dabei setzten wir stillschweigend voraus, daß die Masse eines jeden Linienstückes im Endpunkte des Linienstückes konzentriert ist. Man erhält als Endresultat für das Trägheitsmoment:

$$\lim_{n=\infty} \frac{Ml^2}{n^3} \cdot \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) = \lim_{n=\infty} \mathrm{M}l^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{Ml^2}{3}.$$

b) Wie groß ist die Fläche, welche von der Parabel $y = x^2$, der Ordinate PM und der Abszissenachse eingeschlossen wird?

Wird $0P = x$ (Fig. 32) in n gleiche Teile geteilt und zieht man durch die Teilungspunkte Parallele zu PM, so sind die Abszissen der Kurvenpunkte: $\frac{x}{n}, \frac{2x}{n}, \ldots\ldots \frac{nx}{n}$ und die Ordinaten dieser Kurvenpunkte: $\frac{x^2}{n^2}, \frac{4x^2}{n^2}, \ldots\ldots \frac{n^2 x^2}{n^2}$. Die in Betracht kommende Fläche ist: $\lim\limits_{n=\infty} \left(\frac{x}{n} \cdot \frac{x^2}{n^2} + \frac{x}{n} \cdot \frac{4x^2}{n^2} + \ldots\ldots + \frac{x}{n} \cdot \frac{n^2 x^2}{n^2}\right) =$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{x^3}{n^3} (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = \lim_{n=\infty} \frac{x^3}{n^3} \cdot \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) = \frac{x^3}{3}.$$

c) Wie groß ist die Fläche, welche von der Parabel $y = x^2$, der Anfangsordinate $M_1 P_1$, der Endordinate $M_2 P_2$ und der Abszissenachse eingeschlossen wird?

Ist $0P_1 = x_1$ und $0P_2 = x_2$ (Fig. 33), so ergibt sich die schraffierte Fläche mit Berücksichtigung des früher gefundenen Resultates in der Form: $\frac{x_2^3}{3} - \frac{x_1^3}{3}$.

12. Die Zahlenlinie. Die irrationalen Zahlen.

Durch das Zählen von Gegenständen gelangt man zu den ganzen Zahlen. Werden auf einem Halbstrahl vom Begrenzungspunkte aus untereinander gleiche Strecken abgetragen, so versinnlichen die Entfernungen dieser Punkte vom Begrenzungspunkte (gerechnet) die ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, u. s. f. Den fixen Begrenzungspunkt nennen wir den Nullpunkt, während die durch das wiederholte Abtragen derselben Strecke gewonnenen Punkte mit 1, 2, 3, 4, ... bezeichnet werden. Jeder ganzen Zahl entspricht ein Punkt. Nimmt man Additionen und Multiplikationen mit ganzen Zahlen vor, so kommt man aus dem Bereiche der ganzen Zahlen nicht heraus. Solange bei der Subtraktion der Minuend größer ist als der Subtrahend, genügt zur Versinnlichung der Zahlen der vorerwähnte Halbstrahl. Ist hingegen der Minuend kleiner als der Subtrahend, so wird man zur Einführung einer neuen Zahlengattung, der negativen Zahlen, genötigt; der besprochene Halbstrahl reicht zur Versinnlichung dieser Zahlen nicht mehr hin. Man muß den Halbstrahl über den Begrenzungspunkt hinaus nach der anderen Seite verlängern. Auf dieser Verlängerung finden die negativen Zahlen ihren Platz. Die ersterwähnten Zahlen nannte man zum Unterschiede positive. Die positiven und negativen ganzen Zahlen befinden sich somit auf einem Strahl, und zwar die positiven ganzen Zahlen rechts vom Nullpunkte, die negativen ganzen Zahlen links vom Nullpunkte. Äußerlich kennzeichnet man die ersteren durch Vorsetzen eines Pluszeichens, die letzteren durch Vorsetzen eines Minuszeichens. Die Zahlenlinie besteht aber nur aus einer diskreten Punktreihe, da die zwischen 0 und 1, 1 und 2, u. s. f. ebenso zwischen 0 und -1, -1 und -2 u. s. f. liegenden Punkte von uns noch nicht ins Auge gefaßt wurden.

Wenn bei der Division der Dividend kein Vielfaches des Divisors ist, so ist man gezwungen, eine neue Zahlengattung, die gebrochenen Zahlen, einzuführen. Es genügt der Begriff Stammbruch $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$, weil jeder andere Bruch nur das Multiple eines Stammbruches ist. Ein spezieller Fall der eben erwähnten gemeinen Brüche sind die Dezimalbrüche. Die Nenner der letzteren sind Potenzen von 10. Die Lücken zwischen 0 und 1 u. s. f. werden durch die gebrochenen Zahlen

nur teilweise ausgefüllt. Die vier Grundoperationen mit gebrochenen Zahlen liefern im Resultate wieder gebrochene Zahlen. Die schließlichen Lücken werden durch die irrationalen Zahlen ausgefüllt. Zur Einführung dieser Zahlengattung nötigt das Wurzelziehen, wenn der Radikand weder Potenz einer ganzen Zahl noch Potenz einer gebrochenen Zahl ist.

Die $\sqrt{2}$ ist 1·41421356..... Wählt man für die $\sqrt{2}$: 2, 1·5, 1·42, 1·415, 1·4143, 1·41422, 1·414214, 1·4142136 usw., so sind alle Werte größer als $\sqrt{2}$ und bilden in ihrer Gesamtheit betrachtet eine Reihe von Zahlen, die fort und fort abnimmt. Je mehr Dezimalstellen genommen werden, desto näher rückt man an den wahren Wert von $\sqrt{2}$ heran, ohne jedoch diesen wirklich zu erreichen. Wählt man anderseits für die $\sqrt{2}$: 1, 1·4, 1·41, 1·414, 1·4142, 1·41421, 1·414213, 1·4142135 usw., so sind alle Werte kleiner als $\sqrt{2}$ und bilden in ihrer Gesamtheit betrachtet eine Reihe von Zahlen, die fort und fort zunimmt. Allgemein gibt es zu jeder $\sqrt[n]{A}$ zwei Reihen. Eine heiße a_1, a_2, a_3,..... und habe die Eigenschaft $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$..... Auf unseren speziellen Fall angewendet, entspricht sie der Reihe 1, 1·4, 1·41,... Die andere Reihe heiße b_1, b_2, b_3,..... und habe die Eigenschaft $b_1 \geqq b_2 \geqq b_3$..... Auf unseren speziellen Fall angewendet, entspricht sie der Reihe 2, 1·5, 1·42,....

Diese zwei Reihen haben folgende Eigenschaften:

1. Die a Größen nehmen zu (niemals ab) und nähern sich mit wachsendem Index um so mehr der $\sqrt[n]{A}$, je höher der Index gewählt wird. Die $\sqrt[n]{A}$ ist für die a Reihe die obere Grenze, d. h. die Glieder dieser Reihe erreichen niemals die $\sqrt[n]{A}$. Es ist stets $\sqrt[n]{A} > a_k$, wie hoch auch k gewählt wird. Die Differenz $\sqrt[n]{A} - a_k$ kann aber bei gehörig großem k beliebig klein gemacht werden.

2. Die b Größen nehmen ab (niemals zu) und nähern sich mit wachsendem Index um so mehr der $\sqrt[n]{A}$, je höher der Index gewählt wird. Die $\sqrt[n]{A}$ ist für die b Reihe die untere Grenze, d. h. die Glieder dieser Reihe erreichen niemals die $\sqrt[n]{A}$. Es ist stets $b_k > \sqrt[n]{A}$, wie hoch auch k gewählt wird. Die Differenz $b_k - \sqrt[n]{A}$ kann aber bei gehörig großem k beliebig klein gemacht werden.

3. Stets ist $b_k > a_k$ und die Differenz $b_k - a_k$ kann bei gehörig großem k beliebig klein gemacht werden.

Die $\sqrt[n]{A}$ stellt man symbolisch durch $\binom{a_k}{b_k}$ dar.

Die irrationalen Zahlen werden demnach auf eine viel kompliziertere Art erhalten als die rationalen Zahlen. Ihre

Mannigfaltigkeit ist sehr groß; nur ein ganz kleiner Teil läßt sich durch einfache Symbole charakterisieren.

Schreibt man dem Einheitkreise ein reguläres Dreieck, 6=, 12=, 24=, 48 Eck ein und bezeichnet die Umfänge dieser regulären Polygone mit u_3, u_6, u_{12},....., so erhält man: $u_3 = 5{\cdot}1961..$, $u_6 = 6$, $u_{12} = 6{\cdot}2117..$, $u_{24} = 6{\cdot}2653...$, $u_{48} = 6{\cdot}2787...$; schreibt man demselben Kreise ein reguläres Dreieck, 6=, 12=, 24=, 48 Eck um und bezeichnet die Umfänge dieser regulären Polygone mit U_3, U_6, U_{12},...., so erhält man: $U_3 = 10{\cdot}3922..$, $U_6 = 6{\cdot}9282...$, $U_{12} = 6{\cdot}4307...$, $U_{24} = 6{\cdot}3193...$, $U_{48} = 6{\cdot}2921....$ Die Reihe der u nähert sich dem 2π wachsend, die Reihe der U hingegen abnehmend. Es ist $2\pi = \binom{u_k}{U_k}$.

Bezeichnet man die Flächeninhalte der genannten Polygone mit f_3, f_6, f_{12},..... bzw. mit F_3, F_6, F_{12},...., so ergibt sich: $f_3 = 1{\cdot}299...$, $f_6 = 2{\cdot}598...$, $f_{12} = 3$, $f_{24} = 3{\cdot}1058,..$, $f_{48} = 3{\cdot}1326...$, $F_3 = 5{\cdot}1961...$, $F_6 = 3{\cdot}4641...$, $F_{12} = 3{\cdot}2154...$, $F_{24} = 3{\cdot}1597...$, $F_{48} = 3{\cdot}1461....$ Die Reihe der f nähert sich dem π wachsend, die Reihe der F hingegen abnehmend. Es ist $\pi = \binom{f_k}{F_k}$.

Der Kreisumfang (Flächeninhalt des Kreises) ist die obere Grenze für die Umfänge (Flächeninhalte) der eingeschriebenen Polygone und die untere Grenze für die Umfänge (Flächeninhalte) der umgeschriebenen Polygone.

Schlußbemerkung.

Im Jahresberichte des nächsten Schuljahres wird die Fortsetzung dieser Schrift erfolgen. Ich danke an dieser Stelle dem Herrn Kollegen Karl Pirker, der mir bei der Durchsicht bereitwilligst half.

RUDOLF HLAWATY †.

Die Triester Realschule hat in diesem Jahre einen schmerzlichen Verlust erlitten. Rudolf Hlawaty, der liebe Kollege, der ausgezeichnete Lehrer, der anerkannte Künstler, ist nicht mehr. Es war am 19. Februar, als sich die Kunde verbreitete, daß Hlawaty plötzlich an einer schweren Blinddarmentzündung erkrankt und operiert worden sei. Teilnehmende Freunde eilten ins Sanatorium, um sich nach seinem Befinden zu erkundigen, und seiner Gattin mit Rat und Tat zur Seite zu stehen. Aber der Arzt konnte ihnen nur wenig Hoffnung machen, und als sich der Zustand des Kranken auch an den beiden folgenden Tagen nicht besserte, sondern eine zweite Operation notwendig wurde, da wußte man, daß das Schlimmste zu befürchten sei. Am Vormittag des 22. waren seine Gattin und die Freunde zum letztenmale am Lager des Schwerkranken, des Sterbenden versammelt. Als die Direktion der Realschule in den ersten Nachmittagsstunden telephonisch Erkundigungen einzog, da kam die erschütternde Nachricht, daß der Kranke ausgelitten habe. Woran trotz der ernsten Auffassung der Ärzte niemand glauben wollte, das war eingetroffen: Ein tückisches Schicksal hatte unseren lieben Freund in der schönsten Blüte seiner Jahre dahingerafft.

Der Lebensgang des Dahingeschiedenen ist nicht reich an äußeren Ereignissen, denn seine Tage waren in ernstem Streben und in beharrlicher Arbeit der Kunst gewidmet, die ihm die hohe, die himmlische Göttin war.

Rudolf Hlawaty wurde am 20. Juli 1877 in Wien als Sohn eines Polizeibeamten geboren. Schon in zartem Alter zeigte der Knabe eine ausgesprochene Neigung zur Malerei. Obwohl es der Vater nicht gerne sah, daß sein Sohn sich der künstlerischen Laufbahn widme, setzte es dieser doch durch, daß er die Graphische Lehr- und Versuchsanstalt und sodann die Kunstgewerbeschule in Wien absolvieren durfte.

Nachdem er ein halbes Jahr an der Mariahilfer Realschule in Wien als Assistent für das Freihandzeichnen verbracht hatte, wurde er im September 1900 als Supplent für das Zeichenfach nach Triest berufen. Hier wirkte er zuerst als supplierender Lehrer, seit 1907 als wirklicher Lehrer und wurde im Jahre 1910 mit dem Titel k. k. Professor ausgezeichnet. In diesem Jahrzehnte seiner Wirksamkeit in Triest entfaltete er eine reiche pädagogische und künstlerische Tätigkeit. Seine

Schüler wußte er zu schöner Begeisterung und zu regem Eifer in seinem Fache anzuspornen. Dabei widmete er seine ganze freie Zeit der eigenen künstlerischen Betätigung. Als Mitglied des Triester Circolo artistico beschickte er die regelmäßigen Ausstellungen dieser Künstlervereinigung, und bald erfreute sich sein Künstlername allgemeiner Hochachtung. Die Aufmerksamkeit weiterer Kreise erregte er zuerst mit seinen Karstbildern, Zeichnungen und Ölgemälden, in denen er die Stimmung der Karstlandschaft meisterhaft wiedergab. Namentlich seine Ölbilder mit Karstmotiven schwelgen in Sonne, Licht und Farbe und sind so recht ein Abbild seines sonnigen, heiteren, überall beliebten Wesens. In den letzten Jahren pflegte er vorwiegend die Porträtmalerei. Besondere Genugtuung bereitete es ihm, als er den ehrenvollen Auftrag erhielt, seine Exzellenz den Herrn Bischof Dr. Franz Xaver Nagl zu porträtieren. Daneben beschäftigten ihn mehrere, für die Vinzentiuskirche bestimmte Altarbilder, Ölgemälde für den Speisesaal auf dem Lloyddampfer „Leopolis“, Entwürfe für die innere Ausstattung des Restaurant Dreher und vieles andere.

Mitten aus diesem emsigen und erfolgreichen Schaffen heraus wurde Hlawaty von einem jähen Tode hinweggerafft. Als am 24. Februar seine irdische Hülle zur ewigen Ruhe bestattet wurde, da zeigte sich so recht, wie allgemein die Beliebtheit war, deren der Verstorbene sich erfreut hatte. Seine trauernde Gattin und die übrigen Angehörigen, die sämtlichen Schüler der Anstalt, Vertreter der Landesschulbehörde, eine große Zahl von Freunden aus Lehrerkreisen, zahlreiche Offiziere und Mitglieder der Triester „Schlaraffia“ gaben ihm das letzte Geleite — ein schier unabsehbarer Zug und zugleich die würdigste Kundgebung der allgemeinen Trauer um den Verblichenen. In der Neuen Antoniuskirche, wo die Einsegnung erfolgte, ergriff Se. Hochw. Herr Prof. Dr. Hugo Mioni das Wort zu einem warm empfundenen Nachrufe und feierte in bewegten Worten den Verstorbenen als Menschen und Künstler.

Unser Schmerz vermag ihn nicht wieder zum Leben zu erwecken, aber in unserem Herzen hat sich Rudolf Hlawaty ein dauerndes Denkmal geschaffen.

Dr. R. Hassfurther.

Schulnachrichten.

I.

Der Lehrkörper

und die Verteilung der Lehrfächer und Ordinariate.

Zahl	Name, Titel und Charakter	Lehrfächer	Klassen	Wöchentl. Stunden	Klassenvorstand
1	Dr. *Artur* **Brandeis**, Direktor.	—	—	—	—
2	*Johann* **Bernt**, Professor, Kustos des geogr.-hist. Kabinettes.	Deutsch Geogr. u. Gesch.	III a III a, IV b, V a	4 12	III a
*3	*Horatius* **Chizzola**, Professor, Kustos d. Lehrerbibl.	Französisch Italienisch	V a I a, III, IV, V, VI, VII	3 19	V a
4	*Klemens* **Emptmeyer**, Professor, VIII. Rangsklasse, Kustos d. Zeichenkab.	Freihandzeichnen	I a, II b, III a, IV b, V a, VI	20	I a
5	*Dr. Richard* **Hassfurther**, Professor, Kustos d. Schülerbibl.	Deutsch Englisch	IV b, VI, V a, VI, VII	7 9	IV b
6	*Rudolf* **Hlawaty**, Professor, † am 22. Febr. 1911.	Freihandzeichnen	I b, II a, III b, IV a, V b, VII	—	—
7	*Leopold* **Höss**, Professor, Kustos des Kabin. für Chemie.	Chemie Analyt. Chemie	IV a, IV b, V a, V b, VI 2 Kurse	14 4	V b
**8	*Vinzenz* **Hruby**, Professor, VII. Rangsklasse.	Französisch Englisch	III b, V b, VII V b	12 3	—
9	*Franz* **Karollus**, Professor.	Mathem. u. Geom Physik Kalligraphie	III b, VI III b, VI I a	9 (8) 7 1	—
10	*Augustin* **Kofler**, Professor, Kustos d. naturhist. Kabinettes.	Mathem. u. Geom. Naturgeschichte Kalligraphie	I b, II b I a, I b, II a, II b I b	8 8 1	I b
11	*Dr. Ludwig* **Lusner**, Professor.	Für das Schuljahr 1910-11 dem k. k. Franz-Josef-Realgymnasium in Wien zugewiesen.			

Mitglied der Prüfungs-Kommission für allgemeine Volks- und Bürgerschulen in Triest.

*· Mitglied der Prüfungs-Kommissionen für allgemeine Volks- und Bürgerschulen in Triest, Görz und Capodistria.

Zahl	Name, Titel und Charakter	Lehrfächer	Klassen	Wöchentl. Stunden	Klassenvorstand
12	*Ferdinand* **Meier**, wirkl. Lehrer.	Deutsch	IV a, V a, V b, VII	14	VII
13	*Dr. Hugo* **Mioni**, Weltpriester, Professor.	Kathol. Relig. Exhorte Italienisch	I a, I b, II b—VII III a—VII II b	21 2 3	—
14	*Johann* **Rajakowitsch**, Professor, Kustos d. phys. Kab.	Mathematik Physik Stenographie	V a, VII III a, IV b, VII 2 Kurse	9 9 4	—
15	*Dr. Josef* **Schiller**, Professor.	Deutsch Geogr. u. Gesch. Naturgeschichte	II a I b V a, V b, VI	6 4 6 (7)	II a
16	*Anton* **Stephanides**, Professor, VII. Rangsklasse.	Geometrie und geom. Zeichnen Darstell. Geom.	IV a, IV b V a, V b, VI, VII	6 11	—
17	*Dr. Karl* **Tertnik**, Professor, VIII. Rangsklasse, Kustos der Georgstiftung.	Geogr. u. Gesch. Slowenisch	II a, IV a, V b I b, II. u. III. Kurs	12 8	—
18	*Adolf* **Thannabaur**, Professor, VII. Rangsklasse.	Deutsch Geogr. u. Gesch.	I b II b, III b, VII	6 11	—
19	*Sebald* **Riedel**, Turnlehrer.	Turnen	In allen Klassen	24	—
20	*Martin* **Kuhla**, suppl. Lehrer.	Deutsch Französisch Mathem. u. Geom. Naturgeschichte	II b III a III a VII	6 6 5 3	II b
21	*Dr. Karl* **Pirjevec**, suppl. Lehrer.	Mathem. u. Geom. Physik	I a, IV a, IV b, V b IV a	15 2	IV a
22	*Andreas* **Verbich**, suppl. Lehrer.	Deutsch Geogr. u. Gesch.	I a, III b I a, VI	10 7	III b
23	*Hermes* **Fezzi**, suppl. Lehrer.	Französisch Italienisch	IV a, IV b, VI I b, II a	13 7	VI
24	*Karl* **Pirker**, suppl. Lehrer, Assistent.	Mathem. u. Geom. Geom. Zeichnen	II a IV	5 11	—
25	*Berthold* **Zimmermann**, suppl. Lehrer, Assistent.	Freihandzeichnen	Bis 22. Febr. Assistent in allen Klassen bis auf die V a, b, dann Suppl. in I b, II a, III b, IV a, V b, VII. Ass. in I a u. II b	29 21+8	—
26	*Heinrich* **Šonc** Aushilfslehrer.	Katholische Rel. Exhorte	II a I a, I b, II a, II b	2 2	—

Akatholische Religionslehrer.

Zahl	Name, Titel und Charakter	Lehrfächer	Klassen	Wöchentl. Stunden	Klassenvorstand
1	*Hermann* **Adler,** evang. Pfarrer A. B.	Evangelische Religion A. B.	I a + II a, III a + IV a, V + VI + VII	2, 1 1	—
2	*Josef* **Schalaudek,** evang. Pfarrer H. B.	Evangelische Religion H. B.	ebenso	2, 1 1	—
3	*Dr. Uscher* **Brettholz,** Rabbiner, Prof.	Mosaische Religion	I a II-VII je 1 Stunde	2 6	—

Nebenlehrer.

1	*Josef* **Prachner,** Unterlehrer an der Volksschule Via Annunziata.	Turnen als Assistent	I a, I b, II a, II b, IV a	5	—
2	*Ludwig* **Pfurtscheller,** Lehrer an derselben Volksschule.	Gesang als Gesangslehrer	I a-III b und Männerchor	2 1	—

Schuldiener.

Amtsdiener: *Andreas* **Castelluber** — *Vinzenz* **Kosmina.**

Aushilfsdiener: *Raimund* **Petzrick.**

II.

Die Lehrverfassung.

a) Übersicht über die Lehrgegenstände und ihre wöchentliche Stundenzahl.

(Nach dem Normallehrplane vom 8. April 1909 mit Ausnahme der Sprachen.)

Gegenstand	Klasse							Wöchentliche Stundenzahl
	I	II	III	IV	V	VI	VII	
Kathol. Religionslehre . .	2	2	2	2	2	2	1	13
Evang. Religionslehre A. B.	2		1		1			3
„ „ H. B.	ebenso							3
Mosaische Religionslehre .	2	1	1	1	1	1	1	8
Deutsche Sprache	6	5	4	4	3	3	4	29
Französische Sprache . .	—	—	5	3	3	3	3	17
Italienische Sprache / Slowenische Sprache [1]) . .	4	4	3	3	3	3	3	23
Englische Sprache [2]) . . .	—	—	—	—	3	3	3	9
Geographie	2	2	2	2	1	1	}	10
Geschichte	2	2	2	2	3	2	3	16
Mathematik	3	3	3	4	4	I. Sem. 4 II. „ 3	5	26 (25)
Naturgeschichte	2	2	—	}	2	I. „ 2 II. „ 3	3	11 (12)
Chemie	—	—	—	} 3	3	2	—	8
Physik	—	—	3	2	—	4	4	13
Geometrisches Zeichnen .	—	2	2	3	3	3	2	15
Freihandzeichnen	4	4	4	3	3	2	3	23
Schönschreiben	1	—	—	—	—	—	—	1
Turnen	2	2	2	2	2	2	2	14
Freie Gegenstände:								
Stenographie (2 Kurse à 2 St.)	—	—	—	2[3])	2	—	—	4
Analytische Chemie ebenso	—	—	—	—	2[4])	2	—	4
Gesang (1 Kurs à 2 St.) . .	2[5])	—	—	—	—	—	—	2

[1]) Gemäß Erl. des Min. für Kultus und Unterricht vom 29. August 1910, Zl. 29119, ist vom Schuljahre 1910-11 für alle Schüler entweder Italienisch oder Slowenisch nach Wahl der Eltern oder deren Stellvertreter obligat. Diese Einrichtung trat im Schuljahre 1910-11 für die I. Klasse in Kraft; daher entfiel der 1. slow. Freikurs und es verblieben der 2. und 3. mit je 2 Wochenstunden, die mit der fortschreitenden Einführung des obligaten Unterrichtes in den Landessprachen aufgelassen werden.

[2]) Für die Schüler der 3 oberen Klassen ist Italienisch oder Englisch obligat. Minist.-Erl. vom 4. Mai 1880, Zl. 813.

[3]) In den I. Kurs können Schüler von der 4., in den II. von der 5. Klasse an eintreten.

[4]) In den I. Kurs können Schüler von der 5., in den II. von der 6. Klasse an eintreten.

[5]) Der Gesangsunterricht wurde in 2 Abteilungen erteilt: Knabenchor (I.—III. Kl.), Männerchor (IV.—VII. Kl.).

b) Lehrstoff nach Klassen und Gegenständen.

I. Klasse.

Katholische Religionslehre: Die katholische Glaubens- und Sittenlehre; die Sakramente; Liturgik: Die kirchlichen Zeiten und Feste.

Deutsche Sprache: Wiederholung und Erweiterung des bei der Aufnahmsprüfung geforderten grammatischen Wissens nach Maßgabe der Bedürfnisse des fremdsprachlichen Unterrichtes und des Aufsatzunterrichtes. — Richtiges und sinngemäßes Lesen kleiner erzählender Gedichte, von Märchen, Sagen, Fabeln und Erzählungen. Erklärung, Besprechung und freie Wiedergabe das Gelesenen. — Auswendiglernen und Vortragen von kurzen Gedichten, ausnahmsweise prosaischen Stücken. Im Semester 6 Schul- und 3 Hausarbeiten.

Italienische Sprache (für Italiener, mit italienischer Unterrichtsprache): Formenlehre des Artikels, Substantivs, Adjektivs, Pronomens und der regelmäßigen Verba. Praktische Übungen in der Orthographie. Lektüre aus den „Nuove letture italiane", p. I. Mündliche und schriftliche Übungen. 6 Schul- und 3 Hausarbeiten in jedem Semester.

Italienische Sprache (für Nichtitaliener, mit deutscher Unterrichtssprache): Aussprache, Formenlehre nebst einigen Regeln aus der Satzlehre. Diktate, Schriftliche und mündliche Nacherzählungen, Konversationsübungen. Lehr- und Lesebuch der ital. Sprache (I.) v. Baroni-Segatini. 4 Schul- und 4 Hausarbeiten in jedem Semester.

Slowenische Sprache: Formenlehre. Lektüre aus Sket, „Slov. čitanka" (I.). Memorieren und Vortragen poetischer und prosaischer Stücke. Im I. und II. Sem. je 6 Schul- und 3 Hausarbeiten.

Geographie, 2 Stunden wöchentlich: Geographische Vor- und Grundbegriffe; die Hauptformen des Festen und Flüssigen in ihrer Verteilung auf der Erde, sowie die Lage der bedeutendsten Städte und Staaten der einzelnen Erdteile in übersichtlicher Weise. Stete Anwendung der Karten.

Geschichte, 2 Stunden wöchentlich: Altertum: Ausführlichere Darstellung der Sagen. Die weltgeschichtlich wichtigsten Personen und Begebenheiten, hauptsächlich aus der Geschichte der Griechen und Römer.

Mathematik: Dekadisches Zahlensystem, metrisches System, Grundoperationen mit unbenannten und einnamigen ganzen und Dezimalzahlen, Vorübungen in einfachen Schlußrechnungen. Vaterländische Münzen. Römische Zahlzeichen. Rechnen mit mehrnamig benannten Zahlen. Vorübungen für das Bruchrechnen. In jedem Semester 3 Schulaufgaben; außerdem von Stunde zu Stunde kleine Übungsaufgaben.

Naturgeschichte: Zoologie. I. Sem. und in den ersten 4 Wochen des II. Sem.: Beschreibung der wichtigsten Arten der Säugetiere und Vögel; im Rest des II. Sem.: Beschreibung einer Anzahl von phanerogamen Pflanzen, mit Erörterung der allgemeinen Merkmale an denselben.

Geometrie: Grundbegriffe der Geometrie und anschauliche Erklärung der elementaren Körperformen: Würfel, Prisma, Pyramide, Zylinder, Kugel und Kegel. Erläuterungen der wichtigsten ebenen geometrischen Gebilde und ihrer Merkmale auf dem Wege der Anschauung. Inhalt von Quadrat, Rechteck, Würfel und Quader.

Freihandzeichnen: Zeichnen einfacher Ornamente, stilisierter Blütenformen. Einfache Gefäße und andere Objekte zum Zeichnen nach der Natur. Material: Bleistift und Farbe. Erklärungen über die Anwendung und Bedeutung der Ornamente.

Schönschreiben: Im I. Semester die deutsche und lateinische Schrift, im II. die Rundschrift.

II. Klasse.

Katholische Religionslehre: Die christliche Liebe, die christliche Gerechtigkeit. Liturgik. Die religiösen Handlungen.

Deutsche Sprache: Grammatik: Wiederholung des grammatischen Lehrstoffes der I. Klasse; Vervollständigung der Formenlehre, Erweiterung der Lehre vom einfachen Satz; der zusammengezogene Satz, die Satzverbindung in übersichtlicher Behandlung. — Lektüre wie in der I. Klasse. Memorieren und Vortragen. — Schriftliche Arbeiten: Im I. und II. Semester je 6 Schul- und 3 Hausarbeiten. Etwas umfangreichere Nacherzählungen; Umbildungen einfacher Lesestücke nach gegebenen Gesichtspunkten; verkürzende Zusammenfassung ausführlicher Erzählungen.

Italienische Sprache: Formenlehre der unregelmäßigen Verba, Lektüre aus den „Nuove letture italiane“, p. II. Monatlich je eine Schul- und eine Hausaufgabe.

Geographie, 2 Stunden wöchentlich: Der scheinbare Sonnenlauf unter verschiedenen Breiten. Kugelgestalt und Größe der Erde. Vertiefende Lehre vom Globus. Asien, Afrika, Südeuropa und das britische Inselreich. — Kartenskizzen (lediglich zu Übungszwecken).

Geschichte, 2 Stunden wöchentlich: Mittelalter und Neuzeit bis zum westfälischen Frieden. Die weltgeschichtlich wichtigsten Personen und Begebenheiten mit besonderer Rücksicht auf die Geschichte der österreichisch-ungarischen Monarchie.

Mathematik: Rechnen mit Brüchen. Schlußrechnung, einfache Zinsrechnung. In jedem Semester 3 Schulaufgaben; außerdem von Stunde zu Stunde kleine Übungsaufgaben.

Geometrie: Symmetrie, geometrische Orte, Dreiecke, Vierecke, Vielecke, Kreis, Prisma, Pyramide, Kegel, Zylinder, Kugel.

Naturgeschichte: 6 Monate Zoologie: Die wichtigsten Vertreter der übrigen Wirbeltiere und der wichtigeren Ordnungen der Wirbellosen mit besonderer Berücksichtigung der Meeresbewohner. — 4 Monate Botanik: Beschreibung und Vergleichung einer Anzahl von Sporen- und Samenpflanzen; Besprechung der wichtigeren Familien.

Geometrisches Zeichnen: Übungen im Gebrauch der Reißinstrumente. Konstruktionszeichnen im Anschluß an den behandelten Lehrstoff und unter besonderer Berücksichtigung einfacher ornamentaler Formen.

Freihandzeichnen: Perspektivisches Freihandzeichnen nach Kombinationsmodellen in Einzel- und Gruppendarstellungen; Zeichnen einfacher Flachornamente und stilisierter pflanzlicher Motive. Zeichnen nach der Natur. Material: Bleistift, Farbe und Kreide.

Erklärungen: Die Grundsätze des Perspektivzeichnens nach der Anschauung. Entwicklung und Zweck der Ornamente.

III. Klasse.

Katholische Religionslehre: Liturgik: Die heiligen Orte. Geschichte der Offenbarung des alten Testamentes.

Deutsche Sprache: Zusammenhängende Behandlung der Wortlehre und der Lehre vom einfachen Satze. Genaues Eingehen auf die Gedankenfolge und Gliederung prosaischer und

poetischer Lesestücke, Memorieren und Vortragen (Umgestaltung kleiner epischer Gedichte in Prosa, Auszüge aus ausführlicheren Erzählungen, Beschreibungen). In jedem Semester 4 Schul- und 2 Hausarbeiten.

Französische Sprache. (Lehrstoff der I. und II. Klasse des neuen Lehrplanes.): Einzelne Sätze, bald jedoch zusammenhängende Lesestücke; sprachliche und sachliche Erklärung derselben, anfangs nur deutsch, allmählich immer mehr französich. Französische Fragen und Antworten über das Gelesene. Nachsprechen der vom Lehrer vorgesprochenen Sätze, Niederschreiben derselben oder wenigstens der schwierigeren Wörter und Wortverbindungen. Grammatik gelegentlich der Lektüre, später systematisch. 7 schriftliche Arbeiten, abwechselnd Diktate und Schularbeiten. Stoff der letzteren: Niederschreiben eines durchgearbeiteten Stückes, Fragen und Antworten in französischer Sprache über Gelesenes.

Italienische Sprache: Syntax. Lektüre aus den „Nuove letture italiane", p. III. 4 Schul- und 2 Hausarbeiten im Semester.

Geographie, 2 Stunden: Die in der II. Klasse nicht behandelten Länder Europas (mit Ausschluß der österreichisch-ungarischen Monarchie), Amerika und Australien nach denselben Gesichtspunkten wie in der II. Klasse, insbesondere auch rücksichtlich der Erklärung der klimatischen Verhältnisse.

Geschichte, 2 Stunden: Mittelalter seit Rudolf von Habsburg und Neuzeit bis zur Gegenwart (gekürzt). Die wichtigsten Personen und Begebenheiten mit besonderer Rücksicht auf die Geschichte der österreichisch-ungarischen Monarchie.

Mathematik: Abgekürztes Rechnen. Einübung der 4 Grundoperationen mit algebraischen Zahlen und Ausdrücken. Das Quadrieren und Kubieren, die Quadrat- und Kubikwurzel. In jedem Semester 3 Schulaufgaben; außerdem von Stunde zu Stunde kleine Übungsaufgaben. Geometrie: Ähnlichkeit, Flächengleiche Figuren, Flächenverwandlungen. Flächen- und Körperberechnung.

Physik: Allgemeine Eigenschaften der Körper, Wärmelehre, Magnetismus, Elektrizität, Akustik, Optik, Himmelserscheinungen (über das ganze Schuljahr verteilt).

Geometrisches Zeichnen: Ausdehnung der in der II. Klasse begonnenen Konstruktionen auf den obigen Lehrstoff der Geometrie.

Freihandzeichnen: Perspektivisches Freihandzeichnen nach Holzmodellen und Modellgruppen mit Bleistift, Farbe

und Kreide. Zeichnungen nach der Natur und kunstgewerblichen Objekten. Zeichnen nach ornamentalen Gipsmodellen. Zeichnen und Malen nach Flachornamenten der antikklassischen Kunstweisen. Blumenmalen nach Vorlagen und nach der Natur. Einfache Stilleben. Erklärungen in der Farbengebung und Farbenharmonie.

IV. Klasse.

Katholische Religionslehre: Geschichte der Offenbarung des neuen Bundes.

Deutsche Sprache: Grammatik: Zusammenfassende Wiederholung der Formen- und Satzlehre. Das Wichtigste aus der Wortbildungslehre. Grundzüge der Prosodie und Metrik. — Lektüre wie in der III. Klasse. Außer den im Lesebuche enthaltenen Stücken: Kleists Novelle „Michael Kohlhaas". Memorieren und Vortragen. — Aufsätze: In jedem Semester vier Schul- und zwei Hausarbeiten. Stoff teilweise noch wie in der III. Klasse; außerdem Beschreibung von bestimmten Vorgängen; Schilderungen; Übungen im Herausheben der Disposition größerer Lesestücke und im Disponieren passend gewählter Stoffe.

Französische Sprache (Lehrstoff der 3. und 4. Klasse des neuen Lehrplanes): Sprachliche Erklärung des Sprech- und Lesebuches von Bechtel, Mittelstufe. Französische Fragen und Antworten über das Gelesene. Die wichtigsten unregelmäßigen Verba; Bildung des Adverbs; unregelmäßige Pluralformen; Übersetzungen aus dem Deutschen ins Französische im Anschlusse an den Lesestoff. In jedem Semester 4 Schulaufgaben. Stoff derselben: Beantwortung französischer Fragen über das Gelesene und kleine freie Nacherzählungen.

Italienische Sprache: Fortgesetzte syntaktische Übungen, Lektüre aus den „Nuove letture italiane", p. IV. In jedem Semester 4 Schul- und 2 Hausarbeiten. Lektüre: Manzoni's „I promessi sposi".

Geographie: 2 Stunden: Lage, physische und politische Geographie der österreichisch-ungarischen Monarchie mit Ausschluß des statistischen Teiles als solchen, jedoch mit eingehender Beachtung der Produkte der Länder, der Beschäftigung, des Verkehrslebens und der Kulturverhältnisse der Völker. — Kartenskizzen (zu Übungszwecken).

Geschichte: 2 Stunden: Neuzeit von 1648 an (gekürzt). Die wichtigsten Personen und Begebenheiten mit besonderer Rücksicht auf die Geschichte der österreichisch-ungarischen

Monarchie. Altertum bis zum Untergange des weströmischen Reiches.

Mathematik: Allgemeine Arithmetik: Erläuterung der Operationsgesetze und ihres Zusammenhanges, vertieftes Verständnis des dekadischen Zahlensystems und einfachste Übungen mit anderen Systemen. Maße, Vielfache, Brüche; Gleichungen des ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten; Verhältnisse, Proportionen; Reine Gleichungen zweiten Grades. Graphische Darstellung der linearen Funktion und ihre Benützung zur Auflösung von Gleichungen des ersten Grades.

Planimetrie: Wiederholung und Vertiefung des früher behandelten Lehrstoffes. Lösung von Konstruktionsaufgaben. Rechnungsaufgaben im Anschluß an den übrigen Lehrstoff.

3 Schulaufgaben pro Semester, Hausübungen von Stunde zu Stunde.

Physik: Vom Gleichgewicht und der Bewegung, von den Flüssigkeiten und den Gasen. Zusammenfassende Wiederholung der Himmelserscheinungen und ihre Erklärung aus dem kopernikanischen System.

Chemie: Experimente über Lösung und Ausscheidung der Körper, chemische Synthese und Analyse. Über Atomgewichte, Wertigkeit und chemische Formeln. Grundzüge der Kristallographie. Chemie der Metalloide und Metalle mit ihren wichtigsten gegenseitigen Verbindungen, Besprechung der hiebei in Betracht kommenden Minerale und Gesteine, sowie der besonders für Handel und Industrie bedeutendsten organischen Verbindungen. Die 6 Kristallsysteme.

Geometrisches Zeichnen: Darstellung der Kegelschnittslinien auf Grund ihrer Brennpunktseigenschaften. Tangenten in einem Punkte und von einem Punkte außerhalb. Lagenbeziehungen.

Anschauungsmäßiges Zeichnen von Grund- und Aufriß einfacher Körper in besonderen Lagen gegen die Rißebenen. Geometrische Festsetzung der Begriffe Grund- und Aufriß für Punkte, Linien usw. Ermittlung der Länge und Tafelneigung von Strecken sowie der Gestalt geradliniger, in projizierenden Ebenen liegender Figuren. Darstellung ebenflächiger Körper in gedrehten Stellungen. Zeichnen von Seiten- und Schrägrissen solcher Körper. Schnitte mit projizierenden Ebenen. Netze ebenflächiger Körper, einfache Schattenkonstruktionen für solche Körper bei Parallelbeleuchtung.

Freihandzeichnen: Weitere Entwicklung im Zeichnen und Malen von Naturformen und Gruppenbildern. Zeichnen und Malen nach guten Vorbildern und Gips.

V. Klasse.

Katholische Religion: Allgemeine Glaubenslehre: Die Apologie der katholischen Kirche. Besondere Glaubenslehre: Die Lehre von Gott. Die Christologie.

Deutsche Sprache: Literaturgeschichte von den Anfängen bis einschließlich Wieland. — Gelesen: *a*) Auswahl aus dem Nibelungenliede, Inhaltsangabe der Gudrun, kurze Auswahl aus dem Minnegesang und der Spruchdichtung in Übersetzungen. Volkslieder, Proben aus Hans Sachs, kurze Proben aus dem Messias, Klopstocks Oden in knapper Auswahl; Wielands Oberon in Bruchstücken mit verbindender Inhaltsangabe. — *b*) Stücke aus Homers Ilias und ausgewählte Balladen aus der neueren Literatur.

Sprechübungen. In jedem Semester 5 Aufsätze.

Französische Sprache: Übersetzung, sprachliche und sachliche Erklärung von Daudet, Le petit Chose. Lektüre und Nacherzählung von Stücken erzählenden Inhalts. Lektüre einiger Fabeln von La Fontaine. Wiederholung der Formenlehre in französischer Sprache, besonders der Fürwörter und Zeitwörter. Gebrauch des Artikels. Übersetzungen aus dem Deutschen. In jedem Semester 4 Schularbeiten, bestehend in Nacherzählung gelesener oder vorgelesener Stücke.

Italienische Sprache: Le origini della lingua. Poesia dialettale; scuola poetica siciliana; il dolce stil novo; Dante Alighieri: vita e opere. Il Petrarca, il Boccaccio; i prosatori e i poeti minori del Trecento. Il Rinascimento; gli Umanisti. Dante: Inferno (IX.-XIX.). In jedem Semester 3 Schul- und 2 Hausarbeiten.

Englische Sprache: Aussprache; Formenlehre; Substantivum, Adjektivum, Adverb, Pronomen, regelmäßiges Verbum, starke Verba. Nach der Grammatik von Sonnenburg-Kellner, 4. Aufl., Lektion 1—30. Von Weihnachten bis Schluß des Jahres 6 Schularbeiten (Diktate, Beantwortung von Fragen, Umformungen, Nacherzählungen).

Geschichte (3 St.) **und Geographie** (1 St.): Römische Geschichte mit besonderer Hervorhebung der kulturhistorischen Momente (gekürzt). Geschichte des Mittelalters bis zum Beginne der Neuzeit. (Österreichische Geschichte besonders hervorgehoben.) Geographie. Allgemeine Übersicht Europas. Länderkunde Süd- und Westeuropas. Amerika und Australien.

Mathematik: *A*. Arithmetik: Potenzen und Wurzeln. Die Gleichungen des zweiten Grades mit einer (und leichteste mit mehreren) Unbekannten. Gleichungen höherer Grade, die

sich auf quadratische zurückführen lassen. Irrationale, imaginäre und komplexe Zahlen, soweit das Lösen jener Gleichungen auf sie führt. Graphische Darstellung der quadratischen Funktion und ihre Verwendung zur Auflösung quadratischer Gleichungen. Logarithmen. *B.* Geometrie: Planimetrie und Stereometrie. In jedem Semester 3 Schulaufgaben, außerdem kleine Hausübungen von Stunde zu Stunde.

Naturgeschichte: Botanik: Morphologie der Pflanzen, Grundzüge der Anatomie und Physiologie mit praktischen Übungen. Systematische Vorführung der wichtigeren Familien der Krypto- und Phanerogamen mit besonderer Hervorhebung der Nutzpflanzen.

Chemie: Geschichtliche Einleitung. Chemie der Metalloide, Entwicklung der wichtigsten neueren chemischen Theorien, die Metalle und ihre Verbindungen, mit Hervorhebung der technisch wichtigen. Entwicklung des periodischen Systems.

Darstellende Geometrie: Im engen Anschluß an den Unterricht in der IV. Klasse systematische Durchführung der Grundaufgaben der darstellenden Geometrie über Punkte, Gerade und Ebenen mittels Auf- und Grundriß unter gelegentlicher Benützung des Kreuzrisses oder anderer Seitenrisse. Anwendung dieser Konstruktionen zur Lösung zusammengesetzter Aufgaben, insbesondere zur Darstellung regelmäßiger Prismen und Pyramiden von vorgeschriebener Gestalt und Lage samt ihren Schatten, zur Ermittlung ebener Schnitte von Prismen, Pyramiden oder anderen ebenflächigen Körpern, ferner zur Aufsuchung der Durchdringungsfigur zweier solcher Körper in einfachsten Fällen.

Freihandzeichnen: Figurales Zeichnen. Der menschliche Kopf erklärt und gezeichnet nach guten Vorbildern und Gipsköpfen. Übungen in der Landschaftsmalerei. Skizzierübungen von Vorgeschrittenen im Freien nach der Natur.

VI. Klasse.

Katholische Religionslehre: Besondere Glaubenslehre. Die Gnade; die Sakramente. Die katholische Sittenlehre. Der letzte Grund des sittlich Guten. Das göttliche Gesetz. Die Pflichten und die evangelischen Räte. Das Gewissen. Tugend und Sünde. Pflichten des Christen gegen Gott, sich selbst und den Nächsten. Der Tod des Christen.

Deutsche Sprache: Literaturgeschichte: Von Lessing bis zu Schillers Tod. Gelesen nach dem Lesebuche: *a*) Lessing,

Herder, Sturm und Drang, Goethe bis 1805, Schiller. *b*) Zeitlich nicht gebundener Lesestoff: Proben moderner Prosa, Reden. Gelesen und besprochen wurden folgende Dramen: „Minna von Barnhelm", „Götz", „Egmont", „Die Räuber", „Maria Stuart", „Jungfrau von Orleans", „Wilhelm Tell". — Memorieren und Vortragen. Redeübungen. In jedem Semester 5 Aufsätze.

Französische Sprache: Grammatik: Übereinstimmung des participe passé; Gebrauch der Hilfsverba und der Tempora; Kasuslehre, Moduslehre. — Lektüre: Musterstücke erzählender Prosa und Fabeln. Choix de nouvelles modernes I (Reformausgabe) Velhagen und Klasing. Zwei Novellen als Privatlektüre. Wiedergabe des Gelesenen in französischer Sprache. In jedem Semester 4 Schularbeiten.

Italienische Sprache: L'ultimo periodo del Rinascimento: Nicolò Machiavelli storico e politico; Francesco Guicciardini. Lodovico Ariosto: lettura di gran parte dell'„Orlando Furioso" (ed. scol.); alcuni prosatori; G. Vasari, B. Cellini: la „Vita di se stesso" (ed. scol.). Torquato Tasso: lettura dell'„Aminta" e della „Gerusalemme liberata" (ed. scol.). La prosa e gli studi scientifici del Seicento: G. Galilei; la storia civile e religiosa: i predicatori; la satira e l'eroicomica nel Seicento; il Marini e il Secentismo. In jedem Semester 3 Schul- und 2 Hausarbeiten. (Siehe Abschnitt IV.)

Englische Sprache: Wiederholung der Formenlehre; unregelmäßige Verba; Partizip und Gerundium; Accus. cum infinitivo; Passivum; Anwendung der verschiedenen Zeiten. Nach der Grammatik von Sonnenburg-Kellner. Lekt. 28—41. — Lektüre leichterer Stücke aus dem Lesebuche von Nader und Würzner. Im Anschlusse Sprechübungen. Schriftliche Nacherzählung. In jedem Semester 4 Schularbeiten; Übersetzung aus dem Deutschen ins Englische.

Geschichte (2 St.) **und Geographie** (1 St.): Geschichte des Mittelalters seit dem Untergange der Staufer und der Neuzeit bis zum Wiener Kongreß mit spezieller Rücksicht auf die österreichisch-ungarische Monarchie und besonderer Hervorhebung der kulturgeschichtlichen Momente. Geographie: Länderkunde Nord-, Ost- und Mitteleuropas (mit Ausschluß der österreichisch-ungarischen Monarchie); Afrika und Asien.

Mathematik: *a*) Algebra: Logarithmische und Exponentialgleichungen. Arithmetische und geometrische Progressionen. Zinseszinsen- und Rentenrechnung. Lebensversicherungsaufgaben. — *b*) Geometrie: Goniometrie, ebene Trigonometrie, Stereometrie, sphärische Trigonometrie. 3 Schulaufgaben in jedem Semester; außerdem von Stunde zu Stunde kleine Übungsaufgaben.

Physik: Allgemeine Eigenschaften der Körper. Mechanik, Wärmelehre, Wellenlehre, Akustik.

Chemie: Einleitung zur organischen Chemie. Petroleum, Fettkörper, Verarbeitung der Fette, Kohlenhydrate, Gärung, Cyanverbindungen, aromatische Verbindungen. Bei der Entwicklung der neueren chemischen Theorien wurde besonders auf technisch wichtige Produkte Rücksicht genommen.

Naturgeschichte: Zoologie: Das Bemerkenswerteste über den Bau des Menschen und die Verrichtungen seiner Organe mit diätetischen Winken. Behandlung der Klassen der Wirbeltiere und der wichtigeren Gruppen der Wirbellosen auf Grund ihres äußeren und inneren Baues, mit gelegentlicher Rücksichtnahme auf entwicklungsgeschichtliche Verhältnisse und auf die lokale adriatische Fauna. Sezierübungen und mikroskopische Übungen.

Darstellende Geometrie: Darstellung des Kreises in Normalrissen, Schlagschatten auf Ebenen für Parallelbeleuchtung, Schrägriß des Kreises. Ableitung der konstruktiv wichtigsten Eigenschaften der als Normal- oder Schrägriß aufgefaßten Ellipse aus den entsprechenden Eigenschaften des Kreises. Darstellung von Zylindern und Kegeln (hauptsächlich Drehzylindern und Drehkegeln) und daraus zusammengesezten Körperformen auch im Schrägriß. Berührungsebenen an Kegel- und Zylinderflächen. Ebene Schnitte, Netze und leichtere Fälle von Durchdringungen dieser Flächen. Schattenkonstruktionen für Parallelbeleuchtung; Ableitung der konstruktiv wichtigsten Eigenschaften dieser Schnittlinien.

Freihandzeichnen: Zeichnen nach Köpfen in Hochrelief, nach Masken und Büsten, eventuell nach der Natur. Wiederholung und Fortsetzung des Stoffes aus den vorhergehenden Klassen. Aquarellmalerei und Federzeichnen. Stilleben.

VII. Klasse.

Katholische Religionslehre: Kirchengeschichte. Von dem Tode des letzten Apostels bis auf unsere Tage. Entwicklungsgeschichte der katholischen Glaubenssätze.

Deutsche Sprache: Lektüre: Einführung in das Verständnis der zweiten Blütezeit der deutschen Literatur (Fortsetzung) auf Grund der Lektüre prosaischer Schriftstücke und schwierigerer epischer und lyrischer Gedichte Lessings, Herders, Goethes und Schillers, sowie der Lektüre von Goethes „Hermann und Dorothea“ und „Iphigenie auf Tauris“, und

Schillers „Wallenstein“. Lektüre von Proben aus österreichischen Dichtern des XIX. Jahrhunderts. Im Anschlusse an die Lektüre Lebensbilder der genannten Hauptvertreter der klassischen Literatur und der hervorragendsten österreichischen Dichter, mit besonderer Berücksichtigung Grillparzers. Privatlektüre: „Die Braut von Messina“, „Das goldene Vlies“ und „Sappho“. Redeübungen. — Aufsätze: Im I. Semester 5, im II. 4 Aufsätze, abwechselnd Schul- und Hausarbeiten. (Themen siehe Abschnitt IV.)

Französische Sprache: Wiederholung des Gebrauches der Fürwörter. Gebrauch der Zeiten. Konjunktiv nach Verben und nach Konjunktionen. Bedingungssätze. Syntax des participe passé. Präsenspartizip und Verbaladjektiv. Infinitiv allein oder mit Präpositionen. Die Negation. Partizipialkonstruktion. Verkürzung der Nebensätze durch den Infinitiv. Übersetzungen ins Französische. — Lektüre längerer prosaischer Stücke und einiger Gedichte. Scribe, Le verre d'eau. — Im Semester 4 Schularbeiten.

Italienische Sprache: Storia dei primi tre secoli della letteratura. Le origini. Dante. Lettura dell'„Inferno“ e dei primi canti del „Purgatorio“. Francesco Petrarca. I cronisti; i novellieri: G. Boccaccio. — Il Quattrocento, gli Umanisti. Scrittori toscani; il Boiardo. — Im ersten Semester 6, im zweiten 4 schriftliche Arbeiten.

Englische Sprache: Englische Syntax: Artikel, Substantiv, Adjektiv, Pronomen, Präpositionen, Konjunktionen, nach der Grammatik von Sonnenburg-Kellner, Lektion 42 bis zum Schlusse. Übersetzungen ins Englische. Kursorische Wiederholung der Grammatik. Lektüre ausgewählter Stücke aus dem Lesebuche von Nader und Würzner. Workman: „The End of Santa Claus“; Morrison: „Aunt Sarah's Brooch“. Im Anschlusse Sprechübungen. Schriftliche Nacherzählung. — In jedem Semester 4 Schularbeiten.

Geschichte und Geographie*): Geschichte der Neuzeit vom westfälischen Frieden bis zur Gegenwart in derselben Behandlungsweise wie in der vorhergehenden Klasse und mit besonderer Rücksicht auf die österreichisch-ungarische Monarchie. Wiederholung der Geographie der österreichisch-ungarischen Monarchie mit Hinzufügung einer statistischen Übersicht der Rohproduktion, der Industrie und des Handels, wobei die entsprechenden Verhältnisse in den großen Kulturstaaten Europas zum Vergleiche herangezogen werden. Verfassung und Verwaltung der Monarchie, mit besonderer Berücksichtigung der österreichischen Reichshälfte.

*) Noch nach dem alten Lehrplane.

Mathematik: *A.* Algebra: Die Kombinationslehre: der binomische Lehrsatz; die Wahrscheinlichkeitsrechnung. *B.* Geometrie: Die sphärische Trigonometrie; die analytische Geometrie der Ebene. Wiederholung des gesamten Lehrstoffes der Oberklassen mittels zahlreicher Übungsaufgaben. 3 Schularbeiten in jedem Semester. Außerdem von Stunde zu Stunde Übungsaufgaben.

Physik: Astronomie, Magnetismus, Elektrizität, Optik.

Naturgeschichte: I. Semester: Mineralogie: Grundzüge der Kristallographie, Beschreibung der wichtigsten Minerale nach vorliegenden Exemplaren, mit besonderer Berücksichtigung der physikalischen und chemischen Eigenschaften, sowie ihrer Verwendung. II. Semester: Grundzüge der Geologie.

Darstellende Geometrie: Darstellung der Kugelfläche; ihre ebenen Schnitte; Berührungsebenen, berührende Zylinder- und Kugelflächen an Kugeln. Entwicklung der Selbst- und Schlagschatten an die konvexe und konkave Seite von Zylinder- und Kegelmänteln sowie von Kegelkalotten. Wiederholung der wichtigsten Partien aus dem behandelten Gebiete der darstellenden Geometrie an kombinierten Aufgaben und Beispielen.

Freihandzeichnen: Wiederholung und Fortsetzung des Stoffes aus den vorhergehenden Klassen und in voller Ausführung.

Religionsunterricht der evangelischen und israelitischen Schüler.

Evangelische Religion A. B.

I.—II. Klasse: Kurze Geschichte der evangelischen Kirche bis zur Neuzeit. Unterscheidungslehren. Kirchenlied.

III.—IV. Klasse: Bibelkunde des Alten Testamentes. Memorieren von Sprüchen und Kirchenliedern.

V.—VII. Klasse: Bibelkunde des Neuen Testamentes. Ausführliche Behandlung der Bergpredigt.

Evangelische Religion H. B.

I.—II. Klasse: Bibl. Geschichte des Alten Testamentes.

III.—IV. Klasse: Kirchengeschichte.

V.—VII. Klasse: Einleitung in das Alte Testament.

Mosaische Religion: I.—VII. Klasse:

Biblische Geschichte: Die Geschichte der Israeliten von der Schöpfung bis zur Emanzipation, mit spezieller Berücksichtigung der Juden in Österreich.

Hebräisch: Lesen, Grammatik, ausgewählte Bibelstellen.

Glaubens- und Pflichtenlehre: Wesen und Eigenschaften Gottes. Ritual- und Speisegesetze. Feier- und Fasttage. Pflichten gegen Gott, gegen den Nächsten, gegen sich selbst, gegen die Gemeinde und den Staat.

Turnen.

Freiübungen: In den unteren Klassen einfache Arm- und Beintätigkeiten, Rumpfbeugen, Gehen mit Armtätigkeiten, Holzstabübungen, Entwicklung der Ausfälle; in den oberen Klassen: Spreizübungen, Auslagen und Ausfälle, Schreiten und Hüpfen zu verschiedenen Schrittstellungen, Eisenstabübungen, Hantelübungen, Liegestützübungen, schwedische Übungen.

Ordnungsübungen: Unterklassen: Taktmarsch und Taktlauf, Einfache Reihungen, Kreisen, Schwenken, Drehen während des Gehens. Oberklassen: Schwenken in größeren Reihen, Staffeln, Aufzüge, Dauer- und Wettlauf.

Gerätübungen: Hoch- und Weitsprung mit Steigerung der Höhe, resp. der Weite in den oberen Klassen; Sturmhoch- und Fenstersprünge (IV.-VII. Kl.); die Vorübungen des Kletterns in der I. Klasse; das Klettern, Wander- und Wettklettern (II.-IV. Kl.).

Leitern: Auf- und Abwärtssteigen vor- und rücklings (I. und II. Kl.); an den wagrechten Leitern das Hangeln und Hangzucken (III., IV. Kl.), in den Oberklassen im Beugehang, der Spannhang, ferner an den schrägen Leitern die Liegestützübungen.

Reck: Streckhang, Hangeln, Hangstand; Felgabschwung (I., II. Kl.), Knie- und Felgaufschwung, Knieumschwung, Ellbogen- und Oberarmhang (III., IV. Kl.). In den Oberklassen schwierigere Übungsverbindungen der Übungen aus der Unterstufe, Sturzhang, die Dauerübungen, Felgüberschwung, Sitzwellen, Felg- und Knieaufschwung aus dem Hangschwingen, Recksprünge.

Barren: Sitzarten, Vorbereitung des Schwingens im Streckstütz, Überdrehen in einfacher Form (I., II. Kl.).

Schwingen im Stütz auch mit Beintätigkeiten, Liegestütz, Wende, Kehre, Flanke, Stützeln und Stützhüpfen (III., IV. Kl.). In den Oberklassen: Spreizen, Kreisen, Ein- und Ausgrätschen, Kippen, Stemmen.

Breit gestelltes Pferd: Spreizen, Kreisen, die Übersprünge und Geschwünge (V.-VII. Kl.).

Lang gestelltes Pferd: Grätsche, Hocke; Fechtersprünge (VI., VII. Kl.).

Bock: Grätsche, Flanke, Wende, Kehre, Hocke; in den Oberklassen mit Steigerung der Höhe des Bockes, resp. Steigerung der Entfernung des Sprungbrettes vom Bocke.

Tau: Vorübungen des Kletterns (I. Kl.), Klettern, Wander- und Wettklettern (II.-IV. Kl.), Überdrehen, Sturzhang (VII. Kl.).

Schaukelringe: Hangstand, Biegehang (II. Kl.), Schwingen im Beugehang, Kreisschwingen, Überdrehen (III. Kl.), Schwengel, Schwingen mit Halbdrehungen, Ellbogenhang (IV. Kl.); in den Oberklassen das Ringspringen, Knieaufschwung, Schwimmhang und Schwimmwelle, Dauerbeugehang.

Das Massentauziehen.

Relativ-obligate Gegenstände.

Italienische Sprache: (Siehe bei den Klassen II-VII).

Slowenische Sprache: (2 Kurse zu je 2 Stunden).

I. Kurs entfiel infolge der Einführung des obligaten Unterrichtes in den Landessprachen (siehe die Verfügungen der vorgesetzten Behörden).

II. Kurs: Vervollständigung der Formenlehre. Ausführliches über das Zeitwort. Das Wichtigste aus der Satzlehre. (Nach Janežič-Sket „Slovenska slovnica“.) Lektüre aus Skets „Slovenska čitanka“ III. Teil, für Mittelschulen. Monatlich 1 Schularbeit.

III. Kurs. Wiederholung der Lehre vom Zeitworte. Vervollständigung der Satzlehre. (Nach Janežič „Slov. slovnica“.) — Lektüre aus Skets „Slovenska čitanka“ IV. Teil, für Mittelschulen. Monatlich eine Schularbeit.

Freigegenstände.

Stenographie: (2 Kurse zu 2 Stunden.) I. Kurs: Wortbildungs- und Wortkürzungslehre. Diktate, bestehend aus einzelnen Wörtern oder einfachen Sätzen.

II. Kurs: Wiederholung der deutschen und der fremden Vor- und Nachsilben. Verbindung der Partikeln. Satzkürzung

an zahlreichen Sätzen geübt Diktate. Im ersten Semester Leseübungen unter Benützung von Weizmanns „Stenographisches Lesebuch“. Im zweiten Semester wurden die „Stenographischen Lesestunden“ zur Lektüre herangezogen.

Analytische Chemie: (2 Kurse zu 2 Stunden.) Korkbehandlung, Glasbehandlung. Untersuchung fester und flüssiger anorganischer Verbindungen. Lötrohranalyse. Maßanalyse. Analyse organischer Substanzen. Darstellung von Äthern, Estern, Chloral, Nitroprussidnatrium, Alkoholen, Milchzucker, Butter, Anilin, Traubenzucker, Azetaldehyd, Azetamid, Azeton.—Eiweißreaktionen, Nachweise verschiedener organischer Körper. — Molekulargewichtsbestimmung des Äthers. — Versuche über Sauerstoff, Kohlendioxyd, Wasserstoff, mit Knallgas und Leuchtgas. Spektroskopische Untersuchungen.

Wegen Zuweisung eines Arbeitsplatzes im Laboratorium müssen sich alle Schüler, sowohl jene, welche schon im Vorjahre gearbeitet haben, als auch jene, welche neu eintreten, mit Beginn des nächsten Schuljahres mit einer schriftlichen Erlaubnis ihrer Eltern bei dem Kustos melden.

Gesang: (1 Kurs zu 2 Stunden.) Grundbegriffe, musikalische Zeichen, Dauer und Wert der Noten, Taktarten, Intervalle, Dur-Tonleiter. Die menschliche Stimme, Aussprachelehre. Treffübungen, Einübung ein- und mehrstimmiger Lieder. Kirchenlieder.

In diesem Schuljahre wurde auch ein Männerchor (Oberrealschule) zusammengestellt, mit dem vierstimmige Männerchöre gesungen wurden. Unter Leitung des Gesanglehrers wurden auch Orchesterübungen abgehalten.

III.

Schriftliche Aufgaben aus der Unterrichtssprache in den oberen Klassen.

Themen der deutschen Aufsätze.

V. a Klasse. — 1. Ein Seesturm. (Nach Chamissos Gedicht Salas y Gomez.) (S.) — 2. Wirklichkeit und Phantasiegebilde in Goethes Erlkönig. (H.) — 3. Der Kampf im Wasgenwalde. (S.) — 4. *a)* Das Nibelungenlied, ein Lied der Treue. *b)* Kriemhild und Hagen. (H.) — 5. Der Streit des Achilles mit Agamemnon. (S.) — 6. Hüon erzählt, wie er seinen Auftrag in Bagdad vollführte. (S.) — 7. Wenn ich nicht wirke mehr, bin ich vernichtet. (S.) — 8. Die Macht des Gesanges. (S.) — 9. Die Bedeutung der Gebirge für den Menschen. (H.) — 10. Not entwickelt Kraft (S.)

V. b Klasse. — 1. Bertran de Born vor und nach dem Tode seines Freundes. (S.) — 2. Wirklichkeit und Phantasiegebilde in Goethes Erlkönig (H.) — 3. G. Julius Cäsar. (Eine Charakteristik.) (S.) — 4. *a)* Das Nibelungenlied, ein Lied der Treue. *b)* Kriemhild und Hagen. (H.) — 5. Die Zeiten ändern sich, mit ihnen die Menschen. (S.) — 6. Warum wirkt Siegfrieds Tod so erschütternd? (S.) — 7. Wenn ich nicht wirke mehr, bin ich vernichtet. (H.) — 8. Sich selbst besiegen ist der schönste Sieg. (S.) — 9. Die Bedeutung der Gebirge für den Menschen. (H.) — 10. Die Vorteile einer großen Stadt. (S.)

VI. Klasse. — 1. Die Exposition des Lustspiels „Minna von Barnhelm“. (S.) — 2. *a)* Mein Interesse an der Entwicklung der Luftschiffahrt. *b)* Gedanken und Gefühle eines Auswanderes beim Verlassen der Heimat. (H.) — 3. *a)* Goethes „Götz von Berlichingen“ als Zeitbild betrachtet. *b)* Götz von Berlichingen (Charakteristik). (S.) — 4. Die Schiffahrt einst und jetzt. (H.) — 5. *a)* Durch welche Charaktereigenschaften erregt Egmont unseren Anteil? *b)* Was ich am liebsten lese. (S.) — 6. Verdient Karl Moor unsere Bewunderung? (S.) — 7. Des Menschen Seele gleichet dem Wasser. (H.) — 8. Arbeit erzieht. (Nachgewiesen an Bornier's Novelle „Comment on devient beau“.) (S.) — 9. Gedenkrede an Schillers Todestage. (H.) — 10. *a)* Was unten tief dem Erdensohne —

Das wechselnde Verhängnis bringt, — Das schlägt an die metallne Krone, — Die es erbaulich weiterklingt. *b)* Drum soll der Sänger mit dem König gehen, — Sie beide wohnen auf der Menschheit Höhen. (S.)

VII. Klasse. — 1. Es ist die Rede dreierlei: Ein Licht, ein Schwert und Arzenei. (S.) — 2. Die Ringparabel bei Boccaccio und Lessing. (H.) — 3. Isabella als Fürstin und Mutter. (S.) — 4. Wie sah das Städtchen aus, in dem Hermann wohnte? (H.) — 5. Wallensteins letzter Tag. (S.) — 6. *a)* Schuld und Rache in Grillparzers Trilogie „Das goldene Vlies". *b)* Was unsterblich im Gesang soll leben, Muß im Leben untergehen. (H.) — 7. Goethe in Straßburg. (S.) — 8. Welche Steigerung erfährt die Seelenstimmung Sapphos in ihrem Glauben an die Untreue Phaons. (H.) — 9. Lust und Liebe sind die Fittiche zu großen Taten.

Themen für die deutschen Redeübungen.

VII. Klasse — Die Ahnfrau (Adamič). — Egmont (Bolaffio). — König Ottokars Glück und Ende (Gerolimich Johann). — Bruderzwist im Hause Habsburg (Pollovich). — Hamlet. (Monico). — Istriens Land und Volk (Gerolimich Engen). — Über die Enstehung der Oper (Kintz). — Macbeth (Dell' Oglio). — Kometen und Meteore (Kastelic).

Italienische Themen.

V. Klasse. — Morte dell'Innominato. — Una fiaba. — Ricordando un caro morto. — La buca delle lettere. — Una bella vetrina. — Una lezione di disegno. — Con le maschere. — Marco Polo. — I golosi (Dante, Inferno VI.). — La vita del mare. — La vita nel bosco.

Redeübungen: Giotto (O. Devescovi). — Arte romana a Trieste (O. Devescovi). — I Medici (R. Fonzari). — L'anello del Nibelungo (O. Ierkich). — Novelle di E. de Amicis (G. Luzzatto). — Il Trecento a Trieste (E. Morpurgo). — In memoria di E. Salgari (E. Morpurgo). — I Visconti (M. Perlmutter). — Cola di Rienzo (G. Reiss). — Marco Polo (P. Pavanello). — Le origini della repubblica veneta (P. Pavanello). — Vita di G. Rossini (S. Rittmeyer).

VI. Klasse. — Tristezze autunnali. — La pazzia d'Orlando. — Una visita ai quartieri poveri della città. — Dall'Italienische Reise di V. Goethe (traduz.). — Una giornata di gennaio. — Olindo e Sofronia. — Rinaldo. — Tirsi. — Sulla

nave di Colombo. — La bottega dell'antiquario. — Gioventù senza entusiasmi.

Redeübungen: Recitazione di brani del dramma pastorale di T. Tasso: *Aminta.*

VII. Klasse. — La nostalgia amareggia la vita dell'esule. — Che cosa ci dicono i morti? — Il primo viaggio d'un giovane. — Buona testa, cattivo cuore; buon cuore, cattiva testa. — La pubblica beneficenza a Trieste. — Lo scolaro ideale. — La bolgia dei barattieri. — Elogio della scienza

Redeübungen: Antonio Fogazzaro (F. Motka.) — Trieste medioevale (Dell'Oglio).

IV.

Die Lehrmittel.

I. Lehrer-Bibliothek.

Kustos: Professor **Horatius Chizzola**.

1. Zuwachs durch Ankauf:

Österreichische Bürgerkunde, Wien 1910, 2 Bände. — Haberland, Pflanzenanatomie, 1910. — Schmeil, Lehrbuch der Zoologie, 1910. — Nimführ, Leitfaden der Luftschiffahrt, 1910. — Dr. E. von Lauppert, Jahrbuch des höheren Unterrichtswesens, 1911. — Fehling, Handwörterbuch der Chemie (Fortsetzung), 1911.

2. Zeitschriften:

Österreichische Rundschau, 1911. — Zeitschrift für das Realschulwesen, 1911. — Zeitschrift für den französischen und englischen Unterricht, 1911. — Germanisch-romanische Monatsschrift, 1911. — Mitteilungen und Abhandlungen der k. k. geographischen Gesellschaft, 1911. — Geographische Zeitschrift, 1911. — Österreichische Blätter für Stenographie und Stenographische Lesehalle, 1911. — Deutsche Kunst und Dekoration. 1910-1911. — Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht, 1911. — Mikrokosmos, 1911. — Naturwissenschaftliche Rundschau, 1911. — Historische Zeitschrift, hgg. von Fr. Meinecke, 1911.

3. Geschenke:

Von der k. k. geologischen Reichsanstalt in Wien, Verhandlungen, 1911. — Vom k. k. maritimen Observatorium: Telegramma meteorologico. — Von der Direktion der Anstalt: Neuer deutscher Novellenschatz, hgg. von P. Heyse und L. Laistner (24 Bände) und Beiträge zur neueren Philologie. Jakob Schipper zum 19. Juli 1902 dargebracht. — Von der Schülerbibliothek der Anstalt: Minckwitz, der Tempel, Die Mythologien der vorzüglichsten Kulturvölker. — Vom Munizipium der Stadt Triest: Bollettino statistico mensile. — Von der Handelskammer in Triest: Statistica della navigazione e del commercio marittimo nei porti austriaci per l'anno 1909. — Navigazione e commercio di Trieste nel 1909.

II. Historisch-geographische Lehrmittelsammlung.

Kustos: **Hans Bernt,** k. k. Professor.

Zuwachs durch Ankauf:

1 Wandkarte von Palästina (zur Zeit der bibl. Geschichte). — 1 Wandbild (Lehmann), Tempel zu Jerusalem zur Zeit Christi.

Zuwachs durch Schenkung:

24 photographische Aufnahmen von Ausgrabungen in Algier, geschenkt von Herrn Ferdinand Weithofer; 1 Wandbild in Glas und Rahmen: Szene aus der Schlacht bei Waterloo (Schüler Fred Jegher, III. *a* Kl.); 4 kleinere Wandbilder in Glas und Rahmen (Schüler Kreiner Ferdinand, IV. *b* Kl.); als Geschenk der Schüler der III. *a* Klasse und ihres Klassenvorstandes: 3 neue Geschichtsbilder; 2 Wollensack, Formen der Erdoberfläche; 2 Gerasch-Pendl, Geogr. Charakterbilder, 5 Wandbilder: Hervorragende Bauwerke Österreichs; 2 histor. Wandbilder (Bolaffio, VII. Kl.); 1 Urkunde auf Pergament mit Siegel in Kapsel (Schäfer Hans, III. *a* Kl.).

III. Münzensammlung.

Kustos: Dr. **Karl Tertnik,** k. k. Professor.

Zuwachs durch Schenkung:

Aetius Bolaffio, VII. Kl., 1 argentinische Papiernote (Wert 1 Peso).

Stand: 515 Münzen und Medaillen, 10 Papiernoten.

IV. Schülerbibliothek.

Kustos: Dr. **Richard Hassfurther,** k. k. Professor.

a) Deutsche Abteilung:

Aus der „Goldenen Klassikerbibliothek“: Grillparzer, Hebbel, H. v. Kleist, Lenau, Mörike, Shakespeare. — Das Neue Universum, Bd. 31. — Gaudeamus: XIII. Jahrgang. — Kameradbibliothek: Max Felde, Villa Biberheim; Richard Schott, Die Buschläufer; Max Kern, Im Labyrinth des Ganges. — Max Eyth, Der Kampf um die

Cheopspyramide. — Aus „Wissenschaft und Bildung“: Biographien von Rousseau, Lessing, Kleist, Wagner, Beethoven, Mozart; Die Elektrizität. — Dickens, David Copperfield, Die Pickwickier. — Aus Freytags Sammlung französischer und englischer Schulausgaben: Mark Twain, Tom Sawyer; Shakespeare, Julius Cæsar; Hughes, Tom Brown; Dickens, The Cricket on the Hearth; H. Saure, Englisches Lesebuch, I.—III. Teil, in 4 Exemplaren. — Aus „Natur und Geisteswelt“: Biographien von Hebbel, Gerh. Hauptmann, Dürer, Rembrandt; Romantik, Deutsches Drama, Shakespeare und seine Zeit; Licht und Farben, Sichtbare und unsichtbare Strahlen, Lehre von der Wärme, Physik der Kälte, Entwicklung der Eisenbahnen, Funkentelegraphie, Das Automobil, Beleuchtungsarten der Gegenwart, Mensch und Erde, Mathematische Spiele. — Kauffmann, Das Radium; Sieberg, Wetterbüchlein; Schurig, Hydrobiologisches und Plankton-Praktikum; Meyer, Bewohnte Welten.

b) Italienische Abteilung:

Jolanda Bencivenni, Duemila anni fa; De Amicis, Alla gioventù; Förster, Alle soglie della maggior età; Lipparini, Satanello; Yambo, Le avventure del capitano Bombax; Capuana, Cardello; De Gasperi, Il racconto del piccolo vetrajo; Ferrari, Il ridicolo; Fucini, Le veglie di Neri; Fucini, All' aria aperta; Gherardi del Festa, Oro ed orpello; Giacosa, Novelle e paesi Valdostani; Stoppani, Il bel paese; Salgari, Il figlio del Corsaro Rosso; Salgari, Le meraviglie del Duemila; Salgari, Un dramma sull'Oceano Pacifico; Salgari, Storie rosse.

c) Slowenische Abteilung:

Zvonček, l. 1910 u. 1911. — Mladinska knjižica, 1. u. 2. zvezek (Brinar i. Troit). — Knjižica za mladino (št. 29, Oblokar in št. 30, V srca globini). — Knjižica družbe sv. Cirila in Metoda (XII. zv. Franc Jožef I, XIII. zv. Andrej baron Čehovin). — Stritar, Jagode, Lešniki, Zimski večer. — Kragelj, Ilijada.

V. Physikalisches Kabinett.

Kustos: Professor **Johann Rajakowitsch.**

Zuwachs durch Ankauf:

Apparat für Versuche über freie Achsen, über Trägheitsmoment etc. Druckpumpe und Saugpumpe aus Glas. Glasrohr zur Demonstration der Wasserheizung. 3 Kaleidoskope.

3 Vakuumröhren nach Tesla. 1 Schattenkreuzrohr. 2 Cupron-Elemente. 1 Rohr mit fluoreszierender Substanz. 1 Turmalinzange. Kartesianischer Taucher. Dampfkolben nach Papin. Vervielfältigungsapparat. Wasserzersetzungsapparat nach Hofmann.

Zuwachs durch Schenkung:

Die Sammlung von Wandtafeln erfuhr eine Bereicherung durch folgende Schülerzeichnungen: 1. Die Wimshurst'sche Elektrisiermaschine (Dall'Olio, VII.). 2. Der Newton'sche Reflektor (Jensen, VII.). 3. Die Bahnen für obere und untere Planeten (Kastelic, VII.). 4. Schematische Darstellung der Wechselstrom- und Gleichstrommaschinen und die Schaltungen der letzteren (Pontoni, VII.). 5. Das Sehen des Kurz- und Weitsichtigen mittels Brillen (Rizzardi, VII.). 6. Die Kopernikanische und Kepler'sche Weltansicht (Saul, VII.); Skok schrieb die Erklärung zu der sub 4 angeführten Tafel. 7. Übersichtliche Darstellung der Versuche mittels der Atwood'schen Fallmaschine (Meischer, IV *b*.). Kleinere Zeichnungen lieferten noch Kastelic, Rizzardi (VII.), Tomažič (IV. *b*). 8. Elektrostatik (Kirschner, III. *a*). 9. Galvanismus (Gruden, III. *a*).

Auch wurde die Apparatensammlung vermehrt durch Apparate, die von Schülern selbst angefertigt wurden: Rahmen für Diapositive (Adamič, VII.), Photometer nach Rumford (Pollovich), 2 Apparate zur Veranschaulichung der heliozentrischen Weltansicht (Tomšič, IV. *b*). Zoerrer (VII.) und Pertot (IV. *b*) schenkten dem Kabinette mehrere Diapositive.

Den genannten Schülern, sowie allen jenen Schülern, welche den Kustos in den Arbeiten unterstützten, wird bestens gedankt.

VI. **Kabinett für Chemie.**

Kustos: Professor **Leopold Höß.**

Zuwachs durch Ankauf:

Verbrauchsgeräte und Chemikalien.

Der Kustos spricht den Schülern Bousquet (VI.), Fonzari und Prašelj (V.), Rebech und Krischmann (IV.) für die von ihnen geleistete Hilfe seinen Dank aus.

VII. **Naturhistorisches Kabinett.**

Kustos: Professor **Augustin Kofler.**

Zuwachs durch Ankauf:

Aufbau des natürlichen Pflanzensystems, Trockenpräparat des Karpfen, Naphthagruben und Tiefbohrung auf Erdöl in

Boryslav (3 Bilder), Anatomie des Frosches, Schädliche Pilze unserer Kulturgewächse. Modell des Maikäfers, 3 zoologische Wandtafeln von Schmeil, Vom Bau und Leben des Baumes (Modell).

Zuwachs durch Schenkung:

Kleinere Gegenstände spendeten Professor Bernt, die Schüler Bednar (II. *a*), Sedlar (II. *b*), Waller (II. *b*), Schleimer (II. *b*), Picinich (IV. *b*).

An der Herbeischaffung der für den Unterricht erforderlichen Pflanzen beteiligten sich insbesonders die Schüler: Demark (V. *a*), Bednar, Cotič (II. *a*), Samt, Pachernigg (II. *b*), Zadnik (I. *a*), Persoglia, Ciak, Ferluga (I. *b*).

VIII. **Kabinett für Geometrie.**

Kustos: Professor **Anton Stephanides**,

Zuwachs durch Ankauf:

Säulenbasis als praktische Anwendung der Durchdringungen. Satteldach mit zwei Walmen aus Blech mit umlegbaren Flächen. Terrain mit Schichtenlinien und Verschneidungen.

IX. **Kabinett für Freihandzeichnen.**

Kustos: Professor **C. Emptmeyer.**

8 Original Handzeichnungen von Professor Rudolf Hlawaty; 43. Folge: 8 altertümliche Gefäße in Bronzenachahmungen.

Allen Spendern von Lehrmitteln wird hiemit der beste Dank abgestattet.

Aufwand für die Lehrmittel.

Normale Dotation.

Da die Anstalt in diesem Schuljahre wieder 7 Stamm- und 6 Parallelklassen besaß, steht ihr kraft der Minist.-Verord. vom 14. Juni 1878, Zl. 9290, als Lehrmitteldotation pro Solarjahr 1911 der Betrag von 1480 K zur Verfügung.

Obiger Betrag wurde durch die eigenen Einnahmen der Direktion nicht nur erreicht, sondern noch bedeutend überschritten. Diese waren nämlich folgende:

I.	Aufnahmstaxen à K 4·20 von 129 neu aufgenommenen Schülern	K 541·80
II.	Lehrmittelbeiträge von 531 Schülern	„ 1576·50
III.	Taxen für Semestralzeugnis-Duplikate von 9 Schülern à 4 K	„ 36·—
IV.	Spenden, u. zw. vom Privatisten Praximadi der VI. Klasse für das physik. Kabinett. . . .	„ 40·—
	vom ehemaligen Schüler Chistè für den gleichen Zweck	„ 20·—
		K 2214·30
	Davon ab ein Passivrest ex 1910.	„ 165·57
		K 2048·73

Gemäß der oben zitierten Minist.-Verord. steht der Überschuß von K 568·73 gleichfalls der Anstalt zur Verfügung.

V.

Unterstützungswesen.

Allgemeiner Unterstützungsfond.

1. Einnahmen:

a) Barrest aus dem Jahre 1909-10:	K	154·94
b) Spenden der Maturanden von 1910, u. zw. Graf 20 K, Bunzel und Sepilli je 10 K, Cleva, Godnig, Rocco, Schussnig, Ukmar je 5 K, Benčina, Petutschnig je 4 K, Sigon 3 K, Blessich, Muck, Petris, Vadnjal je 2 K, Castelluber, Cernigoj, Mayer je 1 K, zusammen	„	87·—
c) Eine anonyme Spende	„	36·—
d) Restbetrag aus einer Kranzspende für Prof. Hlawaty von Schülern der I. *a* und II. *b* Klasse	„	9·52
e) 6 Coupons à 4·20 K (je 3 vom 1. August 1910 und 1. Februar 1911)	„	25·20
2 Coupons à 4 K vom 1. November 1910 und 1. Mai 1911	„	8·—
1 Coupon vom 1. März 1911	„	4·—
f) Aus dem Ergebnis der Schüler-Akademie im Betrage von K 349·20 wurden K 220 für den Ankauf eines Harmoniums bestimmt, der Rest dem Unterstützungsfond gewidmet	„	129·20
Summe der Einnahmen . . .	K	453·86

2. Ausgaben:

a) Ankauf eines Staatspapiers à K 200 mit Coupons vom März und September	K	187·06
b) Unterstützungen für Premru III. *b*, und Ferfoglia I. *b* à 20 K	„	40·—
In die Postsparkasse eingelegt auf das Einlagebuch Nr. 2,068.118	„	226·—
Barrest	„	—·80
Summe der Ausgaben . . .	K	453·86

3. Vermögensstand am Ende des Schuljahres 1910/11:

4 Staatspapierrenten à 100 fl., 3 mit Coupons vom Februar und August und 1 vom Mai und November	K	800·—
1 Staatspapier à K 200 mit Coupons vom März und September	„	200·—
Einlagebuch der Postsparkasse Nr. 2,068.118 mit einer Einlage von	„	330·08
Barrest	„	—·80
Zusammen	K	1330·88

Georgstiftung.

Einnahmen:

1. Barrest aus dem Vorjahre	K	16·04
2. Zinsen vom 1. November 1910	„	190·—
„ „ 1. Mai 1911	„	190·—
Summe der Einnahmen	K	396·04

Ausgaben:

a) Ankauf von Schulbüchern, u. zw. 60 deutsche Lesebücher (2., 3. u. 4. Teil), 35 Lehrbücher der Geschichte f. d. unteren Klassen, 12 Lehrbücher der Geographie f. d. V. und VI. Klasse, 5 Lehrbücher der Vaterlandskunde f. d. VII. Klasse, 12 Lehrbücher der Chemie und 10 Lehrbücher der darstell. Geometrie	K	345·24
b) Ankauf neuer Reißbretter	„	30·60
c) Ausbessern alter Reißbretter	„	16·—
d) Ausgaben für Porti, eine Stampiglie u. a.	„	4·20
	K	396·04

Spenden:

Von der Verlagsbuchhandlung F. H. Schimpff in Triest 47 Schmeil-Scholz, Tierreich, 18 Schmeil-Scholz, Zoologie f. d. VI. Klasse;
von der Verlagsbuchhandlung F. Deuticke in Wien 14 Schiffner, Lehrbuch der Geometrie;
vom k. k. Schulbücherverlage 15 Jelinek-Pollak-Streinz, Deutsches Lesebuch, VI.;
von der Verlagsbuchhandlung Manz in Wien 8 Mandl, Geometrie und Übungsaufgaben;
vom Schüler Schlechta, IV. b, 2 Lehrbücher.

Marco-Brunner-Stiftung.

Einnahmen:

a) Rest aus dem Vorjahre	K	74·60
b) Zinsen vom 1./11. 1910 und 1./5. 1911 . . .	„	80·—
Summe der Einnahmen . . .	K	154·60

Ausgaben:

Geldaushilfe für 3 arme Schüler der I. Klasse als Beitrag zur Zahlung des Schulgeldes (Statth.-Erl. vom 24. Februar 1911, Z. VII—427-11), u. zw. Kukanja und Maichin der I. a je K 40, Ferfoglia der I. b K 30, zusammen	K	110·—
In die Postsparkasse eingelegt (Einlagebuch Nr. 2,068.117)	„	44·—
Summe der Ausgaben . . .	K	154·—
Barrest . . .	„	—·60
Im Einlagebuch am Ende des Schuljahres . .	„	107·04
Verfügbar pro 1911/12 . . .	K	107·64

VI.

Maturitätsprüfung.

Mündliche Prüfungen im Sommer und Herbst 1910.

Vorsitzender der Prüfungskommission im Sommertermin und im Herbsttermin 1910: Herr Landesschulinspektor Dr. Robert Kauer.

Im Sommertermin (1., 2., 3. Juli) wurden 18 öffentliche Schüler dieser Anstalt für „reif“ erklärt, davon 3 mit Auszeichnung, 8 mit Stimmeneinhelligkeit, 7 mit Stimmenmehrheit. Reif erklärt wurden: Benčina Anton, Blessich Tullius, Bödtker Egon, Bunzel Arnold, Castelluber Johann, Cernigoi Karl, Covatz Sergius (Ausz.), Graf Friedrich (Ausz.), Mayr Otto, Muck Bruno, Oeser Richard, Petris Ernst (Ausz.), Petutschnigg Guido, Schussnig Bruno, Sigon Karl, Ukmar Karl, Vadnjal Marius, Seppilli Icilius. Im Septembertermin wurden 5 Abiturienten für reif erklärt, davon 1 mit Stimmeneinhelligkeit und 4 mit Stimmenmehrheit: Caligaris Oskar, Cleva Ernst (Extern.), Godnig Alfred, Mayer Ferdinand (Extern.), Rocco Italus.

Statistische Daten.

	Öffentliche Schüler	Privatisten	Externe
Ergebnis:			
Zur Prüfung haben sich gemeldet	22	—	3
Während der Prüfung traten zurück	1	—	1
Mit Auszeichnung reif	3	—	—
Mit Stimmeneinhelligkeit reif	9	—	—
Mit Stimmenmehrheit reif	9	—	2
Zur Wiederholungsprüfung zugelassen im Februar	—	—	—
Die Wiederholungsprüfung bestanden	—	—	—
Reprobiert	—	—	—
Lebensalter der reif Erklärten: *(am 1. September).*			
Mit 16 Jahren	2	—	—
„ 17 „	6	—	—
„ 18 „	9	—	—
„ 19 „	2	—	—
„ 20 „	1	—	—
„ 21 „	1	—	—
„ 22 „	—	—	—
„ 23 „	—	—	1
„ 24 „	—	—	—
„ 25 „	—	—	1
Gewählter Beruf:			
Technische Hochschule	12	—	—
Universität	2	—	—
Beamter (Eisenbahn, Finanz etc.)	6	—	—
Handel	1	—	—
Militärische Laufbahn	—	—	1
Unbestimmt	—	—	1

Schriftliche Reifeprüfung im Jahre 1911.

Sommertermin: 7. bis 10. Juni.

Zur Reifeprüfung meldeten sich 37 öffentliche Schüler der VII. Kl. und 4 Externisten. Wegen Krankheit zog sich ein öffentlicher Schüler vor Beginn der schriftlichen Prüfungen zurück.

Themen.

Deutsch: 3 Themen zur Auswahl.

1. Treu jedem Wort, das Mann dem Manne gab,
   Treu jeder Wahrheit, die mit uns geboren,
   Dem Lande treu, das Wiege uns und Grab,
   Dem Kaiser treu, dem wir den Eid geschworen.
   (Franz Grillparzer.)
2. Der Aufschwung des Verkehrswesens in der Gegenwart. —
3. Wilhelm Tell und Johann Parricida. (Ein Vergleich.)

Französisch: H. Martin, Vercingétorix.

Italienisch: 3 Themen zur Auswahl:

1. I giovani sono per solito detti „speranze della patria“. Quali cose stimano essi che la patria possa aspettare da loro?

2. L'elettricità da Alessandro Volta a Guglielmo Marconi.

3. Importanza economica dei gruppi di regioni della Monarchia austro-ungarica.

Englisch: Eine Übersetzung des Stückes: "The Burning of Moscow" by J. T. Headley.

Darstellende Geometrie:

1. Die Basis einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide liegt in P_1, die Seitenkante ist dreimal so lang als die Basiskante. Man zeichne die Bilder der Pyramide und bestimme ihre Schnittfigur mit einer doppelt geneigten Ebene, deren erste Spur parallel zu einer Basiskante liegt und welche 30^0 zu P_1 geneigt ist. Ebenso ist auch das Netz des Pyramidenstutzes zu zeichnen. (Halbmesser des Umkreises der Basis 4 *cm*.)

2. Man führe die Schattenkonstruktionen an der Durchdringung zweier kongruenter Rotationszylinder durch, deren Achsen sich rechtwinklig schneiden und halbieren. Der eine Zylinder steht auf P_1 senkrecht, die Achse des anderen ist 30^0 zu P_2 geneigt. (Halbmesser der Grundflächen 3 *cm*, Höhe 9 *cm*, λ_1 und λ_2 schließen mit $\overset{1}{X}\overset{2}{}$ Winkel von 45^0 ein.)

3. Es sind ein Dreieck $a\,b\,c\,[a\,(\Theta, 8, 16), b\,(11, \Theta, 11), c\,(5, 8, \Theta)]$ und eine Kugel mit dem Mittelpunkte $m\,(5, 6, 6)$ und dem Halbmesser $r = 5\,cm$ gegeben. Man suche den Schnitt des Dreieckes mit der Kugel und trenne das Sichtbare von dem Gedeckten.

VII.

Chronik.

1. Gleich zu Beginn des laufenden Schuljahres trat ein für die Anstalt bedeutungsvolles Ereignis ein, indem ihr Leiter nach langer, verdienstvoller Tätigkeit aus seiner Stellung schied. Die vom Direktor Schulrat Justus Hendrych erbetene Versetzung in den dauernden Ruhestand haben Seine k. u. k. Apostolische Majestät mit Allerhöchster Entschließung vom 6. September 1910 allergnädigst zu genehmigen und demselben aus diesem Anlasse taxfrei den Orden der Eisernen Krone III. Klasse huldvollst zu verleihen geruht. (K. U. Min.-Erl. vom 13./9. 1910, Z. 38869 — Statth.-Erl. vom 19./9. 1910, Z. VII.-864-1-10). Die k. k. Statthalterei beglückwünschte unter einem den scheidenden Direktor und sprach ihm für „seine langjährige und ersprießliche Dienstleistung den wärmsten und aufrichtigsten Dank aus". In der Eröffnungskonferenz vom 17. September 1910 brachte der Senior, Professor A. Stephanides, dem Direktor die Glückwünsche des Lehrkörpers zu der Allerhöchsten Auszeichnung dar und gab der Freude darüber Ausdruck, daß seine mühevolle und erfolgreiche Arbeit im Dienste der Schule nunmehr die volle Würdigung gefunden habe.

Schulrat Direktor Justus Hendrych wurde mit Allerhöchster Entschließung vom 18. September 1894 als Nachfolger des Schulrates Libor Peiker zum Direktor der Staatsrealschule in Triest ernannt. Unter seiner Leitung nahm die Anstalt einen großen Aufschwung. Die Schule, die bei seinem Amtsantritte von 278 Schülern in 9 Klassen besucht war, zählte bei seinem Scheiden 486 Schüler in 13 Klassen. Diese steigende Frequenz ist außer der allgemeinen Entwicklung der Realschulen unzweifelhaft auch dem fachmännisch hervorragenden Wirken Direktor Hendrychs in hohem Maße zuzuschreiben. Brachte er doch für die philologische wie für die realistische Seite dieser Bildungsanstalt gleich reiche Erfahrung und tiefes Verständnis mit, die er in seltenem Pflichteifer und unermüdlicher Arbeitskraft in den Dienst der von ihm geleiteten Schule stellte.

Dem Lehrkörper wird der scheidende Direktor als wohlwollender Berater, Förderer und Freund stets in dankbarer Erinnerung bleiben. Für die gesamte Schülerschaft hegte er stets ein väterliches Wohlwollen, so daß gewiß sowohl die gegenwärtigen als auch die ehemaligen Schüler der Anstalt ihn in dankbarem Gedächtnis behalten werden.

Am 22. Oktober 1910 fand eine Abschiedsfeier des Lehrkörpers zu Ehren des Direktors statt, bei der diese Empfindungen zum vollen Ausdruck kamen. Professor Stephanides begrüßte Schulrat Hendrych bei seinem Erscheinen, worauf Professor Dr. Hassfurther in längerer Rede die großen Verdienste des scheidenden Direktors hervorhob und ihm zum Zeichen freundschaftlicher Anhänglichkeit die zu einem Tableau vereinigten Bildnisse der Mitglieder des Lehrkörpers überreichte, für welche Aufmerksamkeit Schulrat Hendrych in bewegten Worten dankte.

* * *

Mit dem obenzitierten Statthaltereierlasse wurde Professor A. Stephanides mit der provisorischen Leitung der Anstalt bis zur Ernennung des Direktors betraut. Mit Allerhöchster Entschließung vom 5. März 1911 (K. U. Min.-Erl. vom 8./3. 1911 = Statth.-Erl. vom 21./3. 1911, Z. VII-846-21 ex 1910) wurde der Professor an der Staatsrealschule im VI. Bezirke in Wien, Dr. Artur Brandeis, zum Direktor der Anstalt ernannt. Dem Professor Stephanides wurde mit Erlaß vom 22./4. 1911, Z. VII-846-22, ex 1910, von Seiner Durchlaucht dem Herrn Statthalter „der wärmste Dank für die Umsicht und den besonderen Pflichteifer ausgesprochen, mit welchen er die interimistische Leitung der Anstalt führte".

2. Der wirkliche Lehrer Dr. Ludwig Lusner wurde auf die Dauer des Schuljahres 1910-11 dem Franz Josef-Realgymnasium in Wien zur Dienstleistung zugewiesen (K. U. Min.-Erl. vom 21./9. 1910, Z. 39656 = Statth.-Erl. vom 20./11. 1910, Z. VII-1334/2-10) und zu seiner Vertretung der Supplent Hermes Fezzi bestellt (Statth.-Erl. vom 11./10. 1910, Z. VII-1426-10). Die bereits im Vorjahre in Verwendung gestandenen Supplenten Martin Kuhla, Dr. Karl Pirjevec, Andreas Verbich und Karl Pirker, letzterer auch als Assistent für geometrisches Zeichnen, wurden neuerdings in gleicher Diensteseigenschaft bestätigt (Statth.-Erl. vom 30./9. 1910, Z. VII-1275/2-10), ebenso wurde Konsistorialrat Heinrich Šonc durch Statth.-Erl. vom 10./10. 1910, Z. VII-395-1-10, wieder als Aushilfsreligionslehrer bestellt. Ebenso wurde Gesangslehrer Alois Pfurtscheller wieder verwendet (Statth.-Erl. vom 7./10. 1910, Z. VII-1387-10). Sebald Riedel und Josef Prachner wurden, der erstere mit Statth.-Erl. vom 7./10. 1910, Z. VII.-1388-10, der letztere mit Statth.-Erl. 26./10 1910, Z. VII-1441-10, zu Turnsupplenten ernannt, nachdem der wirkliche Turnlehrer der Staatsrealschule in Plan, Artur Schlaegel, welcher der Anstalt für die Dauer des Schuljahres 1909-10 zur Dienstleistung zugewiesen war, eine Stelle gleicher Kategorie an der Staatsrealschule in Bozen erhalten hatte. Der wirkliche

Lehrer Dr. Richard Hassfurther wurde durch Statth.-Erl. vom 29./10. 1910, Z. VII-1540-10, im Lehramte definitiv bestätigt und ihm der Titel „Professor" zuerkannt. Der geprüfte Supplent Hermes Fezzi wurde dem Professor H. Chizzola zur Einführung in die lehramtliche Tätigkeit zugewiesen (Statth.-Erl. vom 3./11. 1910, Z. VII.-1555-10). Dem Schuldiener Andreas Castelluber wurde mit Statth.-Erl. vom 25./11. 1910, Z. 2033/I, die Ehrenmedaille für 40jährige treue Dienstleistung verliehen, welche ihm der Leiter Professor Stephanides in Gegenwart des Lehrkörpers mit einer Ansprache überreichte. Supplent Sebald Riedel wurde zum wirklichen Turnlehrer an der Anstalt ernannt (K. U. Min.-Erl. vom 31./12. 1910, Z. 46332 Statth.-Erl. vom 14./1. 1911, Z. VII-1281/24-10).

3. Quinquennalzulagen wurden zuerkannt: Die III. dem Professor Klemens Emptmeyer (Statth.-Erl. vom 6./10. 1910, Z. VII-1323-10); die I. dem Professor Horatius Chizzola (Statth.-Erl. vom 6./10. 1910, Z. VII-1322-10) und dem Professor Dr. Josef Schiller (Statth.-Erl. vom 6./10. 1910, Z. VII-1419-10), die II. dem Professor Leopold Höss (Statth.-Erl. vom 25./10. 1910, Z. VII-828/2-10).

4. Am 22. Februar verschied nach mehrtägigem Leiden Professor Rudolf Hlawaty. Über die Wirksamkeit des tüchtigen und verdienten Lehrers berichtet der Nekrolog (Seite 1 f.). Das Leichenbegängnis, an dem sich Vertreter der hohen Behörden, der hiesigen Lehranstalten und mehrerer Vereinigungen, denen der Verblichene angehört hatte, der Lehrkörper und die Schülerschaft beteiligten, fand am 24. Februar in feierlicher Weise statt. Der Trauergottesdienst der Anstalt wurde am 25. Februar abgehalten. Seine Lehrverpflichtung wurde von dem mit Statth.-Erl. vom 31./10. 1910, Z. VII-1507/1-10, als Assistenten bestellten Berthold Zimmermann übernommen, der dann mit Statth.-Erl. vom 19./3. 1911, Z. VII-431/2-11, zum Supplenten ernannt wurde.

Dem Supplenten Karl Pirker wurde infolge schwerer Erkrankung ein 2monatlicher Erholungsurlaub gewährt (Statth.-Erl. vom 9./2. 1911, Z. VII-325-11). Der evangelische Religionsunterricht H. B. mußte infolge Erkrankung des Pfarrers Josef Schalaudek vom 14. Oktober bis 1. März durch den Cand. theol. Hermann Schreiber suppliert werden.

5. Am 4. Oktober wurde das Jubelfest des 80. Geburtstages Seiner Majestät des Kaisers nachträglich mit einem Hochamte in Verbindung mit einer Schulfeier begangen. Monsignore A. Lupetina, bischöflicher Kommissär, zelebrierte ein feierliches Hochamt unter Assistenz des Konsistorialrates H. Šonc und des Kooperators Zhiak. Die Musik und den Gesang besorgten

Schüler der Anstalt unter Leitung des Professors J. Rajakowitsch, die Festrede wurde vom Professor Dr. R. Hassfurther gehalten. Es folgten Deklamationen von Gedichten patriotischen Inhaltes von den Schülern Weiss (III. *b*) und Wenedikter (VII.). Zum Schlusse wurde die Volkshymne gesungen. Während des Hochamtes trug der Schüler Pavovich (III. *b*) ein Violinsolo (Largo von Händel) und Erne (VI.) das „Ave Maria" von Gounod vor. Saul (VII.) spielte die Orgel und Slajko (VII.) leitete den Gesang. Um das Gelingen des Festes haben sich die Professoren Dr. Hassfurther, Rajakowitsch und Thannabaur verdient gemacht.

Am 19. November fand wie alljährlich ein Trauergottesdienst für weiland Ihre Majestät die Kaiserin Elisabeth statt.

6. Am 26. Mai fand in den Räumen des Triester Vereines „Austria" eine Schülerakademie statt, die auf Anregung des prov. Leiters Professor A. Stephanides von den Abiturienten veranstaltet wurde und einen allseits befriedigenden und lebhaft anerkannten Verlauf nahm. Das Programm bestand aus musikalisch-deklamatorischen Vorträgen und aus turnerischen Vorführungen, die dank den Bemühungen des Professors Thannabaur, des Gesanglehrers Pfurtscheller und des Turnlehrers Riedel einmütigen Beifall fanden. Besondere Erwähnung verdienen die Leistungen des Schülerorchesters und der Turner sowie jene der Schüler Jensen und Pontoni (VII.), Weiss (III. *b*) und Bergmeister (I. *b*) als Deklamatoren, der Schüler Singer (IV. *b*) und Giurovich (V. *b*) als Klavierspieler und des tüchtigen Violinisten Slajko (VII.).

Für die gütige Überlassung der Festräume und für deren prächtige Ausschmückung gebührt der Leitung des Vereines „Austria", insbesondere Herrn Präs. Ritter v. Bernetich-Tommasini und Herrn Kapitän Colledani auch an dieser Stelle der wärmste Dank. Der namhafte Ertrag des Abends ist der Anschaffung eines Harmoniums und dem Unterstützungsfond für arme Schüler gewidmet.

7. Am 11. Juni fand in feierlicher Weise die erste Kommunion und die Firmung von Schülern der Anstalt statt. Seine bischöfliche Gnaden Dr. Andreas Karlin erschien persönlich in der Anstalt, zelebrierte das Hochamt und spendete die heiligen Sakramente des Altars und der Firmung. Die Kirchenmusik besorgten während der Messe das Schülerorchester und die Sänger der Anstalt. Der Herr Bischof hielt eine die Schüler tief ergreifende Ansprache an die Erstkommunikanten, worauf der Schüler der I. *b* Klasse Josef Bergmeister in einer hübschen, mit Empfindung vorgetragenen Rede antwortete und den Dank der Kommunikanten zum Ausdruck brachte.

8. An den Tagen vom 24.—28. Oktober, 7. und 8. November, 1.—9. Dezember wurden sämtliche Klassen in 3—7 Gegenständen und sämtliche Mitglieder des Lehrkörpers vom Herrn Landesschulinspektor Dr. Robert Kauer besucht, über welche Inspektion er am 9./12. mit dem Lehrkörper eine Konferenz abhielt. Außerdem inspizierte Schulrat Eduard Brechler den Freihandzeichenunterricht und der bischöfliche Kommissär Mons. A. Lupetina den Religionsunterricht.

9. Der Gesundheitszustand der Schüler war im abgelaufenen Schuljahre meist recht befriedigend. Ansteckende Krankheiten sind unter den Schülern durch das ganze Schuljahr nicht vorgekommen. Am 25. November 1910 fand die augenärztliche Untersuchung der Schüler durch den Amtsarzt der k. k. Statthalterei Dr. G. Germonig junior statt.

Leider hatte die Anstalt auch einen Todesfall unter den Schülern zu verzeichnen: der brave und fleißige Schüler der V. *a* Klasse Josef Gerin verschied am 5. Juni nach längerer Krankheit; seine Mitschüler, der Klassenvorstand Prof. Chizzola, Dr. U. Mioni und Prof. Rajakowitsch gaben ihm das letzte Geleite.

10. Das Schuljahr wurde am 19. September mit dem heil. Geistamte eröffnet, der regelmäßige Unterricht begann am 20. September. Der Schulschluß fand am 6. Juli mit dem Dankamte und der Zeugnisverteilung statt.

VIII.

Körperliche Ausbildung der Schüler.

Mit dem heurigen Schuljahre wurde durch Erlaß des K. U. Min. vom 8./5. 1910, Z. 19847 = Statth.-Erl. v. 26./10. 1910, Z. VII-1095-10, das Jugendschießen für die beiden obersten Klassen der Anstalt eingeführt. Es meldeten sich aus Klasse VI 36, aus Klasse VII 37 Schüler. Mit dem Unterrichte und der Leitung wurde der k. u. k. Oberleutnant Alois Cosulich Edl. v. Pećine des Infanterieregimentes Nr. 97 betraut. Am 26./11. begann der Unterricht und endete am 27./5. mit dem scharfen Schießen auf der k. u. k. Militärschießstätte in Basovizza. Bei diesem Anlasse erschienen auch die Herren Generalmajor Krauß v. Elislago, Oberst Johann Hubl und Major Wladimir Winter des k. u. k. bosnisch-herzegowinischen Infanterieregimentes Nr. 4, um sich von den Ergebnissen des Schießens zu überzeugen. Von den Zöglingen beteiligten sich 38 an dieser Schießübung und erzielten recht befriedigende Resultate.

Die Direktion spricht auch an dieser Stelle den genannten Herren den wärmsten Dank für ihr Entgegenkommen und ihre Verdienste um die Förderung dieses Zweiges der körperlichen Ausbildung der Jugend aus.

Die Jugendspiele begannen in diesem Jahre am 1./4. und fanden mit Bewilligung des k. u. k. Stationskommandos auf dem Exerzierplatze der Großen Kaserne an jedem Samstage statt, wenn es das Wetter erlaubte. Die Leitung derselben lag in den Händen des Supplenten Dr. K. Pirjevec und des Turnlehrers S. Riedel. Für die Überlassung des Platzes ist die Anstalt dem k. u. k. Stationskommando zu großem Danke verpflichtet.

Auf Ansuchen der Direktion gewährte der Pächter der k. u. k. Militärschwimmschule den Schülern der Anstalt eine unbeschränkte Anzahl ermäßigter Badekarten und für ganz arme Schüler eine ansehnliche Zahl Freikarten, wofür auch ihm der beste Dank gebührt.

Endlich sei dankbar erwähnt, daß einige Schüler der Realschule unter Leitung des Herrn Gymnasialprofessors Mähr in den Booten des Gymnasiums den Rudersport ausüben durften. Der Berichterstatter hofft, daß es gelingen werde, diesem für Triest so wichtigen Sporte bald eine intensivere Pflege angedeihen zu lassen.

Zu Beginn der guten Jahreszeit wurden von einzelnen Klassen unter Führung ihrer Lehrer Ausflüge in die Umgebung unternommen, die zum Teile auch Unterrichtszwecken gewidmet waren. Die Professoren Dr. K. Tertnik, Dr. J. Schiller und J. Bernt veranstalteten naturwissenschaftliche und geographische Exkursionen; auch das städtische Museum und die k. k. Zoologische Station wurden den Schülern wiederholt zugänglich gemacht.

Prof. Höss besuchte mit seinen Schülern die Eisfabrik in Barcola, die Gasfabrik in Servola, das k. k. Punzierungsamt in Triest, die Porzellanfabrik in Prosecco, die Ziegelwerke in Villa Vicentina, die Drehersche Brauerei, die Mineralölraffinerie in Servola und die Seifenfabrik des Herrn v. Politzer. Den Inhabern und Direktionen der genannten Anstalten und Unternehmungen wird hiermit nochmals in Hinblick auf die gemeinnützige Förderung der Bildung der geziemende Dank ausgesprochen.

Ein Ausflug unter Führung des Prof. Bernt nach Villa Vicentina wurde mit dem Besuche des Museums und des Domes in Aquileja verbunden, bei welcher Gelegenheit Herr Kustos Prof. Majonica den Schülern in dankenswerter Weise Belehrung und Aufschlüsse erteilte.

Der 27. Mai wurde von der Direktion zum Zwecke der Veranstaltung von Ausflügen freigegeben. Die beifolgende Tabelle gibt eine Übersicht der unternommenen Exkursionen.

Maiausflüge am 27. Mai 1911.

Klasse	Zahl der Schüler	Weg und Ziel	Dauer	Begleitende Lehrer
I a	40	**Opčina, Banne, Trebič, Vedetta Alice.**	1/2 Tag	Emptmeyer
I b II b	35 30	Mit der Bahn nach Draga; Fußwanderung auf den **Veliki Gradišče** und nach **Corgnale**; Rückweg über **Lipizza** und Monte Spaccato.	1 Tag	Kofler, Kuhla
II a	40	Bahnfahrt nach **Duino**; Wanderung nach **Monfalcone**; Rückfahrt nach Triest.	1 Tag	Dr. Schiller
III a	30	Bahnfahrt nach S. Lucia; Fußmarsch durch das **Isonzotal** nach **Tolmein**; Rückfahrt nach Triest.	1 Tag	Bernt
III b	30	Fahrt nach Divača-Matavun; Besuch der Grotten von S. Kanzian.	1 Tag	Karollus
IV a	30	Fahrt nach Lupoglava; Aufstieg auf den **Monte Maggiore.**	1 Tag	Dr. Pirjevec
IV b	21	Bahnfahrt nach **Wocheiner Feistritz**; Wanderung zum **Savicafall.**	1 Tag	Dr. Hassfurther
V a	15	Fahrt nach Umago; Fußwanderung über **Buje, Castelvenere, Sicciole** nach **Portorose** und **Pirano.**	1 Tag	Chizzola
V b	20	Fahrt nach Divača; zu Fuß nach **Präwald, Nanos, Haidenschaft, St. Daniel.**	1 1/2 Tag	Höss
VI VII	38	Jugendschießen auf der k. u. k. Militärschießstätte in **Basovizza** mit Ausflug nach **Lipizza.**	1 Tag	Dr. Brandeis, Stephanides, Fezzi

IX.

Die wichtigsten Verfügungen der vorgesetzten Behörden.

1. Austritt während des Schuljahres: Schüler einer Mittelschule, die im Laufe des Semesters von ihrer Lehranstalt austreten, ohne — wie etwa in einem Übersiedlungsfalle der Eltern — ihre Studien noch in demselben Semester an einer anderen Lehranstalt unmittelbar fortzusetzen, treten nach den Bestimmungen der Verordnung vom 18. Oktober 1850, Z. 9134, in die Kategorie der an keiner Mittelschule eingeschriebenen Privatschüler über und können im nächstfolgenden Semester nur auf Grund einer aus allen obligaten Lehrgegenständen abzuhaltenden Aufnahmsprüfung und gegen Erlag der für eine solche Aufnahmsprüfung vorgeschriebenen Prüfungstaxe von 24 K, sowie der Aufnahmstaxe zur Fortsetzung ihrer Studien an einer Mittelschule wieder aufgenommen werden. (Min.-Erl. vom 6. Oktober 1878, Z. 13510.)

2. Nachmittägiger obligater Unterricht an den Volks- und Mittelschulen in Triest: Dieser Unterricht ist vom 16. Oktober bis Ende März von 2—4 Uhr, vom September bis 15. Oktober und vom 1. April bis zum Schlusse des Schuljahres von 3—5 Uhr abzuhalten. (Stath.-Erl. vom 15. September 1894, Z. 16940.)

3. Neue Ferienordnung: Die diesjährigen Hauptferien an den Mittelschulen dauern vom 16. Juli bis 15. September. Zur Vornahme der Reife-, Privatisten- und Aufnahmsprüfungen entfällt die Erteilung des Unterrichtes in den letzten zehn Tagen vor Beginn der Hauptferien.

Die Weihnachtsferien dauern vom 24. Dezember bis einschließlich 2. Jänner.

Das I. Semester schließt mit dem letzten Samstage vor dem 16. Februar. Der darauffolgende Montag ist schulfrei. (K. U. Min.-Erl. vom 30. März 1911, Zl. 8661.)

4. Lehrmittelbeitrag: Jährlich 3 K; ärmere Schüler nur 2 K. (Statth.-Erl. vom 11. März 1894, Z. 7016/VII.)

5. Wiederzulassung zum Schulbesuche bei Diphtheritis: Ein von der Diphtheritis geheilter Schüler kann erst drei Wochen nach Ablauf des lokalen Krankheitsprozesses unter Beibringung des ärztlichen Attestes wieder

zum Schulbesuche zugelassen werden. — Einem eventuell mit einem Diphtheritiskranken zusammenwohnenden Schüler kann nach dessen Genesung und nach vollzogener Reinigung und Desinfektion der Wohnung auf Grund eines ärztlichen Zeugnisses sofort der Schulbesuch wieder gestattet werden. (Statth.-Erl. vom 12. April 1885, Z. 7489.)

6. Obligater Unterricht in den Landessprachen: Vom Schuljahre 1910-1911 ist an der Staatsrealschule in Triest entweder Italienisch oder Slowenisch nach Wahl der Eltern oder deren Stellvertreter für alle Schüler obligat. Die Schüler sind in die bestehenden Parallelabteilungen so einzureihen, daß bei der Erteilung des Unterrichtes in der einen Abteilung die Kenntnis der Sprache bereits vorausgesetzt, während in der anderen mit der Erlernung begonnen wird. In der Oberrealschule hat wie bisher das Englische als Wahlgegenstand neben dem Italienischen, bzw. Slowenischen zu verbleiben. Das Stundenausmaß aller Sprachfächer ist aus der Tabelle auf Seite 6 zu ersehen. (K. U. Min.-Erl. vom 29. August 1910, Zl. 29119.)

X. Statistik der Schüler.

Nachtrag zum Schuljahre 1909-1910.

KLASSE. . .	I		II			III		IV		V		VI	VII	Summe
	a	*b*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*			
einer Wiederholungs-üfung zugelassen . .	3+1	2	—	2	1	+1	+1+2	1	3	3+4	2+1+1	6+3	+5	26+16
sprochen haben . . .	4	2	—	2	1	1	2+1	1	2	7	3+1	9	5	39+2
ıt entspr. haben oder cht erschienen sind. .	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1
iner Nachtragsprüfung ugelassen	—	—	1	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	4
sprochen haben . . .	—	—	1	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	3
ıt entspr. haben oder cht erschienen sind. .	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1
nach ist das Endergeb-s für 1909/1910:														
Aufsteigen vorzüglich eignet (oberste Klasse t vorzüglichem Erfolg endet).	1+1	—	3	3	1	1	3	1	—	3	—	4	3	23+1
gnet (mit gutem Erfolg)	37	34	22	30	19	36	34+1	27	26	20	21+1	32	22	360+2
llgemeinen geeignet .	3	3	3	1	4	6	2	5+1	3	—	—	—	—	30+1
t geeignet (mit nicht nügendem Erfolg) . .	5	5	9	3	10	1	5	6	12+1	3	2	4	—	65+1
eprüft.	—	—	—	—	—	1	1	—	—	—	—	1	—	3
Summe . .	46+1	42	37	37	34	45	45+1	39+1	41+1	26	23+1	41	25	481+5

Schuljahr 1910-1911.

KLASSE . .	I		II		III		IV		V		VI	VII	Summe
	a	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*			
Zahl.													
Anfang 1910/1911. . .	51	51	49	48	45	44	54	46	30	26	44	37	525
rend des Schuljahres getreten	1	—	1	—	—	—	1	1	—	—	2	—	6
anzen also aufgenomm.	52	51	50	48	45	44	55	47	30	26	46	37	531
Darunter:													
aufgenommen { aufgestiegen	47	49	2	8	3	3	4	2	1	1	3	—	123
d zwar { Repetenten .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
ler aufgenom- { aufgestiegen	—	—	39	34	41	40	42	38	26	23	37	36	356
n und zwar { Repetenten .	5	2	9	6	1	1	9	7	3	2	5	1	51
rend des Schuljahres getreten	8	6	8	8	3	7	—	2	3	5	1	—	51
lerzahl zu Ende 1910-1911 .	44	45	42	40	42	37	55	45	27	21	45	37	480
nter { öffentl. Schüler.	44	45	40	39	42	37	54	44	26	21	43	37	472
nter { außerord. „ .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1
nter { Privatisten . .	—	—	2	1	—	—	1	1	1	—	1		7
Summe . .	44	45	40+2	39+1	42	37	54+1	44+1	26+1	21	43+1 +1*a*	37	472+7+1*a*
burtsort (Vaterland) .													
t samt Gebiet . . .	32	24	24+1	24+1	32	19	26+1	26+1	19	8	31+1+1*a*	27	292+5+1*a*
übrige Küstenland. .	5	6	3	5	2	8	8	9	2	8	2	6	64
re Provinzen Öster-chs	4	12	9+1	9	6	8	15	8	3+1	4	7	3	88+2
nd (inkl. Ungarn) . .	3	3	4	1	2	2	5	1	2	1	3	1	28
Summe . .	44	45	40+2	39+1	42	37	54+1	44+1	26+1	21	43+1 +1*a*	37	472+7+1*a*

KLASSE	I a	I b	II a	II b	III a	III b	IV a	IV b	V a	V b	VI	VII	Summe
3. Muttersprache.													
Deutsch	7	19	13	16+1	15	11	26	15	10+1	11	16+1a	9	168+2
Italienisch	30	5	21+1	14	17	14	21+1	17	10	6	19+1	24	198+
Slowenisch	6	19	5	9	6	11	4	11+1	6	3	5	4	89+1
Serbo-kroatisch	1	2	+1	—	3	1	3	—	—	1	2	—	13+
Andere Sprachen	—	—	1	—	1	—	—	1	—	—	1	—	4
Summe	44	45	40+2	39+1	42	37	54+1	44+1	26+1	21	43+1+1a	37	472+7
4. Religion.													
Römisch-katholisch	43	39	28+2	39+1	32	37	45+1	44+1	19+1	21	35+1+1a	34	416+7
Griechisch-orientalisch	—	2	—	—	2	—	1	—	—	—	—	—	
Evangelisch Augsb. Bek.	1	4	6	—	4	—	6	—	3	—	1	2	2
Evangelisch Helv. Bek.	—	—	2	—	3	—	—	—	—	—	3	—	
Anglikanisch	—	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—	—	
Mosaisch	—	—	4	—	—	—	1	—	4	—	4	1	1
Konfessionslos	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	-
Summe	44	45	40+2	39+1	42	37	54+1	44+1	26+1	21	43+1+1a	37	472+
5. Lebensalter.													
am 15. September 1910: 10 Jahre	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
11 „	8	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4
12 „	23	13	4	1	6	1	—	—	—	—	—	—	7+1
13 „	7	11	15+1	12	21	1	3	—	—	—	—	—	8
14 „	6	9	9+1	12+1	12	15	15	1	1	—	—	—	8+1
15 „	—	1	5	10	2	12	16	14+1	6	1	13	—	7+1
16 „	—	—	4	4	—	6	13	15	7+1	8	7	7	
17 „	—	—	2	—	1	2	5+1	10	7	6	12+1a	13	58+1
18 „	—	—	1	—	—	—	2	2	5	3	8+1	8	2+1
19 „	—	—	—	—	—	—	—	2	—	3	3	6	
20 „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	
Summe	44	45	40+2	39+1	42	37	54+1	44+1	26+1	21	43+1 +1a	37	472+
6. Nach dem Wohnorte der Eltern.													
Ortsangehörige	42	39	40+1	37+1	40	35	51+1	40+1	24+1	20	39+1+1a	35	44
Auswärtige	2	6	+1	2	2	2	3	4	2	1	4	2	
Summe	44	45	40+2	39+1	42	37	54+1	44+1	26+1	26	43+1 +1a	37	47
7. Klassifikation am Ende des Schuljahres 1910/1911.													
Zum Aufsteigen in die nächste Klasse waren (bzw. haben die oberste Klasse beendet) vorzüglich geeignet:													
(mit vorzüglichem Erfolg) geeignet:	1	1	—	—	3	1	2	2	1	—	1	4	16
(mit gutem Erfolg)	25	35	28+1	27+1	22	23	34	26	17	13	27	29	06
im allgemeinen geeignet	6	3	—	5	4	1	5	5+1	—	—	—	—	29
nicht geeignet:													
(mit nicht genüg Erfolg)	11	4	10	5	9	11	10	9	4	4	6+1	3	86
Die Bewilligung zu einer Wiederholungsprüfung erhielten	1	1	2	2	1	—	—	2	4	4	9	1	2
Nicht klassifiziert wurden	—	1	+1	—	3	1	3+1	—	+1	—	—	—	8
Außerordentliche Schüler	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1a	—	+
Summe	44	45	40+2	39+1	42	37	54+1	44+1	26+1	21	43+1 +1a	37	2+

KLASSE . .		I		II		III		IV		V		VI	VII	Summe
		a	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*			
. Besuch des relativ ligaten und des nicht bligaten Unterrichtes														
ienisch . .	I. Sem.	—	—	21	17	21	18	19	12	10	3	6	15	142
	II. „	—	—	20	17	21	16	19	12	10	3	6	15	139
venisch . .	I. Sem.	—	—	4	4	1	3	—	—	—	—	—	—	12
	II. „	—	—	4	4	1	2	—	—	—	—	—	—	11
nographie .	I. Sem.	—	—	—	—	—	—	24	28	14	10	3	—	79
	II. „	—	—	—	—	—	—	25	15	12	10	3	—	65
ang . . .	I. Sem.	22	8	3	5	5	—	—	—	—	—	—	—	43
	II. „	19	7	3	5	—	—	—	—	—	—	—	—	34
Summe im I. Sem.		22	8	28	26	27	21	43	40	24	13	9	15	
Summe im II. „		19	7	27	26	22	18	44	27	22	13	9	15	
Idleistungen der Schüler.														
hulgeld zu zahlen	I. Sem.	30	22	17+1	13	15	16	23	21+1	10	10	13+2	14	209+4
verpflichtet im .	II. „	22	19	27+1	23	24	23	32	24+1	13	13	25+1	16	261+3
) befreit .	I. Sem.	—	—	—	—	2	—	1	—	—	1	—	—	4
	II. „	—	—	—	—	—	—	1	—	1	—	—	1	3
z befreit .	I. Sem.	21	30	30	35	28	27	30	24	20	15	24	23	307
	II. „	23	26	13	18	18	14	21	19	12	7	18	20	209
ganzen betrag Schulgeld im	I. Sem.	1200	880	720	520	640	640	940	880	400	420	800	560	8600 K
	II. „	880	760	1120	920	960	920	1300	1000	540	520	1040	660	10620 „
Summe . .		2080	1640	1840	1440	1600	1560	2240	1880	940	940	1840	1220	19220 K
Aufnahmstaxe K 4·20 ahlten		51	49	3	7	3	3	5	2	1	1	4	—	129
Lehrmittelbeitrag à K 50 h, 2 K und K zahlten		52	51	50	48	45	44	55	47	30	26	46	37	531
likat-Taxe à 4 K . .		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	9
Stipendien.														
Anzahl	I. Sem.	—	4	1	—	1	1	—	1	2	—	—	2	12
tipendisten	II. „	—	2	1	—	1	1	—	1	1	—	—	2	9
amtbetrag	I. Sem.	—	400	100	—	100	100	—	118	150	—	—	300	1268 K
Stipendien	II. „	—	200	100	—	100	100	—	118	50	—	—	300	968 „
Summe .		—	600	200	—	200	200	—	236	200	—	—	600	2236 K

XI.

Verzeichnis der öffentlichen Schüler,

die bis zum Jahresschlusse verblieben sind.

(Die Schüler mit einem * sind zum Aufsteigen „vorzüglich“ geeignet.)

I. a.

Adamich Celsius
Albrizio Humbert
Baatz Eugen
Baucon Alfred
Benussi Edmund
Bertos Isidor
Bonetta Karl
Buda Karl
Busatto Gaston
Carmelich Thomas
Carra Franz
Comelli Josef
Dalsasso Franz
Exner Konrad Karl
Giadrossich Nikolaus
Goriup Cyrill
Janiszewski Oskar
Jungl Josef
Jurjavčič Rüdiger
Kauffmann Alfred
Kiss Guido
Kukanja Marius
Lorenzon Anton
Maichin Peter
Mihaleskul Silvius
Monico Gaston
Motka Thomas
Mrach Karl
Pečnik August
Perich Alois
Pontoni Franz
Reinisch Josef
Rogelj Theodor
Skrinar Karl
Stelzhammer Johann
Sturm Rudolf
*Sturz Wilhelm
Tomič Mirko
Vaccari Leo
Valenti Johann
Vettach Bruno
Viltušnik Josef
Zadnik Narziß
Zwiner Josef

I. b.

Baučer Peter
Bauer Oskar
*Bergmeister Josef
Ciak Josef
Colja Marius
Ferfoglia Narziß
Ferluga Alois
Fonda Johann
Glažar Josef
Grylka Rudolf
Gustinčič Paul
Herzog Miloš
Jenko Karl
Kališ Friedrich
Kocsis Lorenz
Korošic Franz
Kovačič Viktor
Kovič Johann
Krajnc Franz
Mayr Emil
Milosevich Johann
Negrelli R. v. Moldelbe Alois

Persoglia Marius
Pezko Georg
Pfeiffer August
Pilipovich Rudolf
Pokorny Leopold
Poschlep Karl
Richtzenhain Kurt
Richtzenhain Walter
Rottenbacher Guido
Rupnik Guido
Schmidt Karl
Skaber Gustav
Stepischnig Eduard
Stipanič Rudolf
Suban Marius
Supanc Rudolf
Veble August
Velicogna Anton
Vidrich Johann
Višnovec Hermann
Widter Georg
Zaklan Emil
Zavadlav Leopold

II. a.

Artner Gustav
Bauer Bruno
Bauer Emil
Baxa Hugo (Priv.)
Bednar Franz
Berlot Anton
Bibiza Franz
Blasina Bruno
Bolaffio Alois
Borcich Marius
Bucchich Albert
Carlovatti Karl
Cotič Alois
Debelak Milutin (Priv.).
Deljak Johann
Facchina Marzellus
Faidiga Ludwig
Ferluga Johann
Fitz Armand
Fonn Max
Giurco Peter
Graberg Richard
Grandi Karl
Hannich Gustav
Hresciak Oskar
Hudax Franz
Issmann Humbert
Jasbitz Marzellus
Jersche Franz
Kloss Karl
Kovaćić Konstantin
Leiler Franz
Lettocha Felix
Levi-Minzi Alexander
Liebezeit v. Burgschwert Franz
Salter Josef
Schönhardt Bruno
Schultze Herbert
Schwarz Ludwig
Spitzer Egon
Waddell Wilhelm
Wittine Heinrich

II. b.

Godnik Radomir
Hammerl Alois
Komel Karl
Mareglia Cäsar
Moimas Josef
Nadilo Anton
Pachernigg Karl
Pahor Karl
Pesusic Johann
Petermann Franz
Pfeiffer Egon
Pinter Max
Di Pompeo Viktor
Predonzan Humbert
Resnik Ferdinand
Rossetti Josef
Rottenbacher Friedrich
Samt Johann
Schleimer Waldo (Priv.)
Sedlar Alois
Semič Christian
Škerjanec Roman
Stejskal Josef
Sterle Vinzenz

Stringaro Emil
Sturz Johann
Titz Georg
Ulčakar Josef
Vitez Karl
Voncina Arianus
Waller Walter
Warto Viktor
Weithofer Wilhelm
Welker Engelbert
Welzl Anton
Winter Leopold
Würschinger Philipp
Zajic Franz
Zanzotti Marius
Zottar Johann

III. a.

Antončič Anton
Bäthge Egon
Berguglian Antenor
*Buda Ferdinand
Calucei Georg
Čegnar Renatus
Černe Wladimir
Demark Franz
Dimnig Theodor
Dobnik Rudolf
Dussich Karl
Elis Adolf
Errath Johann
Fait Johann
Fink Leopold
Fischer Albert
Fischer Rudolf
Gallovich Gaston
Godnig Eduard
Gosetti Rudolf
*Gregorič Josef
Grilz Wilhelm
Gruden Miroslav
Jaut Hektor
Jegher Friedrich
Jeranče Alois
Jordan Josef
Joung Ignaz
Juras Theodor
Jurizza Viktor
Kalss Heinrich
Kirschner Rudolf
Kleinschuster Ludwig
Laussegger August
Lucich Elias
Meeraus Karl
*Melcher Gaston
Miča Josef
Richtzenhain Friedrich
Sablich Walter
Schäfer Hans
Slokovich Milan

III. b.

Kossovel Artemius
Krebel Karl
Kreisel Hermengild
Lenassi Milan
Lorcet Georg
Maižer Max
*Mayer Alexander
Molini Josef
Mozetič Rudolf
Mühlbauer Friedrich
Nardini Egon
Pavčič Vinzenz
Pavovich Johann
Peric Egidius
Perlitz Michael
Pitteri Olivier
Polakovics Sergius
Potrebin Leopold
v. Reya Karl
Ribarič Martin
Sbisà Marius
Slubczakowski Egon
Strenar Karl
Strial Lambert
Šušmelj Ferdinand
Tainsek Ferdinand
Taučer Stephan
Tommasi Isidor
Ullrich Alfred
Višnovic Herminius

Vošmera Robert
Waldmann Rudolf
Weiss Egon
Weniger Georg
Wolf Viktor
Zager Heinrich
Zhelizh Albert

IV a.

Adrario Otto
Aichholzer Eduard
Avanzini Guido
Bayer Ludwig
Berguglian Stanislaus
Bibiza Franz
Brunnlechner Walter
Carminati Anton
Casa Egon
Cossutta Rudolf (Priv.)
Cumin Gustav
*Curti Johann
Fabrici Alfred
Fachin-Zumin Marius
Fiebich Alois
Frankel Walter
v. Gavardo Oliver
Gerolimich Guido
Gessi Georg
Ghersettich Armand
Graf Franz
Granichstaedten Paul
Hannich Franz
Hanslich Georg
Hendel Karl
Hesse Franz
Jurjavčič Marius
Jestadt Rudolf
Kampfer Johann
Kavčič Roman
Klingendrath Ferdinand
Koren Karl
Kovačevič Johann
Kretzschmar Aurelius
Krischmann Gustav
Kuch Karl
Lewis Heinrich
*Lipizer Franz
Lipizer Leopold
De Maistre Arsen
Mally Hermann
Oeser Oskar
Peter Wilhelm
Rebetz Viktor
Reddi Georg
Rizzan Heinrich
Rizzi Josef
Rybář Miloš
Sacher Artur
Saffaro Leo
Schamanek Heinrich
Schober Karl
Stantig Silvius
v. Sternfeld Peter
Tolloy Josef

IV. b.

Bretzel Rudolf
Kattnig Martin
Komposch Ernst
Konobel Albert
Koroschitz Peter
Krainer Ferdinand
Kuščer Milutin (Priv.)
Laibert Josef
Maischer Otto
Masek Artur
Mikelič Karl
Milič Viktor
Mircovich Johann
Monchanin Stephan
Pajk Franz
Pamfili Heinrich
Pertot Johann
Petelin Heinrich
Picinich Johann
Pokorny Rudolf
Polak Karl
Ponikvar Emil
Rebech Bruno
Rosmann Alexander
Rupnik Guido
Salamon Max

Scheriau Alois
Schlechta Friedrich
*Schlömer Hugo
Singer Marius
Steiner Georg
Stepančič Felix
Steppan Othmar
Strauss Alois
Strčič Karl
Talkner Humbert
Tomažič Anton
Tomsič Hermin
Udovich Anton
Vigurich Georg
Wenedikter Adolf
Zanini Josef
Zenta Max
*Žetko Marius
Zorn Ferdinand

V. a.

Aicholzer Josef
Berlot Isidor
Brunnlechner Adolf (Priv.)
Bulian Walter
Butkovic Leopold
Cegnar Edwin
Danelutti Eduard
Demark Anton
Devescovi Oktavius
Drašlar Josef
Fonzari Richard
Frausin Peter
Glasar Guido
Godnig Ramirus
Gropaiz Marius
Hlača Franz
Hoenig Ferdinand
Homann Richard
Jerkich Oskar
Kravanja Rudolf
Kunz Leopold
Luzzatto Johann
Medicus Wladimir
Morpurgo Heinrich
*Perlmutter Marius
Pinter Emil
Reiss Josef

V. b.

Giurovich Wladimir
Gulich Orestes
Kralj Peter
Künzel Adolf
Lenček Anton
Miklaućić Jakob
Miloch Guido
Pachernigg Eugen
Panzera Marius
Pavanello Pompejus
Perazzo Gustav
Petschnik Valentin
Pirker Franz
Pokorny Josef
Prašelj Friedrich
Ribarič Michael
Rittmeyer Salvator
Romich Max
Umek Oskar
Widter Christoph
Wigele Alfons

VI.

Arming Julian
Aulinger Zeno (auß. Sch.)
Bousquet Egon
Buchler Hans
Čenčič Paul
Čibej Josef
Dollenz Marius
Erne Alois
Fischer Kurt
*Gerolimich Hermann
Jasbitz Adelchis
Jast August
Kaplanek Konrad
Kavčič Marius
Kiegerl Adolf
Kundič Dušan

v. Lindemann Josef
Mankoč Jgor
Marolt Rudolf
Meiler Bruno
v. Mirkovič Feodor
Morterra Gaston
Nadrag Ferdinand
Nemeth Alfred
Obermüller Ivo
Pajnič Viktor
Paximadi Josef (Priv.)
Pohl Gustav
Prašelj Alois
Premuda Wilhelm
Prighel Adolf
Rawicz Emil
Sablich Guido
Scherling Thomas
Šimenc Josef
Singer Leo
Skodnik Michael
Tautschnig Peter
Tomsche Heinrich
Ukmar Alfons
Ulcigrai Hektor
Valenčič Danilo
Waldstein Georg
Winternitz Paul
Zahn Josef

VII.

Adamič Johann
Bolaffio Aetius
Bruni Jordan
Carlini Josef
Covatz Irenäus
Dell'Oglio Johann
Dürr Gerhard
Eppi Lutius
Germek Franz
Gerolimich Eugen
Gerolimich Johann
Goljevšček Wladimir
*Jensen Ludwig
*Kastelic Friedrich
Kintz Walter
Lonzar Anton
Miloch Johann
*Monico Aetius
Motka Friedrich
Orlando Latterius
Panzera Adolf
v. Patay Alois
Pfeiffer Konrad
Pollovich Artur
*Pontoni Johann
Rebick Josef
Rizzardi Marius
Saffaro Marius
Saul Adolf
Silič Johann
Skok Albert
Slajko Miroslav
Stoka Bruno
v. Wanniek Karl
Wenedikter Gustav
Zoerrer Basilius

Triest, den 6. Juli 1911.

Dr. Artur Brandeis,
k. k. Direktor.

XII.

Verzeichnis der für das nächste Schuljahr eingeführten Lehrbücher.

Vorbemerkung: Da infolge des neuen Lehrplanes vom 8. April 1909 wahrscheinlich für mehrere Gegenstände neue Lehrbücher approbiert werden dürften, so wird den Schülern geraten, keine Lehrbücher vor Beginn des nächsten Schuljahres zu kaufen, sondern abzuwarten, bis ihnen nach Eröffnung des Schuljahres das Verzeichnis der vorgeschriebenen Lehrbücher mitgeteilt wird.

I. Klasse — Großer Katechismus. — Deimel, Lehrbuch der katholischen Liturgik. — Dr. F. Willomitzer, Deutsche Grammatik, 13. Auflage — Jelinek, Pollak und Streinz, Deutsches Lesebuch für Realschulen, I. — Sket-Janežič, Slov. slovnica, 9. Aufl. — Sket-Wester, Slov. čitanka, I., 4. Aufl. — Curto, Grammatica della lingua italiana. — Nuovo libro di letture italiane, parte I., ult. ediz. — Baroni-Segatini, Lehrbuch der ital. Sprache, I. Teil, 1. Aufl. — Dr. F. Heiderich, Österr. Schulgeographie, I. Teil, 2.-4. Aufl. — Heiderich-Kozenn, Geographischer Schulatlas in 84 Karten, 39.-42. Auflage — Mayer, Lehrbuch der Geschichte für die unteren Klassen der Mittelschulen, I. Teil, 6. und 7. Auflage. — Jakob, Arithmetik, Schiffner, Raumlehre. — Schmeil-Scholz, Naturgeschichte des Tierreiches, 1910. — Dr. G. v. Beck, Grundriß der Naturgeschichte des Pflanzenreiches, 3. Auflage.

II. Klasse. — Großer Katechismus. — Deimel, Lehrbuch der katholischen Liturgik. — Dr. F. Willomitzer, Deutsche Grammatik, 13. Aufl. — Jelinek, Pollak und Streinz, Deutsches Lesebuch für Realschulen, II. — Sket-Janežič, Slov. slovnica, 9. Aufl. — Sket-Wester, Slov. čitanka, II., 3. Aufl. — Curto, Grammatica della lingua italiana. — Nuovo libro di letture italiane, parte II. ult. ediz. — Baroni-Segatini, Lehrbuch der italienischen Sprache, II. Teil, 1. Aufl. — Dr. F. Heiderich, Österr. Schulgeographie, II. Teil, 3. Aufl. — Heiderich-Kozenn, Geographischer Schulatlas in 84 Karten. Von der 39.-42. Auflage — Mayer, Lehrbuch der Geschichte für die unteren Klassen der Mittelschulen, II. Teil, 6. Aufl. — Jakob, Arithmetik. — Schiffner,

Raumlehre, I. Teil. — Schmeil-Scholz, Naturgeschichte des Tierreiches, 1910. — Schiffner, Geometrisches Zeichnen. — Dr. G. v. Beck, Grundriß der Naturgeschichte des Pflanzenreiches.

III. Klasse. — Deimel, Lehrbuch der katholischen Liturgik. — Deimel, Geschichte der Offenbarung des Alten Bundes. — Dr. F. Willomitzer, Deutsche Grammatik, 13. Auflage. — Jelinek, Pollak und Streinz, Deutsches Lesebuch für Realschulen, III. — Curto, Grammatica della lingua italiana. — Nuovo libro di letture italiane, parte III., ult. ediz. — Bechtel, Französisches Sprech- und Lesebuch, I. Teil, 9. Auflage. — D. F. Heiderich, Österreichische Schulgeographie, II. Teil, 3. Aufl. — Heiderich-Kozenn, Geographischer Schulatlas in 84 Karten, 39.—42 Auflage. — Mayer, Lehrbuch der Geschichte für die unteren Klassen der Mittelschulen, III. Teil (6. Auflage). — Jacob, Arithmetik, Schiffner, Raumlehre, I. Teil. — Rosenberg, Lehrbuch der Physik für die unteren Klassen, 3. Auflage. — Schiffner, Geom. Zeichnen.

IV. Klasse. — Deimel, Geschichte der Offenbarung des Neuen Bundes. — Dr. F. Willomitzer, Deutsche Grammatik, 13. Auflage. — Jelinek, Pollak und Streinz, Deutsches Lesebuch für Realschulen, IV. — Curto, Grammatica della lingua italiana. — Nuovo libro di letture italiane, parte IV., ult. ediz. — Bechtel, Französisches Sprech- und Lesebuch, II. Teil, 5. Auflage. — Bechtel, Übungsbuch, Mittelstufe, 5. Auflage. — Heiderich-Kozenn, Geographischer Schulatlas in 84 Karten, 39.—42. Auflage. — Dr. F. Heiderich, Österr. Schulgeographie, III. Teil, 2. Auflage. — Mayer, Lehrbuch der Geschichte, Oberstufe, I. Teil, 6. Auflage. — Gajdeczka, Arithmetik und Algebra für die oberen Klassen, 7. Auflage. — Gajdeczka, Übungsbuch, 8. Auflage. — Rosenberg, Lehrbuch der Physik für die unteren Klassen, 1. u. 2. Auflage. — Hans Huber, Lehrbuch der Chemie und Mineralogie für die IV. Klasse, 3. Auflage. — Mandl, Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen. — Mandl, Übungsaufgaben. — Schiffner, Geom. Zeichnen.

V. Klasse. König Artur, Lehrbuch für den katholischen Religionsunterricht in den oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen, 9.—12. Aufl. — Bauer, Jelinek, Pollak und Streinz, deutsches Lesebuch für Realschulen, V. Teil. — Dr. G. Vidossich, Compendio della storia della letteratura italiana, 1. Aufl. — O. Chizzola, Prose e Poesie dei sec. 13, 14, 2. Aufl., parte I. — Bechtel, Grammaire française, 5. Aufl. — Bechtel, Übungsbuch, Mittelstufe, 5. Aufl. — Bechtel, Französische Chrestomathie, 7. Aufl. — Swoboda, Elementarbuch der engl. Sprache für Realschulen, 1. Aufl. — Dr. F. Heiderich, Österr. Schulgeographie, 4. Teil, 1. Aufl.

— Dr. Mayer, Lehrbuch der Geschichte, Oberstufe, 2. Teil, 5. und 6. Aufl. — Putzger, historischer Schulatlas, 22.—31. Aufl. — Gajdeczka, Arithmetik und Algebra für die oberen Klassen, 7. Aufl. — Gajdeczka, Übungsbuch, 8. Aufl. — Mandl, Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen. — Mandl, Übungsaufgaben. — R. v. Wettstein, Leitfaden der Botanik, 3. und 4. Aufl. — Hemmelmayr, anorganische Chemie, 5. Aufl. — Barchanek, Lehr- und Übungsbuch der darstellenden Geometrie, 3. Aufl. — Hilfsbuch: Heller, Aufgaben und Beispiele aus der darstellenden Geometrie, I. Teil, 3. Aufl.

VI. Klasse. — König Artur, Lehrbuch für den katholischen Religionsunterricht in den oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen, 9.—12. Auflage. — Bauer, Jelinek, Pollak und Streinz, Deutsches Lesebuch für Realschlen, VI. — Bauer, Jelinek und Streinz, Leitfaden der deutschen Literaturgeschichte, II. — Dr. G. Vidossich, Compendio della storia della letter. ital., 1. Aufl. — Briani-Bortagnolli, Prose e Poesie dei sec. 15, 16. Ariosto-Tasso, Schulausgaben, Mailand. — Bechtel, Grammaire française, 5. Auflage. — Bechtel, Übungsbuch, Oberstufe, 3. Auflage. — Bechtel, Französische Chrestomathie, 4.-6. Aufl. — Sonnenburg-Kellner, Grammatik der englischen Sprache, 4. Aufl. — Nader und Würzner, Englisches Lesebuch, 1. Teil. — Dr. Ed. Richter, Lehrbuch der Geographie, 5—7. Aufl. — Dr. Mayer, Lehrbuch der Geschichte, Oberstufe, 3. Teil, 3. und 4. Aufl. — Putzgers historischer Schulatlas, 22.—31. Aufl. — Heiderich-Kozenn, Geographischer Schulatlas in 84 Karten. — Močnick-Neumann, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, 27.—28. Auflage. — Močnik-Spielmann, Lehrbuch der Geometrie, 27. — 28. Auflage. — Rosenberg, Lehrbuch der Physik für die oberen Klassen, 4. Aufl. — Schmeil-Scholz, Leitfaden der Zoologie. — Hemmelmayr, Organische Chemie, 5. Auflage. — Barchanek, Lehr-und Übungsbuch der darstellenden Geometrie, 3. Aufl. — Hilfsbuch: Heller, Aufgaben und Beispiele aus der darstellenden Geometrie, II. Teil, 3. Aufl.

VII. Klasse. — König Artur, Lehrbuch für den katholischen Religionsunterricht in den oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen, 9.—12. Aufl. — Bauer, Jelinek, Pollak, Streinz, Deutsches Lesebuch für Realschulen, VII. — Dr. G. Vidossich, Compendio della storia della letter. ital., 1. Aufl. — Briani-Bertagnolli, Pose e Poesie dei sec. 15, 16. Dante, Divina Comm., Ausg. Barbera, Manualetto storico. — O. Chizzola, Manuale della letteratura italiana, Parte I. — Bechtel, Grammaire française, 5. Aufl. — Bechtel, Übungsbuch, Oberstufe, 3. Auflage. — Bechtel, Französische

Chrestomathie, 4.—6. Aufl. — Sonnenburg-Kellner, Grammatik der englischen Sprache, 4. Auflage. — Nader und Würzner, Englisches Lesebuch, 6. Aufl. — Dr. Mayer, Lehrbuch der Geschichte, Oberstufe, 3. Teil, 3. und 4. Auflage. — Putzgers historischer Schul-Atlas. — Heiderich-Kozenn, Geographischer Schulatlas in 84 Karten. — Hannak, Österreichische Vaterlandskunde für die oberen Klassen der Mittelschulen, 16. Aufl. — Močnik-Neumann, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, 27.—28. Aufl. — Močnik-Spielmann, Lehrbuch der Geometrie, 26.—28. Aufl. — Rosenberg, Lehrbuch der Physik für die oberen Klassen, 2. u. 3. Auflage. — Dr. R. Scharizer, Lehrbuch der Mineralogie und Geologie, 2. u. 3. Auflage. — Barchanek, Lehr- und Übungsbuch der darstellenden Geometrie, 3. Auflage. — Heller, Aufgaben und Beispiele aus der darstellenden Geometrie, II. Teil, 3. Auflage.

Evang. Religionslehre. — Für die I. und II. Klasse: Müller, Biblische Geschichte. — Für die I.—IV. Klasse: Aust, Lehrbuch der Kirchengeschichte (A. K.). Biblisches Lesebuch für evang. Schulen (A. K.). — Witz, Der Heidelberger Katechismus (H. K.) — Liederschatz, Ausgewählte evangelische Kirchenlieder. — Für die III. und IV. Klasse: Die Bibel nach der deutschen Übersetzung Dr. Martin Luthers. — Für die V.—VII. Klasse: Hagenbachs Leitfaden zum christlichen Religionsunterricht für die oberen Klassen höherer Anstalten.

Mosaische Religionslehre. — Leopold Breuer, Israelitische Glaubens- und Pflichtenlehre. — Daniel Ehrmann, Biblische Geschichte.

Kursus für die slowenische Sprache.

III. Kurs. — Janežič-Sket, Slov. slovnica — Sket, Slov. čitanka, IV. Teil, für Mittelschulen.

Stenographie. — Lehrbuch der Stenographie von Emil Kramsall, (6. 7.) 8. Auflage.

XIII.

Kundmachung bezüglich des Schuljahres 1911-1912.

Die Einschreibung in die I. Klasse wird am **27. Juni** sowie am **14. September,** die Einschreibung **neuer** Schüler in die II.-VII. Klasse am **16. September** erfolgen. Letztere können nur nach Maßgabe der verfügbaren Plätze aufgenommen werden.

Aufnahmsprüfungen für die I. Klasse finden am **3. und 4. Juli** und am **16. September,** für die höheren Klassen am **18. September** statt.

Jene Schüler, welche der Anstalt im abgelaufenen Schuljahre bereits angehörten, haben sich, wenn sie ihre Studien hier fortsetzen wollen, am **15. September** im Konferenzzimmer zu melden und den Lehrmittelbeitrag von **3 K** zu entrichten.

Die Wiederholungs- und Nachtragsprüfungen finden am **18. September** um **8** Uhr statt.

Die neu eintretenden Schüler müssen, von ihren Eltern oder deren Stellvertretern begleitet, zur Einschreibung erscheinen und hiebei vorlegen:

a) den Tauf-, resp. Geburtsschein,
b) das Impfungszeugnis,
c) die schriftliche Erklärung eines Arztes, daß sie mit der granulösen Augenkrankheit nicht behaftet sind,
d) das letzte Schulzeugnis,
e) zwei sorgfältig ausgefüllte Nationale (Formulare beim Schuldiener).

Jeder Schüler, welcher **in die erste Klasse** eintreten will, muß:

1. das 10. Lebensjahr zurückgelegt haben oder doch bis Ende Dezember vollenden,
2. bei der Aufnahmsprüfung aus der deutschen Sprache, dem Rechnen und der Religionslehre genügende Kenntnisse an den Tag legen.

Gefordert wird:

In der Religion jenes Maß von Wissen, welches in den ersten vier Jahreskursen der Volksschule erworben werden kann.

In der deutschen Sprache Fertigkeit im Lesen und Schreiben, Kenntnis der Elemente aus der Formenlehre und einige Übung im Diktandoschreiben und Analysieren der Redeteile und der wichtigeren Satzteile.

Im Rechnen entsprechende Übung und Gewandtheit in den vier Grundoperationen mit ganzen Zahlen.

Für die Aufnahme in eine höhere Klasse wird gefordert:

1. das entsprechende Lebensalter;
2. der Nachweis der notwendigen Kenntnisse durch ein legales Zeugnis über das letzte Semester, eventuell durch eine **Aufnahmsprüfung.** Für eine solche Prüfung ist die gesetzlich bestimmte Taxe von 24 K zu erlegen.

Alle Schüler der V. Klasse haben eine schriftliche Erklärung ihrer Eltern oder deren Stellvertreter vorzulegen, in welcher ausdrücklich gesagt ist, ob der Schüler den Unterricht in der englischen oder italienischen Sprache in den Oberklassen besuchen soll.

Jeder neu aufzunehmende Schüler hat **bei der Aufnahme eine Taxe von 4 K 20 h** und einen Lehrmittelbeitrag von 3 K zu entrichten. Diese Taxe kann nur bei einer notwendig gewesenen Übersiedlung sehr armer Eltern nachgesehen werden.

Das Schulgeld beträgt 80 K jährlich und muß im Betrage von 40 K in den ersten 6 Wochen eines jeden Semesters erlegt werden. Arme Schüler, welche einen guten Fortgang sowie ein gutes sittliches Betragen an den Tag legen, können von der Zahlung des Schulgeldes befreit werden. Den Schülern der ersten Klasse, die im I. Semester das Schulgeld spätestens im 3. Schulmonate zu entrichten haben, kann die Zahlung gestundet werden, wenn sie dürftig sind und bei einer 2 Monate nach der Aufnahme abzuhaltenden Konferenz im Betragen eine der beiden ersten Noten, sowie in allen Obligatfächern wenigstens die Note „genügend“ ausweisen. Die Stundungsgesuche sind 8 Tage nach der Schüleraufnahme einzureichen, die definitive Befreiung erfolgt erst nach Schluß des Semesters für diejenigen, die im Betragen die Noten „sehr gut“ oder „gut“ und in jedem Gegenstande mindestens die Note „genügend“ erhalten haben.

De Principiis

Calculi Differentialis

pro

Impetranda Legendi Facultate

Auctor

G. Recht, Phil. Dr.

publice disputabit

in

Aula Almae Ludovico - Maximilianeae

Die XIX. M. Decembris.

Monachii

Typis Georgii Weiss.

1840.

emper me, quum mathematicas res accuratius utari coepissem, principia Calculi Differentia- praecipue delectaverunt. Tanta est enim ue ad hunc diem in illa matheseos parte ietas methodorum, quae ad solvendas quae- nes adhibentur, ut ex his ipsis pervestigatis d exiguus possit hauriri fructus ingenio ex- endo. Tamen negotiis alienis distractus ali- ndiu illud studium tam exoptatum mihi ne- ere eram coactus. Quum autem a Summo isterio atque ab Amplissimo Professorum ine Almae Ludovico-Maximilianeae pro im- anda publice legendi venia ea concessa

esset facultas, ut de tractatu elaborato disputarer
rem iterum aggressus sum, et Lagrangium
praeclarissimum in Mathematica virum, q
historiam cujusque scientiae fundamentum a
pellat, eique intentis viribus studuit, secut
omnem dedi operam, ut inprimis historiam hu
disciplinae funditus perciperem.

Quare, si rem non ita ornate, ut par st
tractavi, venia mihi concedatur velim proje
difficultatem, quae in dissertatione de re m
gravi occurrit.

Caput I.

Methodus indivisibilium.

renovato artium liberalium studio usque ad annum 1669.

1. Quum ineunte sexto decimo saeculo inter cidentales studium antiquitatis renatum esset, primum ius aetatis viri docti opera veterum quam plurima rterunt et annotationibus instruxerunt; deinde au- orum summorum ingenio quasi repleti easdem di- iplinas, quibus illi arctiore modo operam dederant, gressi et novas res et novas docendi rationes in- nerunt.

Id vero prae ceteris Mathematicis contigit. — ecentiores enim hujus disciplinae studiosi methodo nthetica, qua sola veteres usi sunt, relicta viam in- essi sunt magis analyticam, praesertim quum hoc so tempore Algebraica inventa esset, qua duce, quo- am ipsa per se est analytica, et ceterae mathema- es partes hac ratione facilius tractari potuerunt.

2. Primum opus nova methodo compositum valerii Itali est, qui anno 1635 Geometriam divisibilium scripsit. Docuit autem lege conti-

nuitatis tamquam primaria adhibita, curvas esse poly-
gona infinite multorum eorundemque infinite parvorum
laterum. Deinde, quum continuatam divisionem, qua
omnis inter figuras sive rectis sive curvis lateribus
compositas differentia tollitur, principium statueret, ad
quantitates geometricas metiendas pro linearum uni-
tate punctum, planorum lineam, solidorum planum
habuit.

Hac vero lege id, quod veteres argumentis indi-
rectis et methodo exhaustionis confirmare summa cum
opera studebant, Mathematicus recentioris aetatis multo
magis dilucide explicat.

3. Duae quaestiones erant, quae quamquam ma-
thematicorum studium inde ab antiquissimis tem-
poribus excitaverant, nihilo minus omnino solvi non
poterant; quarum altera erat:

1) Qua ratione generali tangentes ad quaslibet cur-
vas ducendae essent; altera:
2) Qua ratione generali lineae rectificarentur, plana
quadrarentur et solida cubarentur.

4. Singulae partes utriusque quaestionis jam me-
thodo veterum synthetica et methodo Cavalerii exci-
citae erant; Cartesius autem, auctor Algebraicae, pri-
mus solutionem prioris excogitavit, quae ex consi-
deratione indivisibilium adhibita analytica methodo
orta est.*)

Cartesius enim ex quodam axis curvae puncto
lineam rectam ducit, quae curvam ipsam duobus punc-
tis secat. Deinde aequationem loca persectionum ex-
primentem ita constituit, ut radices aequales sint,
quo facto linea ipsa tangens evadit.

---

*) Bossut, Histoire des Mathématiques. Tom. I. pag. 191.

5. Fermatius autem, qui methodum inveniendi maxima et minima et tangentes ducendi excogitaverat, usum rationis illius, a Cavalerio ad elementa geometriae illustranda adhibitae, ampliorem reddidit eo, quod utriusque quaestionis solutionem a se inventa ratione tentavit. *)

Functionem enim, cujus maximum aut minimum quaerendum est, eidem functioni, postquam variabilis quantitas quantitate indeterminata aucta est, aequalem ponit, et sublatis aequalibus aequatio incremento divisibilis restat, ex qua is valor quantitatis variabilis erui potest, quo substituto functionis primariae valor fit maximum aut minimum.

Quo eodem principio nititur quaestio tangentium. — In aequatione inter abscissam et ordinatam alicujus curvae abscissa augetur quantitate indeterminata, et nova ordinata simul curvae et tangentis ordinata esse putabetur.

Sint x et y coordinatae alicujus curvae et ejus subtangens $= t$ sit. Ex similitudine triangulorum sequitur

$$\frac{y\,(t+e)}{t}$$

aequale valori novae ordinatae et curvae et tangentis. E. g. sit

$$y^2 = ax$$

aequatio curvae, erit, quantitate x aucta

$$\left(y + \frac{ye}{t}\right)^2 = a\,(x + e).$$

sublatis aequalibus restat

$$\frac{2y^2}{t} + \frac{ey^2}{t^2} = a$$

et posito $e = o$ erit subtangens parabolae

$$t = 2x.$$

*) Lagrange, Leçons sur le calcul de fonctions.

6. Majores etiam progressus in quaestione de tangentibus fecit Robervalus.*)

Legem curvae esse legem motus perhibet, qua punctum quoddam et curvam et tangentem describat. Hoc enim punctum duabus ex aequatione curvae ortis celeritatibus moveri explicat, et in directionibus harum celeritatum parallelogrammum describit, cujus duo latera eadem ratione sese habent, qua celeritates ipsae, et axioma esse docet, directionem infinitae parvae partis curvae aut tangentis esse eandem ac directionem diagonalis. Exemplum est ellipsis, in qua quum summa duorum radiorum vectorum ex eodem puncto curvae ductorum semper sit eadem, atque propterea altero radio decrescente alter eadem quantitate augeatur, parallelogrammum celeritatum aequilaterum est, et tangens angulum externum in duas partes aequales dividit.

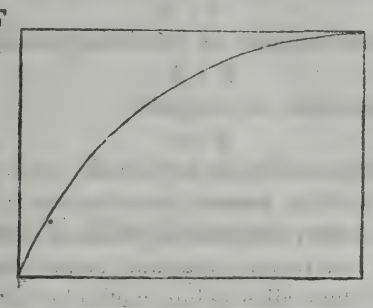
7. Nec minores progressus pars alterius quaestionis, scilicet quadratura, fecit. Fermatius, Cartesius et alii quadraturam parabolae cujuslibet gradus reverunt, iidemque mensi sunt corpora rotatione pla-, quod modo diximus, orta.

Methodus autem Robervali erat quidem methodus indivisibilium, sed aptior geometricae rationi. Statuit unitatem lineae lineam infinite parvam, unitatem aream infinite parvam, unitatem corporum sectionum infinite parvam.

8. Methodus indivisibilium ad finem quendam perducta est Arithmetica Infinitorum anno 1655 a Wallisio edita. Wallisius seriebus utitur, et summam earum primis et ultimis terminis exprimere studuit**)

*) Bossut, Histoire des Mathématiques. Tom. I. pag. 195.
**) Pag. 45. 15.

„Sit ADO planum semiparabolae et ADOF paral-



lelogrammum circumscriptum. Planum semiparabolae est series infinita radicum quadraticarum, completum parabolae aut residuum parallelogrammi est series infinita numerorum quadraticorum, parallelogrammum autem ipsum est series totidem maximae aequalium; quae omnia ex aequatione parabolae sequuntur.

Si autem proponitur series numerorum quadraticorum continuo increscentium a puncto vel o propositum sit, inquirere, quam habeat summa rationem ad seriem totidem maximae aequalium.

Fiat investigatio per modum inductionis, erit:

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{0+1+4}{4+4+4} = \frac{1\frac{1}{2}}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9} = \frac{2\frac{4}{6}}{30} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$$

et sic porro.

Ratio proveniens est ubique major, quam subtripla. Excessus autem perpetuo decrescit, prout numerus terminorum augetur, et tandem evanescit; itaque series numerorum quadraticorum ad seriem totidem maximae aequalium se habet, ut

Ergo etiam residuum ad parallelogrammum

1 : 3

et planum semiparabolae ad parallelogrammum ut

2 : 3;

et planum parabolae est aequale

$\frac{2}{3}$ xy.

Haec methodus etiam adhibenda est, si ordinat aequalis est cuilibet numero terminorum.“

Theoria interpolationis a Wallisio inventa, qu quadraturam curvarum, quarum aequationes, ut it dicam, inter duas alias prima methodo solutas posita sint, assequeretur, progressui methodi indivisibilium finem posuit.

9. Cavalerius secundum methodum suam conten platione geometrica natam, calculum comprobat; Ca tesius autem et Fermatius quantitatum geometricaru proprietates aequationibus algebraicis exprimente quaestiones, quas supra diximus, solverant, etsi rati nibus inter ipsas diversis.

Ex his autem Fermatii aequationum novaru derivandarum methodus prae ceteris est laudand quippe ex qua Calculus Differentialis ortus est.

Wallisius e numerorum proprietatibus et eorn relationibus perspicuis calculum suum probat. Ha est methodus rationum, et calculum integralem in continet.

In omnibus autem his methodis deficiente alg braicarum legum cognitione et contemplatio geon trica et lex continuitatis adhibetur, quapropter infi tum etiam inest in calculo.

Hic erat status disciplinae mathematicae anno 16 quo plures causae concurrunt, quae novam in histo Mathematices aetatem constituant.

Caput II.

Inventio Fluxionum et Differentialium.

Ab anno 1669 usque ad annum 1684.

A. Inventio Fluxionum.

1. Ex iis, quae supra diximus, sequitur, methodum divisibilium omnino non ad maximum gradum perfectios fuisse excultam. Quamquam per eam omnes quaestes, quae postea calculo differentiali adhibito solutae nt, explicari poterant, tamen eum finem non assecuta t, quem consequi potuit.

Quantos autem fructus methodus analytica affert, in dies magis apparuit eo ipso, quod latius dilgatum est studium ejusdem, neque alia re ulla ius erat, nisi homine ingenio praedito, qui illam in edium proferret. Hic erat Neutonus; in tractatu, ii inscriptus est:

„De analysi per aequationes numero terminorum infinitas.“

ndamentum novae aetatis Neutonus posuit.*)

Non solum autem mathesis pura tam feliciter suc-

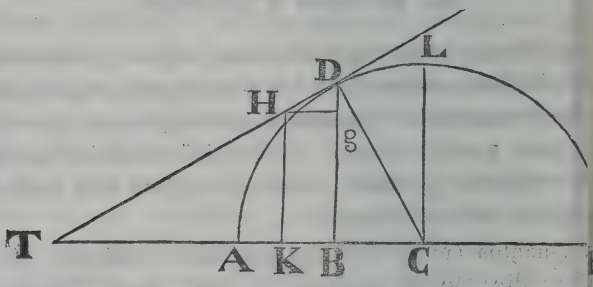
*) Commercium epistolicum. pag. 15.

essit eum ad finem, quo nunc tantos fructus praeb sed etiam applicata. In mechanica enim a Wallis aequalitas momentorum in statu aequilibrii pro pr cipio habetur. Momentum autem illo tempore do bant esse id, quod vis celeritate sua efficit.

2. Neutonus leges motus ad describendas qu titates geometricas applicavit, et easdem ex momen definire et metiri studuit, qua de causa calculus, e quo in tractatu ipsius agitur, calculus per mome vocari potest.

Primum problema, ut longitudo curvae alicu inveniatur, hoc modo solvitur:

„Sit ADLE circulus, cujus arcus AD longitudo st indaganda.



Ducta tangente DHT, et completo indefinite p rectangulo HBGK et posito $AE = 1 = 2\ AC$, er

$$BH : HD = BD : DC,$$

aut

$$x : HD = \sqrt{x - x^2} : \tfrac{1}{2}$$

et

$$HD = \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}} = \frac{\sqrt{x - x^2}}{2x - 2x^2}$$

momentum arcus, quod reductum fit:

$$\tfrac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{4}\, x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{3}{16}\, x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{5}{32}\, x^{\frac{5}{2}} + \tfrac{35}{256}\, x^{\frac{7}{2}} \ldots$$

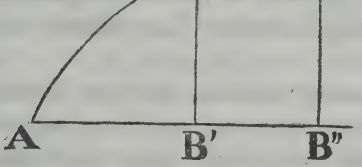
Quare per regulam, ex qua quaelibet quantitas momento suo perpetim dato elicitur, est longitudo us AD

$$= x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{6} x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{40} x^{\frac{5}{2}} + \tfrac{5}{112} x^{\frac{7}{2}} + \tfrac{35}{1152} x^{\frac{9}{2}} + \tfrac{63}{352} x^{\frac{11}{2}} + \ldots$$

ec est regula calculi integralis.

Alterum problema, ut quadratura curvae alicujus eniatur, hoc modo inverso solvitur:

„Sit curvae alicujus AD basis AB = x, perpendiculariter applicata BD = y, et area ABD = z.



n sit B'B'' = e, B'K = v et rectangulum B'B''HK (f) aequale spatio B'B''dD.

Si generaliter $\frac{n}{m+n}$ a x $^{\frac{m+n}{n}}$ = z sive ponendo

$\frac{a}{+n}$ = c et m + n = p, si cx $^{\frac{p}{n}}$ = z aut $c^n x^p = z^n$:

n (x + e) pro x et z + ev pro z substitutis, prodit:

$$\left(x^p + pex^{p-1} \ldots\right) = z^n + nez^{n-1} \ldots$$

Jam sublatis $c^n x^p$ et z^n aequalibus reliquisque e divisis, restat, si supponamus, B'B'' in infi-

nitum deminui et evanescere, sive e esse nihil $c^n p x^{p-1} = n y z^{n-1}$ (quod proinde $v = y$ est. Restituendo fiet $a x^{\frac{m}{n}} = y$. Quare e contra, si $a x^{\frac{m}{n}} = y$, erit $\frac{n}{m+n} a x^{\frac{m+n}{n}} = z$.

His problematibus Neutonus addidit has annotationes:

a. „Sed notandum est, quod unitas ista, quae pro momento ponitur, est superficies cum de solidis, linea, cum de superficiebus et punctum cum de lineis (ut in priori exemplo) agitur.

b. Nec vereor loqui de unitate in punctis, sive lineis infinite parvis, si quidem proportiones ibi jam contemplantur geometriae, dum utuntur methodo indivisibilium.“

3. Neutonus calculum suum ex methodo indivisibilium et aequationes momentorum ex aequationibus incrementorum comprobat, quare incrementum infinitum deminuitur.

Mihi vero Neutonus recta notione celeritatis aruisse videtur. Celeritas enim est ratio inter spatium et tempus omissis omnibus viribus, ergo pars tangentis, quae eadem est momentum arcus. Inde sequitur, trapezium, quod duabus ordinatis et incremento abscissae et momento arcus determinatur, esse momentum areae.

Ex his notionibus calculus per momenta sine infinito parvo adhibito demonstrari potest.

4. Postea Neutonus in epistola ad Collinum 172 hanc solutionem quaestionis tangentis publicavit.*)

*) Commercium epistolicum.

„Aequatio, qua curva ipsa determinatur, sit:

$$x^3 - 2x^2y + bx^2 - b^2x + by^2 - y^3 = o.$$

Regula ducendi tangentem haec est: multiplica quationis terminos per quamlibet progressionem thmeticam juxta dimensiones y, puta:

$$\begin{array}{cccccc} x^3 & -2x^2y & +bx^2 & -b^2x & +by^2 & -y^3: \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

juxta dimensiones x, puta:

$$\begin{array}{cccccc} x^3 & -2x^2y & +bx^2 & -b^2x & +by^2 & -y^3. \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Prius productum erit numerator, et posterius di- um per x denominator fractionis, quae exprimet otangentem

$$= \frac{-2x^2y + 2by^2 - 2y^3}{3x^2 - 4xy + 2bx - b^2}.“$$

Latius hanc momentorum methodum exposuit Neu- us in opere inscripto „Methodus fluxionum.“

5. Per hoc opus calculus novus pars purae ma- matica factus est. Quantitates ipsae nominantur ientes, celeritates fluxiones, et celeritas mul- licata indefinite parva quantitate momentum.*)

Axioma est: Momenta esse in eadem ratione, celeritates. Inde aequatio fluxionum ex aequatione entium derivatur, indefinite parva quantitate = o ita.

Investigatio fit hoc modo:

„... si productum celeritatis $\dot{x}$ quantitate indefi- parvo o, i. e. si $\dot{x}o$ exhibet momentum quantita- qualiscunque x, momenta reliquarum v, y, z erunt $\dot{y}o$, $\dot{x}o$, quoniam $\dot{v}o$ $\dot{y}o$ $\dot{x}o$ $\dot{z}o$ eadem ratione sese ent, qua $\dot{v}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{z}$.

*) The Methode of fluxions.

Deinde quum momenta, uti $\dot{x}o$, $\dot{y}$, incrementa seu augmenta sint indefinite parva quantitatum fluentium x et y inter temporis intervalla indefinite parvi sequitur, istas quantitates fluentes x et y post temporis intervallum indefinite parvum fieri $x + \dot{x}o$ $y + \dot{y}o$, atque eandem ob causam aequatio, quae omni tempore pariter exprimit, relationem quantitatum fluentium, relationem inter $x + \dot{x}o$ et $y + \dot{y}o$ aeque exprimet, ac inter x et y; quare substituere potemus, in eadem aequatione $x + \dot{x}o$ et $y + \dot{y}o$ pro x et y. Sit ergo proposita aequatio quaecunque $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = o$; si substituimus $x + \dot{x}o$ pro x, et $y + \dot{y}o$ pro y habemus

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3 \\ -ax^2 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2o^2 \\ +axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2 \\ -y^3 - 3\dot{y}ox^2 - 3\dot{y}^2o^2y - \dot{y}^3o^3 \end{array}\right\} = o.$$

ex qua fit aequatio fluxionum

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = o$$

posita indefinite parva quantitate aequale nihilo."

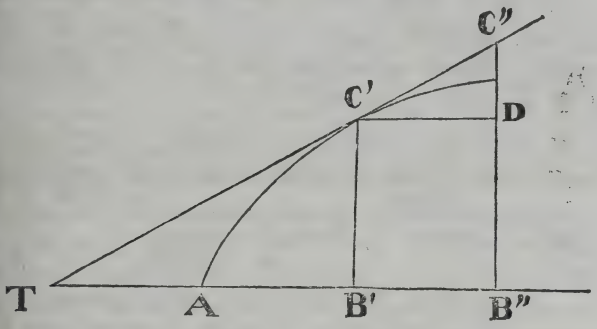
Opus, quod diximus, etsi mathematicis non ignotum, 1730 tandem in anglicam linguam ex latina translatum editum est, unde certamen inter Newtonum et Leibnitium, uter prior invenerit calculum novum, ortum est.

B. Inventio Differentialium.

6. Inventio Neutoniana, de qua in prooemio hujus capitis diximus, excitavit inter doctos viros commercium epistolicum, cui etiam Leibnitius, qui hoc tempore per Angliam et Francogalliam iter fecit, se adjunxit.

7. In secunda epistola ad Oldenburgum cum Neuno communicanda Leibnitius anno 1677 rem tanntium per differentias ordinatarum tractat.

Sit*) enim



B′ ad B′C′, ut C′D ad C″D. Nec refert, quem ngulum faciant ordinatae ad axem. Unde patet, hil aliud esse invenire tangentes, quam invere differentias ordinatarum positis differentiis abissarum, si placet, aequalibus. Hinc nominando in osterum dy differentiam duarum proximarum y, et x differentiam duarum proximarum x (hae differenae postea differentialia nominantur), patet, dy^2 esse ydy, $dy^3 = 3y^2dy$ et ita porro. Nam sint duae sibi roximae ordinatae y et $(y + dy)$. Quoniam ponimus, y^2 esse differentiam quadratorum harum duum rectarum, aequalis erit $dy^2 = y^2 + 2ydy + dydy - y^2$. Seu omissis $y^2 - y^2$, quae se estruunt, item ommisso quadrato quantitatis infite parvae (ob rationes ex methodo de maximis et inimis notas) erit $dy^2 = 2ydy$. Idemque est de

*) Commercium epistolicum.

ceteris potentiis. Hinc etiam haberi possunt differentiae (differentialia) quantitatum ex diversis indefinitis in se invicem ductis factarum, ut dxy erit $= ydx + xdy$, et $dy^2x = 2xydy + y^2dx$. Hinc si aequatio est:

$$a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x = o.$$

perinde habetur tangens curvae, ad quam est ista aequatio. Nam in aequatione illa pro y et x substituendo $y + dy$ et $x + dx$; fiet

$$\left.\begin{array}{l} a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x \ldots . \\ \overline{bdy + cdx + dydx + 2eydy + 2fxdy + 2gxydy} \\ \qquad + dxdy \qquad\qquad\qquad + gy^2dx \\ \overline{ddxdy + edydy + fdxdx + gxdydy} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 2gydydx \end{array}\right\} = o$$

Ubi sublatis illis, quae sunt supra primam lineam quippe nihilo aequalibus secundum aequationem praecedentem; et illis, quae sunt infra secundam, quia in illis duae infinite parvae in se invicem ducuntur restabit $bdy + cdx + dydx + dxdy + \ldots$ et mutata aequatione in rationem

fiet: $-\frac{dy}{dx} = \frac{c + dy + 2fx + gy^2. -}{b + dx + 2ey + 2gxy \ldots .} = \frac{TF}{B,I}$

8. Brevi post 1684 Leibnitius in dissertatione inscripta:

„Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantates moratur, et singulare pro illis calculi genus“

et in actis eruditorum publicata, rem aliter explicat, contendens, maxima et minima esse constantes quantitates, quarum differentialia $= o$ sint; eadem de causa esse ulteriores dimensiones incrementi negligendas. *)

*) Acta eruditorum, pro anno 1684.

9. Ex iis, quae demonstravimus, apparere putamus, ıam diversus sit calculus Neutonianus a calculo Leibtiano. Leibnitius enim comprobat doctrinam suam etaphysi Infiniti, qua eadem calculus integralis nitir; Neutonus autem ad utramque calculi quaestionem ılvendam hac lege nititur: celeritates sese eadem raone habere, qua momenta. Quae lex quam perspicua t, nemo non intelliget. Namque ad describendas geoetricas quantitates non viribus, sed celeritatibus solum ous est; et vires et momenta earum aequalia sunt nihi, nequaquam vero momentorum rationes, qua de causa ıxiones non sunt infinite parvae, ut differentia Leibtii. In priori quidem opere, quo calculum ex lege ntinuitatis demonstrat, Neutonus incrementa infinite ırva putat, in altero autem sunt fluxiones qualescunıe, propterea quod calculus ex momentis demonstratur.

Hanc methodorum diversitatem qui perspexerit, on dubitabit, quin uterque virorum summorum ipse am methodum invenerit, neque alterius inventionem la ratione antea aut cognoverit aut adhibuerit.

Caput III.

Metaphysis Calculi Transcendentalis.

Ab anno 1686 usque ad annum 1797.

1. Transcendentalis calculi inventoribus sua ipso rum principia non placuisse, inde maxime appare quod uterque theoriam suam immutavit, et sic met physeos, quae inest in calculo novo, auctor factus es Quem admodum vero hujus calculi inventio dupli ratione evenit, ita ejus quoque metaphysis in duas di tribuatur partes oportet:

A. Metaphysin fluxionum;

B. Metaphysin differentialium.

A.

2. In prooemio „principiorum mathematicorn anno 1686 editorum" Neutonus pro methodo flux num methodum primarum et ultimarum rationum instituit, qua fluxiones confirmaret. Principium, co nititur haec methodus, est:

*) Principia Mathem., pag. 26.

„Quantitates, ut et quantitatum rationes, quae ad equalitatem dato tempore constanter tendunt et eo acto propius ad invicem accedere possunt, quam pro ata quavis differentia, fiunt ultimo aequales.“

Hac re autem novus calculus perfectionem, quam ynthesis consequi potest, assecutus est: principia perpicua, argumenta accurata et evidentia. At haec meodus non solum nimis indirecta est, quam ex qua octrina universalis percipi possit, sed etiam univeram ejusmodi calculus auctoritatem habere nequit, uippe qui nonnisi ex figurarum geometricarum conemplatione et motuum relatione derivatus sit.

Jam vero huic methodo non omnes functiones equalitatis rationi se appropinquare posse, ideoque esse alsam, objecerant.

Quod ut in universum refutemus, sit quaedam nctio quanti variabilis, idque augeatur quantocunque ncremento, inde evenit functio ejusdem generis; sin ero incrementum nihilo aequale posuerimus, functio rgo functionem aequalitatis ratione sese habet.

Hic est sensus principii Neutoniani, quod praeterea ecem lemmatum fundamentum est, quae singula exendere huc non pertinet.

3. Quantam vero difficultatem praebeat, fluxiones n universum probare, et quot argumenta fallacia adibenda sint, maxime apparet ex libro quodam Maclaurini*), qui calculum totum veterum methodo onfirmare studet. — Principiis utitur hisce:

a. si duo genera motus, accelerati et uniformis odem tempore perfecti comparantur, spatium illius ajus est quam hujus;

*) Wrede's höhere Mathematik. Einleitung.

b. eodem tempore motus acceleratus minus spatium percurrit, quam uniformis celeritate ea, quam ille sub finem adeptus est;

c. spatium retardati motus minus est, quam uniformis eodem tempore peracti ea autem celeritate, quam ille sub initium habuit.

d. spatium retardati motus majus est, quam uniformis eodem tempore peracti celeritate vero, quam ille sub finem adeptus est.

4. Principia vera esse, nemo infitiabitur; nequ minus bene finem, quem petit, ut in omnibus motu generibus forma functionis celeritatis constituatur auctor assequitur, quam Neutonus methodo primarum et ultimarum rationum adhibita. At artificiosior es ratio et molestior longiorque, quam quae doctrina fundamentum esse possit, qua de causa nobis videtu sufficere accuratiore omissa expositione, principia enu merasse, ex quibus cetera praecepta, etsi indirect demonstrantur, e. g. esse

$$\text{fl. } A^a = aA\, da,$$

posita

$$\text{fl. } A = da.$$

B.

5. Sunt Mathematici, qui negent, Infinitum int matheseos praecepta exhiberi posse, quippe quae ev dentia niti oporteat; propterea multi jam Leibnitii m thodum probare conabantur. Illud vero infinite pa vum mutabant in indefinite parvum, et e „Commerc Epistolico“, quod Leibnitio cum Joanno Bernoull erat aliam differentialis definitionem quaerebant, a firmantes, Leibnitum differentiam constantem serieru

rithmeticarum differentiale nominasse; et id, quod ulgo differentiale nominaretur, nil aliud esse, nisi haracterem differentialis et primum terminum seriei ifferentiarum.

Sed Leibnitii inventio calculi integralis nos edo- et, quo sensu differentiale sumpserit. Integrale enim ummam intelligit, unde sequitur, differentiale esse nfinite parvum, si quidem calculo ista ratione adhi- ito verum assequi volumus. Et tota Leibnitii metho- us nil aliud est, nisi indivisibilium analytica methodus.

Quum notio quantitatis infinite parvae et necessi- as negligendorum in aequationibus differentialibus erminorum hucusque doctos offenderit, difficultates tas effugere studuere; unde duae inter se maxime onjunctae theoriae ortae sunt: Methodus Limitum et lethodus Nihili, quarum celeberrimi homines erant uctores, D'Alembertus*) et Eulerus**). Nec desunt llo tempore defensores assentatoresque.

Principium utriusque methodi est, non differen- ialia ipsa, sed eorum rationes spectare, et calculus ifferentialis est ars, ut ita dicam, rationes variabiles onstantibus metiendi.

Quum aliquantum inter se hae methodi differunt, uxta positas comparemus.

I. Methodus Limitum.

7. Haec sunt principia, quibus aequationes dif- erentiales derivantur, et calculus ipse probatur:

a. Limites cujusque quantitatis sunt nihil (o) et nfinitum (∞).

*) Encyclopédie art. Différentiel. Limite.

**) Institutiones Calculi Differentialis.

b. Limes rationis duarum quantitatum veriabilium est ea ratio, cui prior eo magis se appropinquat, quo majores aut minores quantitates ipsae fiunt;

c. Differentialia sunt rationes incrementorum conjunctorum, quae non ex quantis incrementorum, sed tantum ex ipsis quantitatibus dependent. Ut autem ratio incrementorum sit eadem, quae quantitatum, incrementa ipsa nihilo aequalia putanda sunt.

Quibus Principiis haec corollaria accedunt:

α. Characteres vero differentialium omnino non quantitates ne infinite parvae quidem habendae sunt; nam ita aequatio appropinquans aequationi integrae aequalis putatur;

β. Neque nihilo aequalia putanda sunt differentialia, quia sunt partes differentiae;

γ. Ubi vero quantitatum series continuata est cogitanda, infinite parva cogitare differentialia licet;

δ. Differentialia sunt tantum inter se comparabilia incrementa proximorum terminorum continuatae seriei.

8. Methodus limitum arctissimae cohaeret cum methodo fluxionum; in utraque enim ratio constans incrementorum quaeritur, quae quidem ratio in altera methodo limes vocatur, in altera vero celeritas.

Etiam magis igitur methodus limitum Neutoni methodo primarum et ultimarum rationum conjuncta est nisi quod haec geometricis praeceptis nititur, illa vero in universum ex functionibus ipsis oritur, in hac ratio functionum ipsarum, in illa vero ratio incrementorum quaeritur.

II. Methodus Nihili.

9. Id quod in methodo limitum latet, differentialia aequalia nihilo esse, in theoria nihili principium

st, quae ipsa incrementorum rationem spectat, et ra-ones variabiles constantes reddere studet. Haec atio exhibetur forma indefiniti

$$\frac{0}{0}$$

Ac re vera hanc expressionem eam esse formam, uam omnis functio, ut formam mutet, pergredi de-eat, Algebraica ipsa docet.

Principia, quae hanc methodum adjuvant, et cal-ulum probant, sunt:

a. Quidque differentiale est omnino aequale nihilo;

b. Ratio duorum differentialium est indefiniti, et aec ratio est maxime universalis, omnes functiones t numeros et ipsum nihilum et infinitum complectens;

c. Calculus differentialis est ars, ex aequationibus uantitatum ipsarum rationem incrementorum, post-uam aequalia nihilo posita sunt, inveniendi;

d. Nihilum nihilo non semper est aequale, qua e causa singulae functiones habent singula differen-alia, quae sunt certis notis discernenda;

e. Secunda differentialia sunt differentialia primo-um. Etsi enim omnia sunt aequalia nihilo, alia tamen atio eorum aequalis nihilo, alia constanti quantitati, lia variabili quantitati aequalis est.

Haec principia esse verissima infra apparebit; aque non necesse est, de iis pluribus verbis dis-utare.

10. Utraque methodus et Limitum et Nihili propius ccedit ad calculum Neutoni quam Leibnitii. Cum oc enim nihil illis commune est, nisi incrementa in-nite parva, vel potius ea ratio, qua incrementa aequa-a nihilo esse putantur. Idem autem illis inest prin-ipium, quod calculo Neutoni: ratio, qua quantitates

ipsae pariter sese habent atque incrementa, quorum loco Neutonus momenta statuit.

Quum autem utraque methodus ex calculo differentiarum orta esse videtur, quaedam de differentiarum calculo ipso disseramus.

11. Si functionis variabilis quantitas aliquovis incremento augetur, eadem oritur functio diversi verc valoris quantitatis. Differentia ambarum functionum vocatur incrementum primitivae functionis. Calculus primitivarum functionum et earum differentiarum vocatur Calculus Differentiarum.

Primi ejus inventores Barrowius et Leibnitius incrementum, ut jam supra diximus, in infinitum demi nutum esse statuerunt, et aequationes differentiales excogitarunt, quibus differentias ipsas exprimerent.

Postea differentiae quanta finita habitae sunt, e ex calculi differentialis imitatione novus finitarum differentiarum calculus ortus est, quem primus docu Taylorus in libro, qui inscriptus est: Methodus Incrementorum.

Quum novae functiones ita oriantur, ut variabil quantitas paribus incrementis augeatur, non solu functiones inde ortae, sed etiam variabiles ipsae s rierum arithmeticarum leges sequuntur. Quod ut ap pareat functionum series sit:

$$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \ldots *)$$

et variabilis congrua series:

$$x, \quad (x+k), \quad (x+2k), \quad (x+3k) \ldots$$

deinde erit:

$$y_1 = y + \Delta y$$
$$y_2 = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$$
$$y_3 = y + 3\Delta y\ 3\Delta^2 y + \Delta^3 y$$

*) Lagrange, Leçons sur le calcul des fonctions.

generaliter:

$$y' = y + m\Delta y + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\Delta^3 y \ldots$$

Haec series est illa functio derivata, quae respondet quantitati $(x + mk)$.

Si porro $mk = \omega$ ponamus, erit:

$$y' = y + \omega\frac{\Delta y}{k} + \frac{\omega(\omega-k)}{1.2}\frac{\Delta^2 y}{k} + \frac{\omega(\omega-k)(\omega-2k)}{1.2.3}\frac{\Delta^3 y}{k^3}$$

Hac series, quam primus Neutonus in libro, qui inscriptus: „Principia Mathematica“ sub finem sectionis de cometarum cursu exhibuit, postea Taylor ita usus est, ut differentiam k in infinitum deminuam et aequalem dx esse statuerit.

Si tum k, 2k, 3k, . . . cum ω collata tolluntur, fit:

$$y' = y + \omega\frac{dy}{dx} + \frac{\omega^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\omega^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} \ldots$$

quod theorema Taylorianum nuncupatum est.

Censebant igitur, differentias finitas reddi posse minutas, quo calculus non minus accuratus evadet, si omissis in infinitum deminutis terminis in calculum differentialem transit. Inde theoria limitum oriebatur, qua ratio infinite parvarum differentiarum limes rationis finitarum differentiarum, et aequationes differentiales limites aequationum differentiarum finitarum habentur. Ergo est:

$$\lim.\ (y' - y) = \omega\frac{dy}{dx}.$$

12. Notemus hanc seriem, quam supra diximus, hac ratione:

$$f(x + \omega) = fx + \omega\frac{\Delta fx}{k} + \frac{\omega(\omega-k)}{1.2}\frac{\Delta^2 fx}{k^2} \ldots$$

Deinde est:

$$\Delta fx = f(x+k) - fx$$
$$\Delta^2 fx = f(x+2k) - 2f(x+k) + fx$$

etc.

quantumcunque k est. Si statuimus

$$k = o$$

singuli termini ultimae seriei fiunt:

$$\frac{\Delta fx}{k}, \frac{\Delta^2 fx}{k^2}, \frac{\Delta^3 fx}{k^3} \ldots = \frac{o}{o},$$

Et si hae rationes indefinitae definiuntur, quod i hac methodo sine calculo differentiali adhibito proba dum est; redeunt isti termini in has expressiones:

$$\frac{dfx}{dx}, \frac{d^2fx}{dx^2}, \frac{d^3fx}{dx^3}, \ldots$$

et illa series erit:

$$f(x+dx) = fx + \omega \frac{dfx}{dx} + \frac{\omega^2}{1.2} \frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{\omega^3}{1.2.3} \frac{d^3fx}{dx^3} \ldots$$

Inde sequitur, eos, qui ex Euleri auctoritate d ferentialia re vera = o docebant, ideoque ration eorum = $\frac{o}{o}$ dicebant, omnino non repugnasse Analy

Series autem, quam modo invenimus, valorem primit quantitatis fx, quum x auctum est quantitate i. e. series a Tayloro composita tum demum perfe est, quum incrementum infinite parvum seu aequ nihilo perhibetur. Quam quidem proprietatem natur esse Taylorianae seriei diu putabant, qua eadem causa principio erat et methodo limitum et theore nihili.

Lagrangius *) primus rationem explicandi hu theorematis directam invenit, qua incrementum aequ est quantitati cuilibet.

*) Théorie des Fonctions Analytiques et Leçons su le Calcul des Fonctions.

Quum omnibus, quas hucusque explicavimus, theo-
ratio et usus infinite parvi insit, quapropter
tissime cohaerent methodo indivisibilium, Lagrangius
em, prioribus theoriis calculi differentialis omissis,
a principia detexerit, quae et leges aequationum
erentialium derivandarum et calculum ipsum com-
bant: procul dubio a Lagrangio incipit nova Ma-
seos aetas.

Caput VI.

Functiones Derivatae.

Ab anno 1797 usque ad nostram aetatem.

1. Ex omnibus, quae hucusque de principiis cal-
differentialis exposuimus, apparet, novam quan-
theoriam eamque universalem fuisse inveniendam,
e, omnibus principiis veris quidem, sed non ne-
sariis neque huc pertinentibus rejectis, id tantum-
lo complectatur, quod omnibus theoriis inest, nec
lquam nisi veram differentialis naturam constituat.
Eulerus, Vir Clarissimus, jam judicavit, id, quod
erentiale nominatur incremento posito = o, nil
functionem derivatam significare, quando incre-
tum sit quantitas finita seu determinata. Innuitur
ratione quoddam, quod eodem modo, quo differen-
, invenitur, ex Euleri autem sensu non differen-
ipsum putatur.
Quodsi methodus fluxionum Neutoni et theoria
ite parvi Leibnitii vera est, contradicunt quodam

modo hae theoriae Euleri placito, quoniam isti viri id ipsum egerunt, ut demonstrarent reale quoddam esse differentiale quamvis infinite parvum.

Id quidem Lagrangium effugere non potuit, virum hujus calculi historiae peritissimum, qui bene perspexerit, et ex theoria Neutonia non satis apparere, qui sit celeritas, et ex theoria Euleriana propter indirectam derivationem theorematis Tayloriani, ut differentiale nihilo aequale putaretur, necessario sequi.

Neutonus enim functionem ergo etiam notionem celeritatis ex differentia incremento in infinitum de minuto derivavit; Lagrangius vero, priusquam se a inveniendam differentiam accinxerit, notione vera ce leritatis perspecta, inversa via procedere, atque sin ulla conditione eam differentiae partem designare pe tuit, quae celeritatem exprimit; neque vero ampli hac ratione necessarium fuit, ut infinite parvum Geometria et Mechanica adhiberetur, qua de re inf disputabimus.

Ex his autem, quae diximus, apparet, non solu debere, sed posse quoque novam theoriam calcu differentialis inveniri.

Quum praecipue differentias Mathematici ass qui solerent, hoc autem via prolixa neque satis cla derivatum esset, aliam ingressus est Lagrangius ea que directam, omniumque ambagum expertem, om id, quod et in methodo limitum et in theoria Eule ana adhuc incertum erat, delevit.

2. Lagrangius alterum theorema hoc statuit:

Omnis functio variabili increscente in serie d incrementi potentiarum ordinem composita erui pote id est:

$$f(x + k) = fx + pk + qk^2 + rk^3 \ldots$$

Coefficientes hoc modo investigabuntur:

Si ponas in hac aequatione primum $(k+e)$ pro k, deinde $(x+e)$ pro x, et componas ambas expressiones ad dimensiones k et e, aequales erunt et identice quidem. Est:

$$\begin{aligned} f(x+(k+e)) &= fx + p\,(k+e) + q\,(k+e)^2 + \ldots \\ &= fx + pk + qk^2 + qe^2 + \ldots, \\ &\quad + pe + 2qke + \ldots \\ &\quad + \text{ect.} \end{aligned}$$

Ut alteram substitutionen exsequamur,

$$fx + f'x.e \ldots p + p'e \ldots q + q'e \ldots$$

correspondentes

$$fx \qquad p \qquad q \ldots$$

erit:

$$\begin{aligned} [(x+e)+k] &= fx + pk + qk^2 + \ldots \\ &\quad f'x.e + p'ke + \ldots \\ &\quad \text{ect.} \end{aligned}$$

Quoniam autem ambae series prorsus non differunt, quorumcunque valorum sunt k et e, erit:

$$p = f'x,\ 2q = p,\ 3r = q, \ldots$$

Perspicuum vero est, ut $f'x$ est primaria functio derivata ex fx, sic p' fore primariam functionem derivatam ex fx. Analogiae et brevitatis causa primariam quoque functionem derivatam ex $f'x$ ponemus $f''x$; eodem modo sit $f'''x$, etc. quo fit:

$$f(x+k) = fx + kf'x + \frac{k^2}{1.2} f''x + \frac{k^3}{1.2.3} f'''x \ldots$$

Hae functiones derivatae sunt quotientes differentiales, et series ita scribi potest:

$$f(x+dx) = fx + \frac{dfx}{dx}.\,dx + \frac{d^2fx}{dx^2}.\frac{dx^2}{1.2} + \frac{d^3fx}{dx^3}.\frac{dx^3}{1.2.2} \ldots$$

4. Praecipue in hac serie notandum est:

a) Omnes terminos simulac $k = o$ positum est, et plus evanescere; unde sequitur illud maximi momenti theorema:

Quantitas k tam parva esse potest, ut quicunque terminus sit major, quam omnium terminorum sequentium summa;

b) Perspicuam esse legem, ex qua termini inter se et ex functione primitiva dependent; quae lex est

Quo prima derivatio ex functione primitiva derivatur, eodem modo quicunque terminus ex praecedenti

5. Illa proprietas primum inservit, ut prima derivatio constituatur, et ex hac omnes ceterae; deinde e ea in applicandis functionibus derivatis argumentatio nes et integra limitum functionum theoria derivantur

Ex secunda autem proprietate tota veritas, to utilitas calculi differentialis sequitur, quoniam ex apparet, quemque terminum esse functionem cuju que alius aut functionis ipsius primitivae, et eande esse legem, ex qua singuli termini ex singulis i veniantur.

6. Ut functionum derivatarum utilitatem pers ciamus, sint priores tres termini intuendi:

$$Z = fx + k\frac{dfx}{dx}.$$

Nemo non intelliget, hanc partem seriei esse aeq tionem lineae rectae, quae per id curvae punctum, qu abscissae x respondet, ducitur atque cum hac linea gulum efficit, cujus tangens est

$$\frac{dfx}{dx}.$$

Quum autem isti duo termini ordinatae lineae rec primi quoque duo termini ordinatae curvae sint, fi non potest, ut alia linea inter illam et curvam inter itaque illa linea est tangens.

Eodem modo intelligi potest, primos quatuor t minos esse aequationem parabolae tangentis.

In applicando calculo differentiali arti mechanicae lem ratione demonstrari potest, primum differentiale e celeritatem, et secundum vim accelerationis.

Hoc autem jam sequitur ex celeritatis et virium ac- eratarum notionibus cum differentialis notione, quam ibet geometria, conjunctis, quod directio celeritatis directio tangentis, et vis accelerata secundum pa- olae legem increscit.

7. Sed quamvis principia functionum derivatarum grangii omnino non dubia esse viderentur, tamen i deerant, *) qui ea impugnari posse arbitrarentur, ue duas maxime ob causas:

a) argumentationes, quibus Langrangius theoriam dat, et applicatio ejus in geometria et mechanica, differentiale non per derivationem ex functione dam proposita, sed ex comparatione et contempla- ie quantitatum quaeritur, accuratius pervestigantur; dem, quae ex theoriis prioribus, difficultates pro- nt;

b) quamvis theoria functionum derivatarum ma- a cum cura infinite parvum evitare conetur, tamen geometria refugere ad id ipsum cogitur; hanc ob sam non praestat methodis ceteris, quae infinite vum principium fecerunt.

8. Haec vero argumenta ita refutari posse pu- us. Ut calculus differentialis infinite parvo vacet, lex ratio ineunda est:

a) Theorema Taylorianum derivandum est ratione nite parvi non adhibita;

b) Calculus differentialis adhibendus est infinite vo omisso.

Prius illud Lagrangius assecutus est seriei lege qualicunque incrementi valori constituens, et tanti quaerendarum causa coefficientium, incrementum qu lecunque aequale nihilo ponens.

Ad hoc igitur argumentationis a Wredio exhibit prior pars spectare potest, quae nunc vero nulla i detur.

In adhibendo vero calculo differentiali Lagrangi eadem ratione agit, qua in derivanda serie Tayloria sive aequationem differentialem ex contemplatio aut comparatione quantorum, geometricarum figuram rationumve in mechanica derivat, sive ex functio jam cognita ad aliud functionum genus progredi Lex continuitatis, quae est in prima proprieta seriei Taylorianae, Lagrangio dux est. V. c. ut ni mam areae derivationem definiat, incrementi limes constituit. Sit fx ordinata alicujus curvae, erit ea Fx; si autem abscissa increscit quantitate k, ordinata fiet f (x + k) et area F (x + k). Incrementum vero areae erit:

$$F(x+k) - Fx = \frac{dFx}{dx} \cdot k + \frac{d^2Fx}{dx^2} \cdot \frac{k^2}{2} + \ldots$$

Limes incrementi erit:

$$\frac{dFx}{dx} = fx$$

id est:

Prima derivatio areae est ordinata.

Argumentationes theoriae Lagrangii contrarias refutatas putamus.

9. Quamquam theoriam Lagrangii propter simplicitatem et perspicuitatem principiorum praestantissimam habemus, id tamen superfluum esse putamus

quod nonnisi rationes differentialium definiat. Differentialia ipsa mihi definienda videntur. At Lagrangius iam viam ingredi coactus est, quia in derivanda serie Taylorіana incrementum, quod qualecunque est, aequale nihilo ponere debebat primae derivationis acquirendae causa, qua de re et rationem incrementorum aliberi necesse erat. Quibus de causis seriei Taylorinae derivationem ex calculo differentiarum praetimus.

Ne quid temere huc afferamus et ut dissertatio stra integrum quoddam efficiat, in ultimo capite seiei Taylorianae derivationem ex calculo differenrum explicabimus.

Caput V.

Principia Calculi Differentialis t Differentiis Derivata.*)

1. Sit aliqua functio quantitatis x data, et in e menta ejus constituant progressionem arithmeti unde oriantur novae functiones, quas derivatas n nemus. Hae functiones exprimantur per X cum dicibus

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & & X_2 & & X_3 & & X_4 \quad X_5 \ldots \\ & \Delta X_1 & & \Delta X_2 & & \Delta X_3 & \Delta X_4 \ldots \\ & & \Delta^2 X_1 & & \Delta^2 X_2 & & \Delta^2 X_3 \ldots \\ & & & \Delta^3 X_1 & & \Delta^3 X_2 \ldots & \end{array}$$

Ex hoc schemate quaelibet differentia primi va functionis erui potest, ita ut fiat:

$$\Delta^m X_1 = X_{m+1} - mX_m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} X_{m-1} -$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} X_{m-2} \ldots$$

*) Aus eigenen Heften nach Desberger's Vorlesungen.

g. sit $X_1 = x^n$, et incrementum quantitatis x sit x; ex aequatione superiori fit:

$$\overset{m}{\Delta} x^n = (x + m\Delta x)^n - m\,[x + (m-1)\,\Delta x]^n + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,[x + (m-2)\,\Delta x]^n \ldots$$

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,[n-(m-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m}\,x^{n-m}\Delta x^m$$

$$[1^m - m(m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}(m-2)^m - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(m-3)^m \ldots]$$

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-m)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m+1}\,x^{n-(m+1)}\Delta x^{m+1}$$

$$[1^{m+1} - m\,(m-1)^{m+1} + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,(m-2)^{m+1} - \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,(m-3)^{m+1} \ldots]$$

$\ldots$

Terminus generalis erit:

$$\overset{m}{\Delta}_p x^n = \frac{n(n-1)(n-2)\,\ldots\,[n-(p-2)]}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(p-1)}\,x^{n-(p-1)}\Delta x^{(p-1)}$$

$$[1^{p-1} - m\,(m-1)^{p-1} + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}(m-2)^{p-1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(m-3)^{p-1}\,.]$$

Secundus factor uncinis inclusus est toties $= 0$, toties $p < m$.

2. Ut et rationes terminorum differentiarum asquamur, sit:

$$\overset{m}{\Delta}_1 x^n = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,[n-(m-1)]\,x^{n-m}\Delta x^m$$

et

$$\overset{1}{\Delta}_m x^n = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,[n-(m-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m}\,x^{n-m}\Delta x^m;$$

ergo est ratio:

$$\frac{\Delta_1^m x^n}{\Delta_m^1 x^n} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m,$$

et alterum principale theorema est:

Rationem primi termini alicujus differentiae correspondentis termini primae differentiae esse constantem.

Quare est differentia prima:

$$\Delta x^n = \Delta^1 x^n + \frac{\Delta_1^2 x^n}{2} + \frac{\Delta_1^3 x^n}{2.3} + \frac{\Delta_1^4 x^n}{2.3.4} \ldots$$

i. e. summa primorum terminorum singularum differentiarum, singula termina divisa per numerum ordinis, qui factor denominatori praecedentis termini adjungitur. — Eodem modo invenitur alia quaeque differentia.

3. Deinceps est ea lex, ex qua termini singuli supra compositae aequationis alius ab alio derivantur quaerenda.

Si in functione x^n quantitas x increscit quantitate Δx, erit differentia:

$$(x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}\Delta$$
$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3}\Delta x$$

et

$$\Delta_1^1 x^n = nx^{n-1}\Delta x.$$

Sin autem in functione $nx^{n-1}\Delta x$ quantitas x crescit eadem quantitate Δx, erit differentia:

$$n\,(x+\Delta x)^{n-1}\Delta x - nx^{n-1}\Delta x = n\,(n-1)\,x^{n-2}\Delta^2$$
$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2} x^{n-3}\Delta x^3 \ldots$$

et

$$\Delta^1_1 n x^{n-1} \Delta x = \Delta^1_1 \Delta^1_1 x^n = 2\Delta^1_2 x^n$$

etc.

Itaque est alterum principale theorema:

Eodem modo, quo derivatur primus terminus differentiae ex functione ipsa, derivatur secundus minus ex primo, tertius ex secundo etc.

Hi termini primi singularum differentiarum differentialia nominantur.

Eadem ratione inveniri possunt differentiae productorum et omnis generis functionum.

4. Ex priori quoque differentiarum theoremate lex differentiarum aliarum functionum cognoscitur, quod in ratione terminorum nec functio ipsa, nec exponens variabilis quantitatis ejus apparet, sed tantum exponens differentiae, quam ob rem theorema in universum valet.

Itaque si pro x^n ponamus fx, et pro Δx, quum sit constans, dx, erit

$$f(x+dx) = fx + \frac{dfx}{dx} \cdot dx + \frac{d^2 fx}{dx^2} \cdot \frac{dx^3}{1.2} + \frac{d^3 fx}{dx^3} \cdot \frac{dx^3}{1.2.3} \cdot \cdot \cdot$$

quae series Tayloriana est.

5. Tantum abfui, ut hoc loco integram calculi differentialis theoriam ex calculo differentiarum deducere voluerim, ut nonnisi exemplo viam demonstraverim.

Quantopere haec via Lagrangii theoriam superet quod principia genetice eruuntur, ex hucusque dictis satis perspicuum est, et praecipue ex eo, quod eadem ratio ineunda est, ut differentia eruatur, sive una sive plures adsunt variabiles; sive prima sive ulterior quaedam differentia quaeritur; sive constans sive variabile est incrementum.

Ratio, quam haec methodus monstrat, tanta est simplicitate, perspicuitate et integritate, ut omnes reliquas ea superari putemus, atque ea adhibita quam maximos in mathesi progressus exspectari posse, omnino persuasum habeamus.

---

1. Ex iis, quae supra exposuimus, cognovimus, calculum differentialem una cum methodo analytica ortum esse. Namque ubi coeptae sunt quantitates geometricae aequationibus algebraicis exprimi, quantitates continuae discretis expressae sunt atque toto calculo novo unum id expetitum est, ut continuitatis lex, etsi ratione ejus ipsa nondum cognita, algebraice exponetur.

Id Cavalerius consecutus est, unitatem, qua linea metienda esset, punctum statuens, qua area lineam qua solidum aream.

Hac eadem ratione nituntur et Robervali et Wallisii inventa, quorum uterque tamen latiore quodam sensu ea usus est. Prior enim motus leges, alter novas numerorum leges ex infinitis seriebus derivat adhibuit, unde methodus quaedam rationum et limitum orta est.

Cartesius autem et Fermatius methodum non tantum ampliorem reddiderunt, sed singula quaedam praecepta analytica ratione exponere docebant.

Verum re vera amplificata et confirmata est l continuitatis Neutoni inventionibus. Etsi Vir Illust docuit, principium legis esse infinite parvum, tam leges motus, quae eidem continuitatis legi congrua praecepit. Notionem enim momenti, qua illo tempo Mathematici usi sunt, ita exposuit, ut ex ea tione, qua geometricae quantitates nascuntur, intelli

psit: Factorem enim unum qui vim significat, indefi te parvum putat. Hoc ipso autem ad notionem quantis qualiscunque propius accedit. Idem Vir Clarissimus, si motus rationem, quae aliena est a ratione mere gometrica, non adhibuisset, non est dubium, quin cnitione serierum tam feliciter aucta adjutus ea invisset, quibus inventis Lagrangius postea tantam aecutus est gloriam. At impeditus erat opinionibus, qis ex indivisibilium methodo hauserat. Iisdem eoribus notio celeritatis, quam Neutonus exhibuit, lorare mihi videtur, quippe quam non ex ratione stii et temporis, sed ex spatio solo tempore in infitum deminuto, conceperit.

Quodammodo tamen Neutonus aliena sustulit e culo novo in methodo primarum et ultimarum ratium. Haec vero methodus arctior cohaeret cum ils, quae auctor libro „Philosophiae Naturalis Princia Mathematica" inscripto, exposuit, et cum geontricis rationibus, quam quae methodus calculi differntialis jure appellari possit. Tantummodo eam ob csam non est praetermittenda, quod D'Alembertus e Eulerus inde inceperunt suas novas investigationes. Cere autem illo primum pro incrementis ipsis incmentorum rationes statuuntur. Ut autem doctrinam inite parvi hoc tempore Viri Docti amplecterentur, e factum est, quod et aequationes differentiales ex aquationibus differentiarum confirmare studuerunt, nque hae ipsae aliter nisi indirecte potuerunt eoni.

Eulerus accuratius rem perspexisse videtur deriv as functiones commemorans. At vero opinione, conituitatis legem inesse in quantitatibus infinite parvis, e differentiale ipsum esse infinite parvum, erat im-

peditus, naturam functionum derivatarum majore cum fructu pervestigare.

Inventa Leibnitii docti neglexerunt, nec ampliori cultu digna putarunt. Nihilominus autem multum profuit Leibnitius. Namque et significatio ipsa est utilissima, et illa gloria Vir Clarissimus semper erit insignis, quod primus aequationes differentiales exposuit.

Causa autem, cur Leibnitii methodus non amplior reddita est, ipsis principiis infinite parvi continetur, quod quidem ab omni evidentia abhorret. Nequaliter jam potest commemorari, nisi in historia, neque qui hodie illam adhibent, alia de causa ea utuntur, nisi quia ignari sunt ceterarum, praesertim Lagrangii e hac nostra aetate Desbergeri. Quaecunque enim calculi differentiali explicari possunt, utraque illarum methodorum praebet. Notionem universam legis continuitatis continet notio differentialis, quam Lagrangius exhibuit.

Series enim continuata appellatur, cujus termini secundum qualiscunque quantitatis potentias progrediuntur.

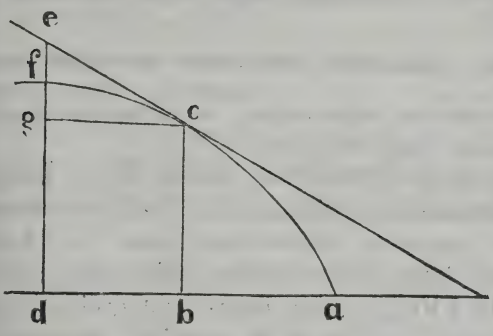
Methodus autem Desbergeri eo mihi ceteras superare videtur, quod explicat, quomodo serierum ordines et terminorum inter ipsos connexus possit inveniri. Ita enim non solum apparet, qua ratione totus calculus efficiatur, sed etiam principia illustrantur. Simulque via monstratur, qua alia calculi transcendentales genera e. c. Calculus Variationum inveniri possunt. Nam ex his omnibus, quae diximus, apparet, non unam esse legem continuitatis, quippe quum terminus quisque seriei Taylorianae seriem efficere possit.

Haec est lex, qua omnes calculi differentiales theoriae cohaerent, qua methodus indivisibilium ipsi

theoria ejus, qua genera singula calculi transcendentalis inter se differunt, qua denique duce aequationes differentiales ex ipsis quantitatibus perspectis derivari possunt.

Analytica methodus Calculum Differentialem eum finem adduxit, quem consequi poterat, qua ex causa paret, quanta cum cura Analysis in ceteris etiam disciplinae mathematicae partibus sit adhibenda. Tantum hac methodo geometriam elementarem ipsam amorem, et rationem ejus docendae et discendae faciliorem reddi posse, omnino persuasum habeo.

2. Ut methodos diversas ex figura geometrica explicemus, sit ab abscissa et bc ordinata alicujus curvae,



cus tangens est ce et bd incrementum abscissae, ea erit incrementum ordinatae tangentis eg, curvae cf, arcus cf et areae cbdf.

Fermatius principium statuit: Ordinatam curvae aequalem esse ordinatae tangentis, ergo posuit

$$cg, fg \text{ et } eg = o.$$

Neutonus, qui curvam et ejus aream e motu puncti c ordinatae cb natam esse putat, quaerit celeritates

puncti c in directione et ordinatae et abscissae et in directione ex his duabus celeritatibus composita. Hae celeritates cg, eg et ce inventae sunt ex differentia, ergo sunt = o. Quum autem momentum areae putet c b d f, sequitur, Neutonum rectam notionem celeritatis non intellexisse et differentiam ipsam aequalem celeritati putasse; nam momentum est c b d e, quod ex vera notione celeritatis patet. Itaque perhibuit omnes celeritates = o.

D'Alembertus et Eulerus quaesiverunt limites rationum incrementorum fg, ef, et cbdf, haec incrementa = 0 ponentes. Lagrangius autem praeclare demonstrat, primariam functionem derivatam ordinatae esse $\frac{eg}{cg}$ i. e. tangentem anguli inter abscissam et tangentem; primariam functionem derivatam arcus $\frac{c}{c}$ i. e. secantem hujus anguli, et primariam functionem derivatam areae ordinatam.

Si autem differentialia derivantur ex differentiis est differentiale ordinatae e g, i. e. incrementum ordinatae tangentis; differentiale arcus c e, i. e. pars tangentis inter duas ordinatas; differentiale areae rectangulum c b d g, cujus latera sunt ordinata prima et incrementum abscissae; et terminus secundus seriei Taylorianae est triangulus c g e.

Eadem ratione sese habent differentialia ad quaslibet partes rerum geometricarum et mechanicarum adhibita.

Theses.

1. Methodus Indivisibilium est methodus Calculi ranscendentalis.

2. Calculus Fluxionum Neutoni omnino differt a lculo Differentiali Leibnitii.

3. Neutonus et Leibnitius invenerunt, alter alto inscio, suum calculum.

4. Neutoniana methodus Primarum et Ultimarum ltionum arctissime cohaeret cum methodo Limitum.

5. Notio, quam Neutonus de celeritate exhibuit, in sufficit.

6. Quaeque theoria Calculi Transcendentalis infite parvum adhibens ad methodum Indivisibilium rtinet.

7. Infinite Parvum est ex doctrina Calculi Differtialis rejiciendum.

8. Methodus Nihili praestat methodo Limitum; aque autem methodus praestat calculo Leibnitii et culo Neutoni.

9. Utraque methodus et Limitum et Nihili infeir est methodo Lagrangii.

10. Argumentationes, quae contra Lagrangianar Functionum Derivatarum theoriam exhiberi solent, nu lius sunt momenti.

11. Principia Calculi Transcendentalis e diff rentiis sunt derivanda.

12. Lex continuitatis est lex principalis Calcu Differentialis.

13. Lex continuitatis non inest in quantitatib infinite parvis, sed in relatione terminorum seriei.

14. Ex sola Methodo Analytica Calculus Differe tialis prodire potuit.

15. Hac sola methodo ceterae matheseos dis plinae ampliores reddi possunt.

16. Hac sola methodo ratio docendae et disce dae matheseos facilior evadit.

Errata.

Pag.	*Lin.*	*pro:*	*lege:*
3	2	scrutari	perscrutari
10	22	est	sit
12	17	BH	gH
12	18	x	mom. x
13	16	nez^{n-1}	$nevz^{n-1}$
14	27	infinito	infinite
18	20	$\frac{TB'}{B,B'}$	$-\frac{C'B'}{TB'}$
19	4	nititur	nitatur
22	29	Joanno	Joanne
27	7	series	serie
30	25	ingressus est	ingressus
33	17	accuratius	si accuratius
40	12	exponetur	exponatur
43	8	Tantum	Sola.

Zu der

öffentlichen Prüfung

der Schüler

des Gymnasiums zu Elbing,

welche

Donnerstag und Freitag den 11. und 12. October

Vormittags von 9 Uhr ab

in dem Saale der Anstalt

gehalten werden wird,

ladet ergebenst ein

Dr. Adolph Benecke,

Professor und Director des Gymnasiums.

INHALT.

1. Schulnachrichten von dem *Director*.
2. Mathematische Abhandlung. Von dem Professor *Richter*.

Elbing, 1849.

Gedruckt bei F. W. Neumann-Hartmann.

Schulnachrichten.

I. Lehrverfassung.

SEXTA.

Ordinarius: Oberlehrer Scheibert.

Der Cursus einjährig. *Wöchentlich 32 Stunden.*

1. Deutsche Sprache. 4 St. w. Eintheilung, Biegung und Rechtschreibung der Wörter. Lehre vom einfachen Satze. Übungen im mündlichen und schriftlichen Vortrage. Oberlehrer *Scheibert.*

2. Lateinische Sprache. 10 St. w. Formenlehre nach der Vorschule zu den lateinischen Classikern von W. Scheele. Theil 1. Abtheilung 1. Von der zweiten Abtheilung wurde die erste Reihe der lateinischen und deutschen Übungsbeispiele von §. 1 bis §. 42 übersetzt. Oberlehrer *Scheibert.*

3. Religionslehre. 2 St. w. Die biblischen Geschichten des A. T. nach Preuss. angemessene Bibelstellen, Liederverse, ausgewählte Kirchenlieder, und die 10 Gebote mit Luther's Erklärung wurden kurz erläutert und memorirt. *Lindenroth.*

4. Geographie. 2 St. w. Erdtheile, Meere, Meerbusen, Meerengen, Halbinseln, Inseln. Länder von Europa mit ihren Begrenzungen, merkwürdigsten Gebirgen, Flüssen, Seen und Städten. Deutschland nach Höhenzügen und Flussgebieten im Allgemeinen nebst Ländern und Hauptstädten, der Preussische Staat genauer, die Provinz Preussen speciell. Oberlehrer *Scheibert.*

5. Geschichte. 2 St. w. Die ältesten Geschichten der Inder, Ägypter, Hebräer Phönicier, Assyrier, Babylonier, Meder und Perser bis zum Tode des Cyrus. *Lindenroth*

6. Arithmetik. 4 St. w. Das Numeriren. Die 4 Species in unbenannten und be nannten Zahlen. Verhältnissrechnung. Die Anfangsgründe von den Brüchen. Kopf- und Zifferrechnen nach Fölsing's Rechenbuch. Th. 1. *Lindenroth.*

7. Naturgeschichte. 2 St. w. Beschreibung vorgezeigter Naturkörper zur Übung im Auffassen und Beschreiben der an ihnen hervortretenden Merkmale. Oberlehrer *Scheibert*

8. Kalligraphie. 2 St. w. Musikdirector *Döring.*

9. Zeichnen. 2 St. w. *Müller.*

10. Gesang. 2 St. w. Kenntniss der Noten und Intervalle, der gebräuchlichsten Ton und Tactarten, der dynamischen Hauptgrade. Übung der Haupttöne, der Durtonleiter, leichte sprungweiser Fortschreitungen, einfacher Lieder und Choralmelodieen. Musikdirector *Döring*

QUINTA.

Ordinarius: Oberlehrer Sahme.

Der Cursus einjährig. *Wöchentlich 32 Stunden.*

1. Deutsche Sprache. 4 St. w. Leseübungen. Declamation. Vortrag gelesener Abschnitte aus Ph. Wackernagel's Lesebuch Th. 1. — Orthographische und Stilübungen. Gebrauch der Adverbien, Präpositionen und Conjunctionen. Der mehrfach bekleidete und zu sammengesetzte Satz. *Lindenroth.*

2. Lateinische Sprache. 10 St. w. Davon 4 St. Formenlehre nach Putsche's L Grammatik nebst mündlicher und schriftlicher Einübung derselben. 6 St. Übersetzung au Scheele's Vorschule Theil 2. Lehrgang 1. Abschnitt 1. bis zum Schluss. Die Mustersätze und loci memoriales auswendig gelernt. Oberlehrer *Sahme.*

3. Religionslehre. 2 St. w. Die biblischen Geschichten des N. T. nach Preuß Geeignete Bibelstellen, Liederverse, ausgewählte Kirchenlieder und die christlichen Glaube artikel mit Luther's Erklärung wurden kurz erläutert und memorirt. *Lindenroth.*

4. Geographie. 2 St. w. Die Erde im Allgemeinen, die fünf Erdtheile nach Volger Lehrbuch Cursus 2. Oberlehrer *Sahme.*

5. Geschichte. 2 St. w. Sagengeschichte der Griechen und Römer nach Schwab Sagen des classischen Alterthums. Oberlehrer *Sahme.*

6. Arithmetik. 4 St. w. Die gemeinen und Decimalbrüche. Die Regeldetri und ihre Anwendung auf praktische Rechnungen nach Lindenroth's Leitfaden und Fölsing's Rechenbuch Theil 2. *Lindenroth.*

7. Naturgeschichte. 2 St. w. Im Winter Organographie; im Sommer Botanik. berlehrer *Scheibert.*

8. Kalligraphie. 2 St. w. Musikdirector *Döring.*

9. Zeichnen. 2 St. w. *Müller.*

10. Gesang. 2 St. w. Aufstellung aller Dur- und Molltonarten und der wesentlichsten griffe aus der Rhythmik und Dynamik. Geübt wurden schwierigere Fortschreitungen, Lieder, oralmelodieen und Chöre. Musikdirector *Döring.*

QUARTA.

Ordinarius: Professor Richter.

Der Cursus einjährig. *Wöchentlich 32 Stunden.*

1. Deutsche Sprache. 3 St. w. Schriftliche Aufsätze im Anschluss an die histori- ien Vorträge. Declamationsübungen. Satzlehre nach Becker's Leitfaden. Dr. *Töppen.*

2. Lateinische Sprache. 6 St. w. Wiederholung und Erweiterung der Formenlehre h Putsche. Einübung der Satzlehre nach Scheele's Vorschule Th. 2., aus welchem alle Sätze ter Reihe übersetzt und die Musterbeispiele gelernt wurden. Darauf Jacobs' lat. Lesebuch nd 2. Abtheilung 1. F. G. H. I. Abtheilung 2. Cap. II, 1—17. Phaedri fabb. lib. IV. *Töppen.*

3. Griechische Sprache. 6 St. w. Formenlehre nach Buttmann bis zu den Verbis $\overline{\mu\iota}$. H. Schmidt's und W. Wensch's Elementarbuch Curs. 1. Reihe 1. wurde nebst den sprechenden Beispielen der 2. Abtheilung bis zu dem Abschnitt von den Verbis auf $\overline{\mu\iota}$ ndlich und schriftlich übersetzt. Dr. *Steinke.*

4. Religionslehre. 2 St. w. Erklärung der 3 ersten Hauptstücke des Lutherischen echismus. Auswendiglernen erläuterter Bibelstellen und Kirchenlieder. *Carl.*

5. Geographie. 2 St. w. Allgemeine Geographie. Europa. Nach Volger's Lehrh Curs. 2. Oberlehrer *Sahme.*

6. Geschichte. 2 St. w. Geschichte der Griechen bis auf Alexander. Dr. *Töppen.*

7. Mathematik. 3 St. w. Planimetrie nach Richter's Lehrbuche Abschnitt 1—6. — imalbrüche, Buchstabenrechnung, die Lehre von den Proportionen, von den Potenzen mit zen Exponenten, die Ausziehung der Quadratwurzel, die algebraischen Gleichungen des er- Grades mit einer unbekannten Grösse. Professor *Richter.*

8. Naturgeschichte. 2 St. w. Naturgeschichte der höhern Pflanzen und Thiere· rlehrer *Scheibert.*

9. Kalligraphie. 2 St. w. *Lindenroth.*

10. Zeichnen. 2 St. w. *Müller.*

11. Gesang. (IV. und III. combinirt). 2 St. w. Wiederholung des Ton- und Noten-Systems; die noch übrigen Begriffe aus der Rhythmik und Dynamik, die musikalischen Nebenzeichen. Das Treffen leiterfremder Intervalle, die zweite Stimme der in Sexta und Quinta gesungenen Lieder, Choräle und Chöre. Dreistimmige in enger Harmonie gesetzte Lieder. Musikdirector *Döring.*

TERTIA.

Ordinarius: Professor Merz.

Der Cursus zweijährig. *Wöchentlich* 32 *Stunden.*

1. Deutsche Sprache. 3 St. w. Schriftliche Aufsätze nach gegebenen und besprochenen Dispositionen. Erläuterung der Grammatik und Stillehre nach Becker's Leitfaden. Metrik. Übungen im Declamiren und im freien Vortrage. Oberlehrer *Sahme.*

2. Lateinische Sprache. 8 St. w. Davon 6 St. w. Caes. de bell. Gall. lib. 1— mündlich und schriftlich übersetzt. Grammatik nach Putsche. Stil- und Memorirübungen Professor *Merz.* — 2 St. w. Ovid. Metamorph. lib. VIII, IX, X mit Auswahl, XI, 1—22 Dr. *Steinke.*

3. Griechische Sprache. 6 St. w. Repetition der regelm. Conjugation und Einübung der unregelm. Verba. Darauf hezügliche Exercitia aus Schmidt u. Wensch Elementarbuch Curs. 1. Reihe 1. Übersetzt wurde Schmidt's Elementarb. Curs. 2. Hälfte 1 und Homer Odyss. lib. IX. *Carl.*

4. Französische Sprache. 2 St. w. Elemente der Grammatik mündlich u schriftlich eingeübt. Ausgewählte Stücke aus Ideler's Handb. Th. 1. *Carl.*

5. Religionslehre. 2 St. w. Das 4. und 5. Hauptstück des Lutherischen Katechismus erläutert und memorirt. Lesung und Erklärung des Ev. Matthaei mit Vergleichung d andern Evangelien. *Carl.*

6. Geographie. 2 St. w. Die aussereuropäischen Länder. Darauf Preussen u Deutschland. Nach Volger's Lehrbuch Curs. 2. Oberlehrer *Sahme.*

7. Geschichte. 2 St. w. Geschichte von Preussen und Brandenburg bis zur Zeit r Reformation; vorausgeschickt wurde eine kürzere Übersicht der frühern Geschichte des Mittelalters. Dr. *Töppen.*

8. Mathematik. 3 St. w. Planimetrie nach Richter's Lehrbuche Abschnitt 7—0. Anwendung der Algebra auf die Geometrie. Anleitung zur Lösung geometrischer Aufgaben.

ie Lehre von den Potenzen und Wurzeln. Die algebraischen Gleichungen des 1. und 2. rades. Professor *Richter.*

9. Naturgeschichte. 2 St. w. Im Winterhalbjahre Mineralogie, im Sommerhalbjahre otanik nach Burmeister. *Lindenroth.*

10. Gesang. 2 St. w. Tertia mit Quarta combinirt. S. o. Musikdirector *Döring.*

SECUNDA.

Ordinarius: Professor Merz.

Der Cursus zweijährig. *Wöchentlich 32 Stunden.*

1. Deutsche Sprache. 3 St. w. Eine Reihe Klopstock'scher Oden und Schiller'her Gedichte, Wieland's Oberon, Goethe's Hermann und Dorothea, Lessing's Nathan der eise wurden erklärt. Deutsche Aufsätze, deren Themen meistens vorher ausführlich bespro-en waren. Metrische Übungen. Declamation. Dr. *Töppen.*

2. Lateinische Sprache. 8 St. w. Davon 4 St. Liv. Hist. lib. IV., Cic. Cato Maj. 2 St. Grammatik nach Zumpt §. 65—76, §. 81—84. Exercitia, Extemporalia, Beurtheilg der lateinischen Ausarbeitungen. Das Lateinsprechen wurde bei der Interpretation der chriftsteller geübt. Dr. *Steinke.* — 2 St. Virgil. Aen. lib. IV. V. VI. Memorirübungen. ofessor *Merz.*

3. Griechische Sprache. 6 St. w. Davon 2 St. Jacobs' Attica p. 123—176. pag. 7—271. — 2 St. Grammatik Buttm. Syntax §. 121—151. Wiederholung der Formenlehre. ündliche und schriftliche Übungen aus Rost u. Wüstemann. Exercitia, Extemporalia, Orthographische Übb. Professor *Merz.* — 2 St. Homer. Odyss. IV. V. VI. VII. Director *Benecke.*

4. Französische Sprache. 2 St. w. Leichtere Regeln über die Syntax des Verbe ch Noël, Einübung der unregelmässigen Verba durch Extemporalien; Exercitien aus Tollin. Gelesen wurde Racine's Athalie. *Carl.*

5. Englische Sprache. 2 St. w. Elemente der Aussprache und Grammatik nach Smith; darauf leichte Extemporalien über die einfachern Regeln, und Exercitien aus Herrig's Aufgaben. Goldsmith's Vicar of Wakefield Ch. 16—21. *Carl.*

6. Religionswissenschaft. 2 St. w. Einleitung in das A. und N. T. nach Petri §. 18—56. Das Evangelium Matthaei und der Brief an die Galater wurden in der Ursprache gelesen. Professor *Merz.*

7. Geschichte und Geographie. 3 St. w. Geschichte des Mittelalters bis zu den Hohenstaufen nach Schmidt's Lehrb. Th. 2. — Wiederholung der griechischen Geschichte nach Schmidt Th. 1, und der Geographie von Asien und America nach Volger. Professor *Merz.*

8. Mathematik. 4 St. w. Wiederholung der Planimetrie und Algebra nebst Uebungsaufgaben. Stereometrie. — Die Reihen, die Combinationslehre, der binomische Lehrsatz. Professor *Richter.*

9. Naturwissenschaft. 2 St. w. Einleit. in die Physik. Electricität und Magnetismus. Anfangsgründe der Chemie. Professor *Richter.*

PRIMA.

Ordinarius: Director Benecke.

Der Cursus zweijährig. *Wöchentlich* 32 *Stunden.*

1. Deutsche Sprache. 4 St. w. Davon 2 St. Erklärung von Musteraufsätzen d verschiedenen Gattungen. Dispositionsübungen. Beurtheilung der schriftlichen Ausarbeitungen Declamationsübungen. Freie Vorträge. — Im Winter 2 St. Philosophische Propädeutik: E pirische Psychologie nach naturwissenschaftlicher Methode. Im Sommer 2 St. Geschich der deutschen Literatur seit Opitz, verbunden mit der Lesung und Erläuterung ausgewähl Proben. Director *Benecke.*

2. Lateinische Sprache. 8 St. w. Davon 4 St. Cic. in Verr. Action. II. lib. Cap. 40—70. Tacit. Ann. IV. V. VI. Director *Benecke.* — 2 St. Hor. Odar. lib. III, Epod. mit Auswahl. 2 St. Wiederholung einzelner Abschnitte der Grammatik, Exercitia, temporalia und freie Aufsätze. Dr. *Steinke.*

3. Griechische Sprache. 6 St. w. Davon 4 St. Delect. poes. elegiacae, mel bucolicae ed. Bach p. 20 ff. Sophocl. Aiax mit den nothwendigen Erläuterungen über Geschichte der Elegie, des iambischen und trochäischen Gedichtes, der äolischen und doris Lyrik; über den Ursprung der dramatischen Poesie, die Einrichtung der alten Tragödie die 3 vorzüglichsten Tragiker. Director *Benecke.* — 2 St. Wiederholung einzelner schnitte der Grammatik nebst schriftlichen Uebungen aus Rost u. Wüstemann. Curs. III Dr. *Steinke.*

4. Französische Sprache. 2 St. w. Syntax des Verbe nach Noel et Chp Gramm. fr. Einübung der Regeln durch Exercitien aus Tollin und Extemporalien, sowie einzelne freie Arbeiten. Lecture ausgewählter Gedichte aus Ideler's Handb. Th. IV. *Carl*

5. Englische Sprache. 2 St. w. Einübung der syntaktischen Regeln durch Ex poralien; Exercitien aus Herrig's Uebungsaufgaben. Gelesen wurden ausgewählte Stück Washington Irving's Sketchbook. *Carl.*

6. Religionswissenschaft. 2 St. w. Petri Lehrb. der Religion. Abschn. 2. 154 bis zum Schluss p. 209. Das Ev. Johannis in der Ursprache gelesen. Professor *M*

7. Geschichte. 2 St. w. Neuere Geschichte bis zum Ende des siebzehnten Jahrnderts nach Schmidt's Grundriss der Weltgeschichte. Dr. *Töppen.*

8. Mathematik. 4 St. w. Wiederholung und Erweiterung der Geometrie und Algenebst Uebungsaufgaben. Die höheren arithmetischen Reihen, die unbestimmte Analytik, eorie der höhern Gleichungen. Professor *Richter.*

9. Naturwissenschaft. 2 St. w. Wiederholung der Einleitung in die Physik. Die tik fester Körper und Anfangsgründe der Mechanik. Chemische Naturlehre. Prof. *Richter.*

Ausserordentliche Lehrstunden.

1. Hebräische Sprache. 2 St. w. für Secunda fielen aus, weil sich kein Theilnehr fand. — 2 St. w. für Prima; Lehre von dem unregelmässigen Verbum nach Gesenius. nige historische Stücke und Psalme aus Gesenius Lesebuche wurden übersetzt. *Carl.*

2. Gesang. 2 St. w. Prima, Secunda und einige Schüler aus Tertia übten die Tenorl Bassstimmen der in den übrigen Classen gesungenen vierstimmigen Gesänge; ferner hrstimmige Gesänge für den Männerchor. Einige Data über die Musik der alten Hebräer, echen und Römer. Die alten Kirchentonarten. Musikdirector *Döring.*

3. Zeichnen. 4 St. w. Davon 2 St. für die Schüler der Tertia. — 2 St. für Schüaus Prima und Secunda. *Müller.*

4. Turnen. 4 St. w. für die Schüler aller Classen. *Carl* und Dr. *Steinke.*

II. Verfügungen.

1. Vom 6. September 1848. Des Nachweises der im Laufe jeden Jahres angestellten mten bedarf es fernerhin nicht mehr.

2. Vom 30. September. Die geheimen Conduitenlisten in der Civilverwaltung sollen abchafft werden.

3. Vom 1. November. Die Dauer der jährlichen Pfingstferien wird auf eine Woche gesetzt.

4. Vom 25. November. Den Gymnasiasten ist die Theilnahme an politischen Vereinen untersagen, selbst wenn Eltern oder Vormünder sie gestatten sollten.

5. Vom 3. Januar 1849. Die allen Staatsbürgern zustehenden Berechtigungen hinıtlich der freien Meinungsäusserung gebühren gleichmässig dem Lehrerstande. Für die iserung von Überzeugungen, die ausserhalb des besondern Lehramts gethan werden, kann

daher eine Verantwortlichkeit auf dem Gebiete der Dienstdisciplin nicht stattfinden. Sollte abe
ein Lehrer seine der bestehenden Landesverfassung widerstreitenden Ansichten in die Ver
waltung seines Amtes übertragen, so wird der Minister des Unterrichts im Disciplina
wege mit unnachsichtlicher Strenge dagegen einschreiten.

6. Von demselben Datum. Bis zu der zu erwartenden Regulirung des Unterrichtsw
sens bleiben die dermalen bestehenden Einrichtungen in Kraft.

7. Vom 20. Januar. Übersicht über den Ausfall der bei den Gymnasien der Provi
stattgehabten Wahlen der Vertreter für die von dem Unterrichtsministerium angeordnete Be
thung über die Reform der höhern Unterrichtsanstalten.

8. Vom 6. Februar. Um die Geschäfts-Correspondenz von unwesentlichen Formen
befreien, haben sämmtliche Staatsbehörden sich aller sächlichen Prädicate, wie Hochlöbli
Wohllöblich, zu enthalten; auch statt Ein Ministerium, Eine Regierung, künftig das Ministeriu
die Regierung zu sagen.

9. Vom 19. Mai. Die Benutzung der Schullocale zu politischen Versammlungen irg
welcher Art ist nicht gestattet.

10. Vom 23. Mai. Das jährliche Schulgeld ist mit Einschluss der früher entrichte
kleinern Beiträge auf 18 Rthlr. für Prima, Secunda, Tertia, auf 14 Rthlr. für Quarta,
12 Thlr. für Quinta, auf 10 Thlr. für Sexta festgesetzt. Von jedem Freischüler sind 2 R
jährlich zu erheben.

11. Vom 11. September. Es wird aufmerksam gemacht auf §. 20 der Verordnung
11. Juli d. J., betreffend die Dienstvergehen der nicht richterlichen Beamten.

Ausserdem sehe ich mich veranlasst, folgende ältere Verordnungen des Königl. Mini
riums der Geistlichen, Unterrichts- und Medicinalangelegenheiten und des Königl. Provin
Schulcollegiums, wiederholt in Erinnerung zu bringen:

Der Besuch von Gasthäusern, Restaurationen, Conditoreien, Billard's u. s. w. ist
Schülern verboten.

Auswärtige Zöglinge des Gymnasiums sind zur besondern Fürsorge einem tüchtigen
seher zu übergeben, der dem Director zuvor namhaft gemacht werden muss, und welcher
ihren Privatfleiss und ihr sittliches Betragen ausser der Schule eine ernste und gewissen
Aufsicht zu führen hat.

Solche Schüler, welche wegen Mangels an Fleiss, nachdem sie zwei Jahre in einer
gesessen haben, doch zur Versetzung in die nächsthöhere nicht für reif erklärt werden kön
sollen aus den Gymnasien entfernt werden.

Es soll nicht erst eine positive Erklärung von Seiten der Eltern abgewartet w
den, ob sie die Theilnahme ihrer Söhne an den Turnübungen wollen; sondern diese

5. Den naturhistorischen Sammlungen wurde von Herrn Stadtrath F. Housle ein ausgestopfter Albatros, ein skeletirter Albatros und ein Carbo graculus geschenkt.

6—9. Für Vorschriften, Vorzeichnungen, Musikalien konnte nach Bedürfs gesorgt werden.

Den fortgesetzten Beweisen des Wohlwollens verfehlen wir nicht, im Namen der Schule durch den verbindlichsten Dank abzustatten.

VI. Ordnung der öffentlichen Prüfung.

Donnerstag.

Choral.

Sexta. 1. Religion. *Lindenroth.*
2. Latein. Oberlehrer *Scheibert.*

Aus dieser Classe declamiren

Cäsar Würtemberg: Die beiden Wächter von Gellert.
Hermann Rosomm: Der Kampf der Riesenschlange mit dem Tiger von Rückert.
Wilhelm Boschke: Schwäbische Kunde von Uhland.

Quinta. 1. Deutsch. *Lindenroth.*
2. Geographie. Oberlehrer *Sahme.*

Aus dieser Classe declamiren

Ludwig Kluge: Carl der Grosse aus dem Münchener Festkalender.
Gustav Figuhr: Einladung von Knapp.
August Mackowsky: Die edle Musica von Hagenbach.

Pause.

Chorlied gesungen von der ersten Abtheilung.

Quarta. 1. Gesang. Musikdirector *Döring.*
2. Naturgeschichte. Oberlehrer *Scheibert.*
3. Geschichte. Dr. *Töppen.*

Aus dieser Classe declamiren

Franz Schultz: Der Überfall im Wildbad von Uhland.
Heinrich Haack: Der Teufel in Salamanca von Körner.
Julius Foss: Von einem tôrechten schuolpfaffen von Bonerius.

Schlussgesang.

Freitag.

Choral.

Tertia. 1. Religion. *Carl.*
2. Mathematik. Professor *Richter.*

Aus dieser Classe declamiren

Emil Schönfeld: Das alte und das neue Griechenland von Fr. Jacobs.
Paul Zimmermann: Die Zerstörung von Pompeji von Fitzinger.
Liebmann Levinsohn: Das Glöcklein des Glücks von Seidl.

Secunda. 1. Physik. Professor *Richter.*
2. Griechisch. Professor *Merz.*

Aus dieser Classe declamiren

Emil Titius: Hektors Tod von Homer, deutsch und griechisch.
Adolph Wisselinck und Ludwig Alsen eine Scene aus Voltaire's Mahomet.
Ludwig Foss beantwortet in einem eigenen Vortrage die Frage aus Goethe's H
mann und Dorothea:

Ist wohl der ein würdiger Mann, der im Glück und im Unglück
Sich nur allein bedenkt, und Leiden und Freuden zu theilen
Nicht versteht, und nicht dazu von Herzen bewegt wird?

Pause.

Chor von Seidel.

Prima. 1. Latein. Dr. *Steinke.*
2. Französisch. *Carl.*

Aus dieser Classe versuchen sich in eigenen Reden

Adolph Stellmacher: De bonarum literarum studio potentissimo animi consc
praesidio et adiumento.
Friedrich Figuhr: On the necessity of a German navy and the means of procur
Hermann Schwarzrock: Über den Unterschied der antiken und der christlichen I

Schlusschoral.

Der neue Lehrcursus nimmt Donnerstag den 25. October seinen Anfang. Der Anm
neu aufzunehmender Schüler wird der Unterzeichnete Montag den 23. October von 9—2 U
Vormittags entgegensehen, und wegen Prüfung derselben das Nähere bestimmen.

Benecke.

Das summatorische Glied

lcher Reihen zu bestimmen, welche durch Multiplikation arithmetischer Reihen erster Ordnung entstanden sind.

Von **A. Richter.**

---

§. 1. *Es wird im Folgenden vorausgesetzt, dass die Glieder einer Progression h der Ordnung der natürlichen Zahlen gezählt werden, so dass das Anfangsglied erste heisst. Unter dieser Voraussetzung sei das allgemeine Glied einer Reihe nte Glied derselben und werde bezeichnet durch* t_n. *Das summatorische Glied die Summe der* n *ersten Glieder und werde bezeichnet durch* $\int_n$ *oder durch* $\int t_n$. *weilen ist es zweckmässig, das summatorische Glied durch ein* $\int$ *vor dem Werthe des emeinen Gliedes anzudeuten. Wenn z. B.* $t_n = n^3$, *so ist*

$$\int_n = \int t_n = \int n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3$$

$t_n = (n+1)^3$, *so ist*

$$\int_n = \int t_n = \int (n+1)^3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$$

Zusatz 1. Es folgt hieraus, dass $\int (n+1)^3 - \int n^3 = (n+1)^3 - 1$,

allgemein . . . . $\int (n+1)^r - \int n^r = (n+1)^r - 1$.

Zusatz 2. Wenn das allgemeine Glied einer Reihe eine konstante Zahl, also s Glied der Reihe dieser Zahl gleich ist, so ist das summatorische Glied gleich dem chen allgemeinen Gliede.

Wenn $t_n = a$, *so ist* $\int a = na$.

Denn $\int a = \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} + \ldots + \overset{n-1}{a} + \overset{n}{a} = na$. *Es ist also auch*

$\int n^\circ = \int 1 = n$; $\int 2 = 2n$ *u. s. w.*

§. 2. *Lehrsatz. Wenn das allgemeine Glied einer gegebenen Reihe ein Polyno ist, so kann die Reihe als eine Summe von mehreren einzelnen Reihen angesehen we den, deren allgemeine Glieder die einzelnen Glieder des Polynoms sind. Das summat rische Glied der gegebenen Reihe besteht also aus den summatorischen Gliedern dies einzelnen Reihen.*

Wenn $t_n = a_n + b_n + c_n$, *so ist* $\int t_n = \int a_n + \int b_n + \int c_n$

Denn setzt man für n *nach einander die natürlichen Zahlen, und bezeichnet die Glied durch* $t_1, t_2, \ldots$, *so wie durch* $a_1, a_2, \ldots$ *u. s. w. die entsprechenden Werthe derselb so ist*

$$t_1 = a_1 + b_1 + c_1$$
$$t_2 = a_2 + b_2 + c_2$$
$$\vdots$$
$$t_n = a_n + b_n + c_n, \text{ also}$$
$$\int t_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) + (c_1 + c_2 + \ldots + c_n$$
$$= \int a_n + \int b_n + \int c_n$$

§. 3. *Lehrsatz. Die Differenz der summatorischen Glieder zweier gegeben Reihen ist gleich dem summatorischen Gliede einer Reihe, deren allgemeines Glied Differenz der allgemeinen Glieder der gegebenen Reihen ist.*

Es seien t'_n *und* t''_n *die allgemeinen Glieder zweier gegebener Reihen, so sind* $\int t'_n$ *und* $\int t''_n$ *ihre summatorischen Glieder, und* $\int(t'_n - t''_n)$ *das summatorische Glied ei Reihe, deren allgemeines Glied* $= t'_n - t''_n$. *Es soll also sein* $\int t'_n - \int t''_n = \int(t'_n -$

Es sei $\int t'_n = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + \ldots\ldots + t'_n$, *und*

$$\int t''_n = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + \ldots\ldots + t''_n,$$

so ist $\int t'_n - \int t''_n = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) + (c_1 - c_2) + \ldots. + (t'_n - t$
Es ist aber $t'_n - t''_n$ *das allgemeine Glied der Reihe* $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) +$ *folglich ist das summatorische Glied derselben* $= \int(t'_n - t''_n)$, *und somit* $\int t'_n -$ $= \int(t'_n - t''_n)$.

§. 4. *Lehrsatz. Wenn das allgemeine Glied einer Reihe ein konstan Vielfache von dem allgemeinen Gliede einer zweiten Reihe ist, so ist auch das sum torische Glied der ersten Reihe dasselbe konstante Vielfache von dem summatori Gliede der zweiten Reihe.*

Wenn $t'_n = p \cdot t''_n$, *so ist* $\int t'_n = p \cdot \int t''_n$.

Es sei . . . . . $\int t'_n = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + \ldots. + t'_n$
und . . . . . $\int t''_n = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + \ldots. + t''_n$.
Nach der Annahme ist $t'_n = p \cdot t''_n$, *also* $a_1 = p \cdot a_2$, $b_1 = p \cdot b_2$, ...;
Folglich $\int t'_n = p \cdot a_2 + p \cdot b_2 + p \cdot c_2 + p \cdot d_2 + \ldots. + p \cdot t''_n$
$= p \cdot (a_2 + b_2 + c_2 + \ldots. + t''_n) = p \cdot \int t''_n$.

Zusatz. Wenn die Differenz der allgemeinen Glieder zweier Reihen gleich ist em konstanten Vielfachen von dem allgemeinen Gliede einer dritten Reihe, so ist Differenz der summatorischen Glieder der beiden ersten Reihen gleich demselben stanten Vielfachen von dem summatorischen Gliede der dritten Reihe.

Wenn $t'_n - t''_n = p \cdot t_n$, *so ist* $\int t'_n - \int t''_n = p \cdot \int t_n$

Denn $\int t'_n - \int t''_n = \int (t'_n - t''_n)$ *nach §. 3,* $= \int p \cdot t_n = p \cdot \int t_n$.

§. 5. *Lehnsatz. Die allgemeine Form der geometrischen Reihe ist*

$$a,\ ae,\ ae^2,\ ae^3,\ \ldots\ldots\ ae^{n-1}$$

r ist $t_n = ae^{n-1}$, *und* $\int t_n = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}$

Zusatz. Erhebt man sämmtliche Glieder einer geometrischen Reihe auf einerlei enz, so erhält man a^p, $(ae)^p$, $(ae^2)^p$, $(ae^3)^p$, ... $(ae^{n-1})^p$

oder ... a^p, $a^p e^p$, $a^p e^{2p}$, $a^p e^{3p}$, ... $a^p e^{(n-1)p}$

s erste Glied dieser Reihe ist a^p *und der Faktor (Exponent) derselben ist* e^p. *Setzt n also in die Summenformel des §. 5* a^p *statt* a, *und* e^p *statt* e, *so ist*

$$\int (ae^{n-1})^p = \frac{a^p (e^{np} - 1)}{e^p - 1}$$

§. 6. *Lehnsatz. Die allgemeine Form der arithmetischen Reihe der ersten lnung ist* $a,\ a + d,\ a + 2d,\ \ldots.\ a + (n-1)\,d$.

r ist $t_n = a + (n-1)\,d = dn + (a - d)$, *und* $\int n = \frac{1}{2} n\,(a + t_n)$.

Zusatz. Das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe der ersten Ordnung eine Funktion des ersten Grades von der Stellenzahl n, *und kann allgemein durch* $= \alpha n + \beta$ *vorgestellt werden, wo die konstanten Koeffizienten* α *und* β *in jedem spe- len Falle aus 2 gegebenen Gliedern nebst ihren Stellenzahlen bestimmt werden können.*

Beispiel. Das 5te und 8te Glied einer Reihe sei 16 *und* 25, *so ist* $5\alpha + \beta$ 16, *und* $8\alpha + \beta = 25$; *also* $\alpha = 3$, $\beta = 1$, *und* $t_n = 3n + 1$; *mithin ist die he:* 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, ... $(3n + 1)$.

Nach dieser Vorbereitung gehen wir an die Lösung der Aufgabe (§. 8. 9), wel- den Inhalt der vorliegenden Abhandlung bildet:

Das summatorische Glied einer Reihe zu bestimmen, welche durch Multiplika- tion beliebig vieler arithmetischer Reihen erster Ordnung entstanden ist.

Auflösung gründen wir auf einen speziellen Fall in §. 7, und fügen dann in den 0—13 die unabhängige Lösung besonderer Fälle hinzu. Den Schluss bildet in §. 15 als Anhang eine Aufgabe, die zwar nicht in der allgemeinen enthalten, aber doch ihr verwandt ist.

Möge die elementare Behandlung des Stoffes nicht ohne anregenden Einfluss au den Privatfleiss unserer fähigeren Schüler bleiben.

§. 7. *Aufgabe. Die Summe der natürlichen Zahlen, welche auf einerlei Poten erhoben sind, zu finden.*

Das allgemeine oder n*te Glied der* r*ten Potenz der natürlichen Zahlenreihe is* n^r*; es soll also* $\int n^r$ *gefunden werden.*

Auflösung. Nach dem Binomialtheorem ist

$$(n+1)^r = n^r + r\,.\,n^{r-1} + \frac{r\,.\,r-1}{1\,.\,2}\,.\,n^{r-2} + \frac{r\,.\,r-1\,.\,r-2}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,n^{r-3} + \ldots\ldots$$

Betrachtet man $(n+1)^r$ *als das allgemeine Glied einer Reihe, so ist nach §. 2 und 4 weil die Koeffizienten* r, $\frac{r\,.\,r-1}{1\,.\,2}$ *u. s. w. konstant sind,*

$$\int(n+1)^r = \int n^r + r\int n^{r-1} + \frac{r\,.\,r-1}{1\,.\,2}\int n^{r-2} + \frac{r\,.\,r-1\,.\,r-2}{1\,.\,2\,.\,3}\int n^{r-3} + \ldots\ldots$$

also wenn $\int n^r$ *auf die linke Seite gesetzt wird, nach §. 1. Zus. 1.*

$$(n+1)^r - 1 = r\int n^{r-1} + \frac{r\,.\,r-1}{1\,.\,2}\int n^{r-2} + \frac{r\,.\,r-1\,.\,r-2}{1\,.\,2\,.\,3}\int n^{r-3} + \ldots.$$

folglich
$$\int n^{r-1} = \frac{(n+1)^r - 1}{r} - \frac{r-1}{2}\int n^{r-2} - \frac{r-1\,.\,r-2}{2\,.\,3}\int n^{r-3} - \ldots.$$

oder, wenn r *statt* $r-1$ *gesetzt wird,*

$$\int n^r = \frac{(n+1)^{r+1} - 1}{r+1} - \frac{r}{2}\int n^{r-1} - \frac{r\,.\,r-1}{2\,.\,3}\int n^{r-2} - \ldots.$$

Vermittelst dieser Formel kann also das summatorische Glied der r*ten Poten reihe der natürlichen Zahlen aus allen niedrigeren Potenzreihen gefunden werden.*

Setzt man für r *nach einander die Werthe* 0, 1, 2, 3, ..., *so bricht die Rei rechter Hand vor dem Gliede ab, in welchem einer der Faktoren* r, $r-1$, $r-2$, *gleich Null wird. Man erhält also*

$$\int n^0 = (n+1) - 1 = n$$

$$\int n^1 = \frac{(n+1)^2 - 1}{2} - \frac{1}{2}\int n^0$$

$$\int n^2 = \frac{(n+1)^3 - 1}{3} - \frac{2}{2}\int n^1 - \frac{2.1}{2.3}\int n^0$$

$$\int n^3 = \frac{(n+1)^4 - 1}{4} - \frac{3}{2}\int n^2 - \frac{3.2}{2.3}\int n^1 - \frac{3.2.1}{2.3.4}\int n^0$$

$$\int n^4 = \frac{(n+1)^5 - 1}{5} - \frac{4}{2}\int n^3 - \frac{4.3}{2.3}\int n^2 - \frac{4.3.2}{2.3.4}\int n^1 - \frac{4.3.2.1}{2.3.4.5}\int n^0$$

$$\int n^5 = \frac{(n+1)^6 - 1}{6} - \frac{5}{2}\int n^4 - \frac{5.4}{2.3}\int n^3 - \frac{5.4.3}{2.3.4}\int n^2 - \frac{5.4.3.2}{2.3.4.5}\int n^1 - \frac{5.4.3.2.1}{2.3.4.5.6}\int n^0$$

u. s. w.

Weil $\int n^0 = n$ *(§. 1 Zus. 2), und das erste und letzte Glied auf der rechten ite einerlei Nenner haben, so kann man nach Aufhebung der gemeinschaftlichen Fak- en auch schreiben:*

$$\int n^0 = n$$

$$\int n^1 = \frac{(n+1)^2}{2} - \frac{n+1}{2}$$

$$\int n^2 = \frac{(n+1)^3}{3} - \int n^1 - \frac{n+1}{3}$$

$$\int n^3 = \frac{(n+1)^4}{4} - \frac{3}{2}\int n^2 - \int n^1 - \frac{n+1}{4}$$

$$\int n^4 = \frac{(n+1)^5}{5} - 2\int n^3 - 2\int n^2 - \int n^1 - \frac{n+1}{5}$$

$$\int n^5 = \frac{(n+1)^6}{6} - \frac{5}{2}\int n^4 - \frac{10}{3}\int n^3 - \frac{5}{2}\int n^2 - \int n^1 - \frac{n+1}{6}$$ *u. s. w.*

stituirt man in jeder Gleichung die für $\int n^1$, $\int n^2$, $\int n^3$, ... *aus den vorherge- den Gleichungen folgenden Werthe und entwickelt die Formeln 1) nach den Potenzen* n *oder 2) nach* $m = n.(n+1)$, *so findet man*

$$= n$$

$$= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad \frac{m}{2}$$

$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{m}{2}$$

$$= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad \frac{m^2}{4}$$

$$= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \quad . \quad . \quad . \quad = \quad \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{3m-1}{5}$$

$$= \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12} \quad . \quad . \quad . \quad = \quad \frac{m^2}{4} \cdot \frac{2m-1}{3}$$

$$= \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42} \quad . \quad . \quad = \quad \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{3m^2 - 3m + 1}{7}$$

$$= \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12} \quad . \quad . \quad = \quad \frac{m^2}{4} \cdot \frac{3m^2 - 4m + 2}{6}$$

$$= \frac{n^9}{9} + \frac{n^8}{2} + \frac{2n^7}{3} - \frac{7n^5}{15} + \frac{2n^3}{9} - \frac{n}{30} \quad . \quad = \quad \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{5m^3 - 10m^2 + 9m - 3}{15}$$

$$= \frac{n^{10}}{10} + \frac{n^9}{2} + \frac{3n^8}{4} - \frac{7n^6}{10} + \frac{n^4}{2} - \frac{3n^2}{20} \quad . \quad = \quad \frac{m^2}{4} \cdot \frac{2m^3 - 5m^2 + 6m - 3}{5}$$

$$\int n^{10} = \frac{n^{11}}{11} + \frac{n^{10}}{2} + \frac{5n^9}{6} - n^7 + n^5 - \frac{n^3}{2} + \frac{5n}{66}$$
$$= \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{3m^4 - 10m^3 + 17m^2 - 15m + 5}{11}$$

$$\int n^{11} = \frac{n^{12}}{12} + \frac{n^{11}}{2} + \frac{11n^{10}}{12} - \frac{11n^8}{8} + \frac{11n^6}{6} - \frac{11n^4}{8} + \frac{5n^2}{12}$$
$$= \frac{m^2}{4} \cdot \frac{2m^4 - 8m^3 + 17m^2 - 20m + 10}{6}$$

$$\int n^{12} = \frac{n^{13}}{13} + \frac{n^{12}}{2} + n^{11} - \frac{11n^9}{6} + \frac{22n^7}{7} - \frac{33n^5}{10} + \frac{5n^3}{3} - \frac{691n}{2730}$$
$$= \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{105m^5 - 525m^4 + 1435m^3 - 2360m^2 + 2073m - 691}{455 = 5.7.13}$$

$$\int n^{13} = \frac{n^{14}}{14} + \frac{n^{13}}{2} + \frac{13n^{12}}{12} - \frac{143n^{10}}{60} + \frac{143n^8}{28} - \frac{143n^6}{20} + \frac{65n^4}{12} - \frac{691n^2}{420}$$
$$= \frac{m^2}{4} \cdot \frac{30m^5 - 175m^4 + 574m^3 - 1180m^2 + 1382m - 691}{105 = 3.5.7}$$

$$\int n^{14} = \frac{n^{15}}{15} + \frac{n^{14}}{2} + \frac{7n^{13}}{6} - \frac{91n^{11}}{30} + \frac{143n^9}{18} - \frac{143n^7}{10} + \frac{91n^5}{6} - \frac{691n^3}{90} + \frac{7n}{6}$$
$$= \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{3m^6 - 21m^5 + 84m^4 - 220m^3 + 359m^2 - 315m + 105}{15}$$

$$\int n^{15} = \frac{n^{16}}{16} + \frac{n^{15}}{2} + \frac{5n^{14}}{4} - \frac{91n^{12}}{24} + \frac{143n^{10}}{12} - \frac{429n^8}{16} + \frac{455n^6}{12} - \frac{691n^4}{24} + \frac{35}{4}$$
$$= \frac{m_2}{4} \cdot \frac{3m^6 - 24m^5 + 112m^4 - 352m^3 + 718m^2 - 840m + 420}{12}$$

Zusatz 1. Diese Formeln haben merkwürdige Eigenschaften. Betrachten zunächst *die erste Gruppe derselben, so ergiebt sich:*

1) der Exponent des ersten Gliedes ist um 1 *grösser als der Exponent des summa*rischen *Gliedes.*

2) Die Exponenten der 3 *ersten Glieder fallen um* 1, *von da ab immer um* 2. *Daher*

3) die Formel $\int n^r$ 1) $\frac{1}{2}$ (r+3) *Glieder für ein ungerades* r *und* 2) $\frac{1}{2}$ (r+4) *Glie*für *ein gerades* r, *oder allgemein* p+2 *Glieder, wenn* r = 2p + 1 *oder* = 2p *mithin haben* $\int n^{2p}$ *und* $\int n^{2p+1}$ *gleichviele Glieder. Auch folgt*

4) die Formel $\int n^r$ *hat im letzten Gliede* n *in der ersten Potenz, wenn* r *eine ger*Zahl *ist; dagegen* n^2 *(mit Ausnahme von* $\int n^1$*), wenn* r *eine ungerade Zahl ist.*

5) Die Vorzeichen der 3 *ersten Glieder sind* +, *dann wechseln sie regelmässig*

6) Der Koeffizient des ersten Gliedes ist der reziproke Werth seines Exponenten.

7) Der Koeffizient des zweiten Gliedes ist konstant = $\frac{1}{2}$.

8) Der Koeffizient des dritten Gliedes ist der zwölfte Theil von dem Exponenten e*zweiten Gliedes.*

ahme ist von allen Schülern vorauszusetzen, und nur auf die motivirte Erklärung der ltern, dass sie die Theilnahme ihrer Angehörigen nicht wollen, darf eine desfallsige Dispen- tion ertheilt werden. Wo der Aufwand für die Turnübungen auf keine andere Weise ge- ckt werden kann, soll von allen Schülern, mit Ausnahme der Freischüler, zu dem bisheri- gen Schulgelde ein mässiger Zusatz von höchstens einem Thaler jährlich erhoben werden.

Schüler, welche nicht bis zum achten Tage nach dem Beginn des Schulunterrichts im erteljahre abgemeldet sind, haben das Schulgeld für das begonnene Vierteljahr zu entrichten.

Wenn Schüler sich einer Schulstrafe durch Abgang von dem Gymnasium entziehen, so ıd sie als Verwiesene zu betrachten und zu behandeln. Sie dürfen vor Ablauf eines Viertel- ırs und ohne ein glaubwürdiges Zeugniss über die Unbescholtenheit ihres Betragens und er die gewissenhafte Benutzung der Zeit seit ihrer Verweisung nicht in ein anderes Gymna- ım aufgenommen werden, und sind auch von dort sofort zu entfernen, wenn sie sich nicht gebessert und tüchtig bewähren.

III. Chronik.

Das ablaufende Schuljahr begann Montag den 16. October 1848 und wird nach der öf- ıtlichen Prüfung Sonnabend den 13. October mit der Censur und Versetzung geschlossen rden.

Der Unterricht erlitt in seinem regelmässigen Fortgange keine erhebliche Störung, indem Lehrer im Ganzen sich eines dauernden Wohlseins zu erfreuen hatten und bei einzelnen übergehenden Unpässlichkeiten von ihren Collegen bereitwillig vertreten wurden. Auch der sundheitszustand der Schüler war ungeachtet der im Herbste des vorigen und dieses Jahres hiesigen Orte grassirenden Cholera keineswegs ein ungünstiger zu nennen.

Nur den Verlust eines, in jeder Beziehung sich auszeichnenden, Schülers haben wir zu rauern, des Tertianers Georg Vogt, der am 17. Juni d. J. im Seebade zu Kahlberg ohne rschuldung von irgend einer Seite seinen plötzlichen Tod fand. Die Anstalt bezeugte ihre eilnahme und Liebe für ihren früh entschlafenen Zögling dadurch, dass sie seine irdischen erreste zur lezten Ruhestatt geleitete.

In die Klagen derjenigen Gymnasien, die hinsichtlich des Unterrichts und der Disciplin er den politischen Aufregungen der Jahre 1848 und 1849 schwer gelitten zu haben beken- n, brauchen wir glücklicherweise nicht einzustimmen, da bei uns vielleicht niemals weniger, bst leichte, Verletzungen der Schulordnung vorgekommen sind, als gerade in der Zeit der archie, obgleich diese auch in unsrer Stadt zu verschiedenen Malen bedeutende Tumulte

hervorrief, an denen freilich der gebildete, Gesetz und Freiheit liebende Kern der Bürgerschaft nicht den geringsten Antheil hatte.

Die Sommerferien mussten um 14 Tage verlängert werden, da der schon früher nöthig befundene und veranschlagte Reparaturbau an den Gymnasialgebäuden in diesem Jahre ausgeführt wurde und innerhalb der anberaumten Frist von 4 Wochen noch nicht so weit gedieher war, dass der Unterricht zur festgesetzten Zeit wieder begonnen werden konnte. Das Gymnasium hat in einigen Zimmern neue Fussböden, Öfen, Thüren und Fenster, ferner neue Dach rinnen, einen neuen Abputz und eine neue Freitreppe erhalten. Der freie Platz vor den Gymnasium ist geebnet, durch zweckmässige Abwässerung trocken gelegt und mit theilweis neuer Umzäunung versehen. Eben so sind an der Directorwohnung die dringendsten Repara turen vorgenommen, die freilich den alten, in ihren Erdgeschossen durch und durch verstockte und in der Bedachung schadhaften, Gebäuden die längst verlorene Bewohnbarkeit des grösste Theils nicht wiedergeben konnten. Schade, dass wir alle diese Verbesserungen durch de Verlust der schönen alten Linde an der Freitreppe und durch die Verstümmelung ihrer Nach barinnen erkaufen mussten.

Dem Gesang- und Schreiblehrer Herrn Musikdirector Döring ist zu dem bisherige Gehalte eine jährliche Zulage von 66 Rthlr. 7 Sgr. 6 Pf. bewilligt worden.

Die Pensionen der schon vor längerer Zeit in den Ruhestand versetzten Lehrer d Gymnasiums sind vom 1. October 1848, die des zuletzt aus dem Lehrercollegium geschieden Herrn Professor Buchner vom 1. Januar d. J. ab im ganzen Betrage auf den Pensionsfon übernommen.

Nachdem durch diese Massregel die vacante erste Oberlehrerstelle wieder besetzbar g worden war, hat das Königl. Ministerium mittels Rescripts vom 31. Juli c. dieselbe dem Her Professor Merz verliehen; wegen Besetzung der dadurch erledigten zweiten Oberlehrerste sich die Entscheidung noch vorbehalten.

Am 15. Januar c. beehrte der Königl. Regierungs- und Schulrath Herr Dr. Dieckma das Gymnasium mit seinem Besuche und widmete während der ganzen Schulzeit dem Unt richte in allen Classen seine theilnehmende Aufmerksamkeit.

So haben wir im Laufe des verwichenen Schuljahrs von Seiten der vorgesetzten Beh den mannichfache Beweise wohlwollender Fürsorge erhalten, deren Erwähnung wir nic schliessen können, ohne den gebührenden Dank dafür abzustatten und ohne uns frohen A sichten für die Zukunft hinzugeben.

Der Turnunterricht erfuhr in sofern eine Abänderung, als die Schüler des Gymnasiu während des Sommers d. J. unter Leitung der Herren Dr. Steinke und Carl die gymna schen Übungen in abgesonderten Stunden für sich anstellten.

IV. Statistische Übersicht.

Das Lehrercollegium hat zur Zeit folgende Mitglieder:

1. Dr. Benecke, Director und Professor.
2. Merz, K. Professor.
3. Die zweite Oberlehrerstelle ist vacant.
4. Richter, K. Professor.
5. Sahme, Oberlehrer.
6. Scheibert, Oberlehrer.
7. Lindenroth, ordentlicher Lehrer.
8. Dr. Steinke, ordentlicher Lehrer.
9. Carl, ordentlicher Lehrer der engl. und franz. Sprache.
10. Döring, Musikdirector, Gesang- und Schreiblehrer.
11. Müller, Zeichenlehrer.
12. Dr. Töppen, Hülfslehrer.

Die Gesammtzahl der Schüler betrug gegen den Schluss des vorigen Schuljahres (am . September 1848) 147, von denen 11 in I., 29 in II., 31 in III., 20 in IV., 28 in V., 28 VI. sich befanden. Abgegangen sind seit jenem Datum theils noch vor dem Anfange des tfenden Schuljahrs, theils während desselben 47. Neu aufgenommen dagegen sind 36, so ss das Gymnasium gegenwärtig (den 15. September 1849) 136 Schüler zählt, unter denen in I., 18 in II., 19 in III., 26 in IV., 34 in V., 28 in VI. sitzen. Die Döring'sche Pri-Vorbereitungsschule wird von 83 Knaben besucht.

Zu Michaelis 1848 wurden 8 Schüler mit dem Zeugnisse der Reife zur Universität entlassen:

1. Friedrich Alsen aus Elbing, 19½ Jahr alt, evangelischer Confession, Sohn des sigen Commerzienrathes Herrn Alsen, 12 Jahre auf dem Gymnasium, 3 Jahr in Prima, wel-er in Berlin Jura und Cameralia studiren wollte.

2. Alfred Benetsch aus Schwetz, 19 Jahr alt, evangelischer Confession, Sohn des eis-Justizraths Herrn Benetsch in Stuhm, gebildet auf den Gymnasien zu Danzig, Marienwer-· und Elbing, 2 Jahre in Prima, der in Königsberg sich dem Studium der Medicin zu wid-n gedachte.

3. Rudolph Petzenbürger aus Marienburg, 20¾ Jahr alt, evangelischer Confession, an des verstorbenen Kaufmanns Herrn Petzenbürger in Marienburg, 6 Jahr auf dem Gymna-m, 3 Jahre in Prima, welcher in Königsberg Jura zu studiren Willens war.

4. Adolph Putzroth aus Heiligenbeil, 21 Jahr alt, mosaischer Confession, Sohn des

Kaufmanns Herrn Putzroth in Mehlsack, 5 Jahre auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima, der in Königsberg Philologie zu studiren beabsichtigte.

5. Paul Rogge aus Elbing, 17¾ Jahr alt, evangelischer Confession, Sohn des Kaufmanns Herrn Rogge hieselbst, 4 Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima, der in Berlin dem Studium der Medicin sich zuwenden wollte.

6. Adolph Sablotny aus Elbing, 17½ Jahr alt, evangelischer Confession, Sohn des hier verstorbenen Hauptmanns Herrn Sablotny, 9 Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima, der in Halle Jura und Cameralia zu studiren beschlossen hatte.

7. Philipp Schulz aus Johannisburg, 18¾ Jahr alt, evangelischer Confession, Sohn des Superintendenten Herrn Schulz in Johannisburg, 4¾ Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima, welcher in Königsberg Jura studiren wollte.

8. Heinrich Zarnikow aus Elbing, 19½ Jahr alt, evangelischer Confession, Sohn des hiesigen Kaufmanns Herrn Zarnikow, 11 Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima, welcher in Königsberg Jura zu studiren gedachte.

V. Lehrapparat.

1. Die Bibliothek des Gymnasiums hat in diesem Schuljahre von dem Königl. Ministerium der Geistlichen, Unterrichts- und Medicinalangelegenheiten zum Geschenke erhalten: Rheinisches Museum für Philologie. Neue Folge. Jahrgang VI. Welcker's epischer Cyclus. Theil 2. Haupt's Zeitschrift für Deutsches Alterthum. VII. 2. 3. Schulze's Gothisches Glossar. Spruner's historisch-geographischer Handatlas. Lief. 12. Bernd's Hauptstücke der Wappenwissenschaft. Abth. 2. Bernd's die drei deutschen Farben. Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 37. 2. 3. 4. Bd. 38. Verhandlungen über die Reorganisation der höhern Schulen. Ausserdem ist die Bibliothek aus dem ihr zugewiesenen Fonds auf angemessene Weise vermehrt worden.

2. Die Schülerbibliothek ist durch die Beiträge der einzelnen Classen erweitert.

3. u. 4. Die Sammlung physikalischer Instrumente und das chemische Laboratorium sind für die ausgesetzte Summe nicht nur im erforderlichen Stande erhalten, sondern es wurden auch neu angeschafft: eine kleine Hochdruck-Dampfmaschine von Schichau, ein Equilibrist von v. Krause, Bessel's populäre Vorlesungen über wissenschaftliche Gegenstände, Schödler's Buch der Natur, Jahn's wöchentliche Unterhaltungen über Astronomie, Geographie und Witterungskunde Jahrgang 1849. Zum Geschenk erhielt das physikalische Cabinet eine Geschichte der Aerostatik in 2 Bänden, so wie mehrere von Schülern der Prima und Secunda gefertigte statische und elektrische Apparate und stereometrische Modelle.

9) Die übrigen Koeffizienten folgen verwickelteren Gesetzen (vergl. Zus. 2). Nur ist ch zu bemerken, dass die algebraische Summe der Koeffizienten jedes summatorischen iedes = 1 ist.

Aus der zweiten Gruppe der Formeln erhellet, dass mit Ausnahme von $\int n^0$ *und*

10) alle summatorischen Glieder von der Form $\int n^{2p+1}$ *den gemeinsamen Faktor* $= n^2 (n+1)^2$, *die von der Form* $\int n^{2p}$ *den gemeinsamen Faktor* $(2n+1) \cdot m = (n+1)(2n+1)$ *haben.*

Zusatz 2. Die Berechnung der Summenformel $\int n^r$ *nach der im §. angegebenen thode wird immer mühsamer, je grösser* r *ist; sie wird aber durch folgende einfache gel sehr erleichtert. Man bezeichne die absoluten Koeffizienten des letzten Gliedes in ersten Gruppe der summatorischen Glieder* $\int n^0, \int n^1, \int n^2, \int n^3, \ldots$ *durch* $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$, *wo der Fussexponent von* a *dem Exponenten in dem zugehörigen Gliede* $\int n^r$ *enticht. Diese Reihe* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *werde bis zur* $(r-1)$*ten oder bis zur* $(r-2)$*ten enz fortgesetzt, je nachdem* r *eine ungerade oder eine gerade Zahl ist. Ferner behne man die Binomial-Koeffizienten der* $(r+1)$*ten Potenz durch* $B_0, B_1, B_2, B_3, \ldots$ $B_0 = 1$ *als Koeffizient des ersten Gliedes,* $B_1 = r+1$ *als K. des zweiten Gliedes,* $= \frac{1}{2}(r+1)\,r$ *als K. des dritten Gl. u. s. w. Multiplicirt man nun folgende zwei hen:*

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_4,\ a_6,\ a_8,\ a_{10},\ \ldots\ldots \qquad (\alpha)$$

$$\frac{B_0}{B_1},\ \frac{B_1}{B_1},\ \frac{B_2}{B_1},\ \frac{B_4}{B_1},\ \frac{B_6}{B_1},\ \frac{B_8}{B_1},\ \frac{B_{10}}{B_1},\ \ldots\ldots \qquad (\beta)$$

d für Glied mit einander, so erhält man die Koeffizienten des summatorischen Glie- $\int n^r$. *Man gebe nun nach Anleitung der Regeln im Zus. 1 diesen Koeffizienten noch erforderlichen Vorzeichen, und beachte, dass* $\frac{a_0 B_0}{B_1} = \frac{1}{r+1}$, $\frac{a_1 B_1}{B_1} = a_1 = \frac{1}{2}$, *so et man die Koeffizienten von* $\int n^r =$

$$\frac{1}{r+1} + \frac{1}{2} + \frac{a_2 B_2}{r+1} - \frac{a_4 B_4}{r+1} + \frac{a_6 B_6}{r+1} - \frac{a_8 B_8}{r+1} + \ldots.$$

ist jedoch zu bemerken, dass für ein gerades r *der letzte Koeffizient von* $\int n^r$ *durch e Regel nicht gefunden wird, welcher daher nach Zus. 1 Nro. 9 bestimmt werden s. — Wir wollen diese Regel durch folgende Beispiele erläutern. Die summatorin Glieder sind im §. bis* $\int n^{15}$ *entwickelt worden. Man verlangt nun hieraus* $\int n^{16}$ $\int n^{17}$ *zu finden. Für* $\int n^{16}$ *ist* r *eine gerade Zahl, wir setzen also in der Zeile die Koeffizienten* $a_0, a_1 \ldots$ *bis* $\int n^{14}$ *und darunter in der Zeile* B_{17} *die Binomialffizienten der 17ten Potenz, jeden durch 17 dividirt, gemäss den obigen Reihen* α *u.* β. *Produkte beider Reihen geben die Koeffizienten von* $\int n^{16}$.

$K_{14} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66}, \frac{691}{2730}, \frac{7}{6}$

$B_{17} = \frac{1}{17}, 1, 8, 140, 728, 1430, 1144, 364, 40, \ldots$

$\int n^{16} = \frac{1}{17} + \frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \frac{14}{3} + \frac{52}{3} - \frac{143}{3} + \frac{260}{3} - \frac{1382}{15} + \frac{140}{3} - \frac{3617}{510}$

Ebenso stehen in der Zeile K_{16} *die Koeffizienten* $a_0, a_1, \ldots$ *bis* $\int n^{16}$, *und in de*
Zeile B_{18} *die Binomial-Koeffizienten der 18ten Potenz, jeder durch 18 dividirt, gemäs*
α *und* β. *Die Produkte beider Zeilen geben die Koeffizienten von* $\int n^{17}$

$K_{16} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66}, \frac{691}{2730}, \frac{7}{6}, \frac{3617}{510}$

$B_{18} = \frac{1}{18}, 1, \frac{17}{2}, 170, \frac{3094}{3}, 2431, 2431, \frac{3094}{3}, 170, \frac{17}{2}$

$n^{17} = \frac{1}{18} + \frac{1}{2} + \frac{17}{12} - \frac{17}{3} + \frac{221}{9} - \frac{2431}{30} + \frac{1105}{6} - \frac{11747}{45} + \frac{595}{3} - \frac{3617}{60}$

Zusatz 3. *Schliesslich deuten wir noch einige merkwürdige Relationen zwisch*
diesen Summenformeln an:

1. $\int n^3 = (\int n^1)^2$
2. $\int n^3 - 1 = (\int n^1 + 1)\ (\int n^1 - 1)$
3. $\int n^3 - \int n^1 = (\int {}^1t_{n-1} \cdot \int {}^1t_{n+1} = \frac{1}{4}(n-1) \cdot n \cdot (n+1)(n+2)$
4. $\int n^5 - \int n^3 = \frac{4}{3} \int {}^1t_{n-1} \cdot \int {}^1t_n \cdot \int {}^1t_{n+1} = \frac{1}{6}(n-1) \cdot n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (n+1)$
5. $\frac{\int n^5 - \int n^3}{\int n^3 - \int n^1} = \frac{4}{3} \int n^1 = \frac{2}{3} n\,(n+1)$

Anm. zu No. 3 *und* 4. *Es bezeichne* ^1t_n
^1t_n, $^1t_{n+1}$ *das* $(n-1)$*te*, n*te*, $(n+1)$*te Glied*
natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, ...

6. $\int n^7 + \int n^5 = 2(\int n^3)^2 = 2(\int n^1)^4$
7. $\int n^1 + \int n^3 + \int n^5 + \int n^7 = \int n^1 + (\int n^1)^2 + 2(\int n^1)^4$
$= \frac{1}{2} n\,(n+1) \{1 + \frac{1}{2} n\,(n+1)[1 + 1\,(\frac{1}{2} n\,(n+1))$
8. $\int n^7 + \int n^5 - 2 \int n^3 = 2(\int n^3 + \int n^1)\,(\int n^3 - \int n^1) = 2 \int n^3\,(\int n^1 + 1)\,(\int n^1 -$
9. $\frac{\int n^7 + \int n^5}{2 \int n^3} = (\int n^1 + 1)\,(\int n^1 - 1) + 1$
10. $\frac{\int n^7 + \int n^5}{\int n^3} = 2(\int n^1)^2$
11. $3(\int n^5) - \int n^1) = 8 \int n^3 \cdot \int n^2 \cdot (\int n^1 - 1)$.

Anmerkung. Zur Berechnung von $\int n^r$ *ist nach der Methode dieses §. erfor*
lich, dass man die summatorischen Glieder aller vorhergehenden Reihen $\int n^1, \int n^2,$
bis $\int n^{r-1}$ *kenne. Aus Zus. 1 zu §. 13 erhellet, wie man* $\int n^r$ *für jedes* r *unabhä*
von den vorhergehenden Reihen finden kann.

§. 8. *Aufgabe. Das allgemeine Glied einer Reihe zu finden, welche d*
Multiplikation der gleichnamigen Glieder beliebig vieler arithmetischen Reihen er
Ordnung entstanden ist.

Wenn z. B. die Reihen

2, 3, 4, 5, 6, ...
4, 6, 8, 10, 12, ...
5, 8, 11, 14, 17, ...

multiplicirt werden, so erhält man die Reihe

2 . 4 . 5, 3 . 6 . 8, 4 . 8 . 11, 5 . 10 . 14, 6 . 12 . 17, ...

Auflösung. Das allgemeine Glied einer solchen Reihe ist offenbar das Produkt allgemeinen Glieder der einzelnen Reihen, durch deren Multiplikation die gegebene ihe entstanden ist, und hat die Form

$$t_n = (\alpha_1 n + \beta_1)(\alpha_2 n + \beta_2)(\alpha_3 n + \beta_3) \ldots .$$

nach §. 6 Zus. die Koeffizienten α, β in jedem einzelnen Falle aus 2 gegebenen edern nebst deren Stellenzahlen bestimmt werden können.

Beispiel. Das 3te und 5te Glied einer Reihe sei 4. 7. 8. 10, 6. 13. 12. 18, *ist* ...

$$3\alpha_1 + \beta_1 = 4,\quad 3\alpha_2 + \beta_2 = 7,\quad 3\alpha_3 + \beta_3 = 8,\quad 3\alpha_4 + \beta_4 = 10$$
$$5\alpha_1 + \beta_1 = 6,\quad 5\alpha_2 + \beta_2 = 13,\quad 5\alpha_3 + \beta_3 = 12,\quad 5\alpha_4 + \beta_4 = 18$$

o ...

$$\alpha_1 = 1,\quad \alpha_2 = 3,\quad \alpha_3 = 2,\quad \alpha_4 = 4$$
$$\beta_1 = 1,\quad \beta_2 = -2,\quad \beta_3 = 2,\quad \beta_4 = -2$$

dlich $t_n = (n+1)(3n-2)(2n+2)(4n-2)$, *und die Reihe ist:*
2. 1. 4. 2, 3. 4. 6. 6, 4. 7. 8. 10, 5. 10. 10. 14, 6. 13. 12. 18, 7. 16. 14. 22, ...

§. 9. *Aufgabe. Das summatorische Glied einer Reihe zu finden, welche ch Multiplikation mehrerer arithmetischer Reihen erster Ordnung entstanden ist.*

Auflösung. Das allgemeine Glied einer solchen Reihe ist

$$t_n = (\alpha_1 n + \beta_1)(\alpha_2 n + \beta_2)(\alpha_3 n + \beta_3) \ldots (\alpha_p n + \beta_p)$$
$$= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_p \cdot (n + \tfrac{\beta_1}{\alpha_1})(n + \tfrac{\beta_2}{\alpha_2})(n + \tfrac{\beta_3}{\alpha_3}) \ldots (n + \tfrac{\beta_p}{\alpha_p})$$

nun die Anzahl der Faktoren = p und bezeichnet für die p Elemente

$$\tfrac{\beta_1}{\alpha_1},\ \tfrac{\beta_2}{\alpha_2},\ \tfrac{\beta_3}{\alpha_3},\ \ldots\ \tfrac{\beta_p}{\alpha_p}$$

die Summe ihrer Unionen, C_2 *die Summe der Binionen, ...* C_p *die Summe der men, so ist nach dem Gesetze der Binomischen Faktoren*

$$t_n = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_p \{ n^p + C_1 n^{p-1} + C_2 n^{p-2} + \ldots + C_p \}$$
$$\int t_n = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_p \{ \int n^p + C_1 \int n^{p-1} + C_2 \int n^{p-2} + \ldots + nC_p \}$$

§. 2, 4, 1. Zus. 2, wo in jedem speziellen Falle für $\int n^p$, $\int n^{p-1}$, ... *die Werthe §. 7 gesetzt werden können.*

Beispiel 1. Gegeben sei die Reihe in dem Beispiele zu §. 8, so ist

$$p = 4,\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = 24,\ \tfrac{\beta_1}{\alpha_1} = 1,\ \tfrac{\beta_2}{\alpha_2} = -\tfrac{2}{3},\ \tfrac{\beta_3}{\alpha_3} = 1,\ \tfrac{\beta_4}{\alpha_4} = -\tfrac{1}{2}$$
$$C_1 = \tfrac{5}{6},\ C_2 = -1,\ C_3 = -\tfrac{1}{2},\ C_4 = \tfrac{1}{3}$$

nach $\int t_n = 24 \cdot \{ \int n^4 + \tfrac{5}{6} \int n^3 - \int n^2 - \tfrac{1}{2} \int n + \tfrac{n}{3} \}$
$$= 24 \int n^4 + 20 \int n^3 - 24 \int n^2 - 12 \int n + 8n$$

ist

$$
\begin{array}{rl}
24\,\Delta n^4 = & \frac{24}{5}n^5 + 12n^4 + 8n^3 - \frac{4}{5}n \\
20\,\Delta n^3 = & + 5n^4 + 10n^3 + 5n^2 \\
-24\,\Delta n^2 = & - 8n^3 - 12n^2 - 4n \\
-12\,\Delta n = & - 6n^2 - 6n \\
8n = & + 8n \\
\hline
\Delta t_n = & \frac{24}{5}n^5 + 17n^4 + 10n^3 - 13n^2 - \frac{13}{5}n
\end{array}
$$

Beispiel 2. Für die Reihe 2.5.8, 5.8.11, 8.11.14, ...

ist $t_n = (3n-1)(3n+2)(3n+5)$, $p = 3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 3$,

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = -\frac{1}{3}, \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{2}{3}, \frac{\beta_3}{\alpha_3} = \frac{5}{3}, C_1 = 2, C_2 = \frac{1}{3}, C_3 = -\frac{10}{27}$$

Demnach
$$\Delta t_n = 27\left(\Delta n^3 + 2\Delta n^2 + \frac{1}{2}\Delta n - \frac{10}{27}n\right)$$
$$= 27\,\Delta n^3 + 54\Delta n^2 + 9\Delta n - 10n$$

Nun ist

$$
\begin{array}{rl}
27\,\Delta n^3 = & \frac{27}{4}n^4 + \frac{27}{2}n^3 + \frac{27}{4}n^2 \\
54\,\Delta n^2 = & + 18n^3 + 27n^2 + 9n \\
9\,\Delta n = & + \frac{9}{2}n^2 + \frac{9}{2}n \\
-10n = & - 10n \\
\hline
\Delta t_n = & \frac{27}{4}n^4 + \frac{63}{2}n^3 + \frac{153}{4}n^2 + \frac{7}{2}n
\end{array}
$$

Dieses letzte Beispiel gehört zu einer besonderen Klasse von Reihen, die sich ei facher behandeln lassen, wie wir im §. 10, 11 zeigen wollen.

§. *10. Aufgabe. Das allgemeine Glied einer Reihe zu finden, deren Gli der aus gleichvielen Faktoren bestehen, die einer und derselben Reihe erster Ordnu angehören und zwar so, dass der erste Faktor jedes Gliedes gleich ist dem zweit Faktor des vorangehenden Gliedes.*

Auflösung. Das allgemeine Glied hat nach §. 8 die Form

$$(\alpha_1 n + \beta_1)(\alpha_2 n + \beta_2)(\alpha_3 n + \beta_3) \ldots\ldots$$

Da nun diese Faktoren Glieder einer einzigen Reihe sind, so ist zuerst klar, da $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots$, *weil sonst die Differenz zweier auf einander folgenden Faktor nicht konstant sein könnte, und* $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ .... *müssen eine arithmetische Reihe o ersten Ordnung bilden. Es ist also zuerst*

$$t_n = (\alpha n + \beta_1)(\alpha n + \beta_2)(\alpha n + \beta_3) \ldots.$$

Da ferner der erste Faktor des n ten Gliedes gleich ist dem zweiten Faktor des (n− ten Gliedes, so muss sein

$$\alpha n + \beta_1 = \alpha(n-1) + \beta_2, \text{ also } \beta_2 = \beta_1 + \alpha$$

Die Grössen $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, ... *bilden also eine arithmetische Reihe erster Ordnu deren Differenz* $= \alpha$; *folglich ist, wenn die Zahl der Faktoren jedes Gliedes* $= p$

$t_n = (\alpha n + \beta)\ (\alpha n + \beta + \alpha)\ (\alpha n + \beta + 2\alpha)\ \ldots\ldots\ (\alpha n + \beta + (p-1)\ \alpha)$
in jedem speziellen Falle ein gegebenes Glied nebst seiner Stellenzahl zur Bestim-
ng von α und β hinreicht.

Wenn z. B. das 2te Glied 5. 8. 11. *ist, so ist* $2\alpha + \beta = 5$, $2\alpha + \beta + \alpha = 8$,
o $\alpha = 3$, $\beta = -1$, $t_n = (3n-1)\ (3n+2)\ (3n+5)$

§. *11. Aufgabe. Das summatorische Glied einer Reihe, wie in §. 10, zu*
len.

Auflösung. Bezeichnen wir das allgemeine Glied einer solchen Reihe durch

$$t_{p-1} = a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots\ldots a_{p-1}$$

die Anzahl der Faktoren $= p$, *und*

$= \alpha n + \beta$, $a_1 = \alpha n + \beta + \alpha$, $a_2 = \alpha n + \beta + 2\alpha$, $\ldots$ $a_{p-1} = \alpha n + \beta + (p-1)\ \alpha$,
dass $a_m = \alpha n + \beta + m\alpha$, $a_p = \alpha n + \beta + p\alpha$, $a_{-1} = \alpha n + \beta - \alpha$ *bedeute;*
zen wir ferner $a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots\ldots a_{p-1} \cdot a_p = A$

$$a_{-1} \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots\ldots a_{p-1} = B$$

ist $A - B = a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots\ldots a_{p-1} \cdot (a_p - a_{-1}) = t_{p-1} \cdot (a_p - a_{-1})$
n ist $a_p - a_{-1} = (\alpha n + \beta + p\alpha) - (\alpha n + \beta - \alpha) = (p+1)\ \alpha$, *demnach*
$- B = (p+1)\ \alpha \cdot t_{p-1}$ *und* $(p+1)\ \alpha \cdot \int t_{p-1} = \int (A - B) = \int A - \int B$ (§. 3),
?

$$\int t_{p-1} = \frac{\int A - \int B}{(p+1)\alpha}$$

nun die Reihen, deren allgemeine Glieder A *und* B *sind, in allen Gliedern mit*
snahme des letzten von A *und des ersten von* B *übereinstimmen, das letzte oder* n*te*
ed der Reihe A *aber* $= a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots\ldots a_p = t_p$, *und das erste Glied der Reihe*
$= \beta\ (\beta + \alpha)\ (\beta + 2\alpha)\ \ldots\ldots\ (\beta + p\alpha)$ *ist, welches man erhält, wenn man in* B
$= 1$ *setzt, und welches wir durch* β_p *bezeichnen wollen, so ist*

$$\int t_{p-1} = \frac{t_p - \beta_p}{(p+1)\ \alpha}$$

Beispiel 1. Reihe: 8.13.18.23, 13.18.23.28, $\ldots$ $(5n+3)(5n+8)(5n+13)(5n+18)$

$$\alpha = 5,\ \beta = 3,\ p = 4,\ \beta_p = 3.8.13.18.23$$

$$\int t_{p-1} = \frac{(5n+3)\ (5n+8)\ (5n+13)\ (5n+18)\ (5n+23) - 3.8.13.18.23}{25}$$

Beispiel 2. Reihe: 2.5.8, 5.8.11, 8.11.14, $\ldots\ldots$ $(3n-1)\ (3n+2)\ (3n+5)$

$$\alpha = 3,\ \beta = -1,\ p = 3,\ \beta_p = -1.2.5.8$$

$$\int t_{p-1} = \frac{(3n-1)\ (3n+2)\ (3n+5)\ (3n+8) + 1.2.5.8}{12}$$

Beispiel 3. *Reihe:* $2.4.6.8,\ 4.6.8.10,\ \ldots\ldots\ 2n\,(2n+2)\,(2n+4)\,(2n+6)$

$$\alpha = 2,\ \beta = 0,\ p = 4,\ \beta_p = 0$$

$$\int t_{p-1} = \frac{2n\,(2n+2)\,(2n+4)\,(2n+6)\,(2n+8)}{10} = \tfrac{16}{5}\,n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4$$

Zusatz. *Geht* p *über in* $p+1$ *u. s. w., so ist*

$$\int t_p = \frac{t_{p+1} - \beta_{p+1}}{(p+2)\,\alpha},\quad \int t_{p+1} = \frac{t_{p+2} - \beta_{p+2}}{(p+3)\,\alpha}\ \text{u. s. w.}$$

Auch folgt

$$\int t_p - \int t_{p-1} = \frac{t_{p+1} - \beta_{p+1}}{(p+2)\,\alpha} - \frac{t_p - \beta_p}{(p+1)\,\alpha} = t_p \left\{ \frac{a_{p+1}}{(p+2)\,\alpha} - \frac{1}{(p+1)\,\alpha} \right\} - \beta_p \left\{ \frac{\beta + (p+1)\,\alpha}{(p+2)\,\alpha} - \frac{1}{(p+1)} \right.$$

und für beliebige konstante Zahlen A, B

$$A \int t_p - B \int t_{p-1} = t_p \left\{ \frac{A\,a_{p+1}}{(p+2)\,\alpha} - \frac{B}{(p+1)\,\alpha} \right\} - \beta_p \left\{ \frac{A\,[\beta + (p+1)\,\alpha]}{(p+2)\,\alpha} - \frac{B}{(p+1)} \right.$$

§. **12.** *Aufgabe.* ***Das summatorische Glied einer Reihe zu finden, der allgemeines Glied der Bedingung des §. 10 entspricht und ausserdem einen Faktor e hält, welcher die Summe aller Faktoren des Gliedes ist.***

Auflösung. *Bezeichnen wir das allgemeine Glied durch* t^{+}_{p-1}, *so ist*

$$t^{+}_{p-1} = a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots a_{p-1} \cdot (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1}) = t_{p-1} \cdot (a_0 + a_1 + \ldots + a_p$$

Nun ist nach §. 6 $a_0 + a_1 \ldots + a_{p-1} = \frac{1}{2}\,p\,(a_0 + a_{p-1}) = p \cdot \alpha n + p(\beta + \frac{p-1}{2}$

also $t^{+}_{p-1} = p \cdot t_{p-1} \cdot (\alpha n + \beta + \frac{p-1}{2}\,\alpha)$

Addire $\frac{1}{2}\,p\,(p+1)\,\alpha \cdot t_{p-1} = p \cdot t_{p-1} \cdot \frac{p+1}{2}\,\alpha$, *so ist*

$$t^{+}_{p-1} + \tfrac{1}{2}\,p\,(p+1)\,\alpha \cdot t_{p-1} = p \cdot t_{p-1}\,(\alpha n + \beta + p\alpha) = p \cdot t_p,$$

folglich $t^{+}_{p-1} = p \cdot t_p - \frac{1}{2}\,p\,(p+1)\,\alpha \cdot t_{p-1}$ *und* $\int t^{+}_{p-1} = p \int t_p - \frac{1}{2}\,p\,(p+1)\,\alpha \cdot \int t$

wo nach §. 11. Zus. die gesuchte Summe gefunden wird, wenn $p = A$ *und* $\frac{1}{2}\,p\,(p+1$ $= B$ *gesetzt wird.*

Beispiel 1. *Reihe:* $1.3.4,\ 3.5.8,\ 5.7.12,\ \ldots.\ (2n-1)\,(2n+1)\,.\,4n$

$$\alpha = 2,\ \beta = -1,\ p = 2,\ \beta_p = -1.1.3,\ A = 2.\ B = 6$$

$$\int t^{+}_{p-1} = 2 \int t_p - 6 \int t_{p-1}$$

$$= (2n-1)\,(2n+1)\,(2n+3) \left\{ \frac{2n+5}{4} - 1 \right\} + 1.1.3. \left\{ \frac{5}{4} - \right.$$

$$= (2n-1)\,(2n+1)\,(2n+3) \cdot \frac{2n+1}{4} + \frac{3}{4}$$

Beispiel 2. *Reihe:* $2.3.4.9,\ 3.4.5.12,\ \ldots..\ (n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(3n$

$$\alpha = 1,\ \beta = 1,\ p = 3,\ \beta_p = 1.2.3.4,\ A = 3,\ B = 6.$$

$$\int t^{+}_{p-1} = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\left\{\frac{3(n+5)}{5} - \frac{6}{4}\right\} - 1.2.3.4\left\{\frac{3.5}{5} - \frac{6}{4}\right\}$$

$$= 3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \cdot \frac{2n+5}{10} - 36$$

Zusatz 1. Nach der Methode dieses §. lassen sich auch die Reihen summiren, en allgemeines Glied ausser den nach §. 11 gebildeten Faktoren $a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots a_{p-1}$ *h einen Faktor* a_x *von der Form* $\alpha n + \gamma$ *enthält. In diesem Falle lässt sich zu n allgemeinen Gliede*

$$a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots a_{p-1} \cdot a_x$$

ches wir durch t^{x}_{p-1} *bezeichnen wollen, die Funktion* $a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots a_{p-1} \cdot q$ *addiren, lass* $a_x + q = a_p$ *wird. Da nämlich* $a_p = \alpha n + \beta + p\alpha$ *und* $a_x + q = \alpha n + \gamma + q$, *ist* $q = \beta + p\alpha - \gamma$, *mithin* q *bekannt und eine konstante Zahl. Man hat also*

$$t^{x}_{p-1} + q \cdot t_{p-1} = t_{p-1} \cdot (a_x + q) = t_{p-1} \cdot a_p = t_p$$

in

$$t^{x}_{p-1} = t_p - q \cdot t_{p-1} \text{ und } \int t^{x}_{p-1} = \int t_p - q \cdot \int t_{p-1}, \text{ also nach §. 11. Zus.}$$

$$\int t^{x}_{p-1} = t_p\left(\frac{a_{p+1}}{(p+2)\alpha} - \frac{q}{(p+1)\alpha}\right) - \beta_p\left(\frac{\beta + (p+1)\alpha}{(p+2)\alpha} - \frac{q}{(p+1)\alpha}\right)$$

Beispiel. Reihe: $5.7.9.1, 7.9.11.3, \ldots (2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n-1)$

$$\alpha = 2,\ \beta = 3,\ p = 3,\ \gamma = -1,\ q = \beta + p\alpha - \gamma = 10,\ \beta_p = 3.5.7.9$$

$$\int t^{x}_{p-1} = (2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n+9)\cdot\left(\frac{2n+11}{10} - \frac{5}{4}\right) - 3.5.7.9\left(\frac{11}{10} - \frac{5}{4}\right)$$

$$= (2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n+9)\cdot\frac{4n-3}{20} + \frac{567}{4}$$

Zusatz 2. Nach derselben Methode lassen sich die Reihen summiren, in deren meinem Gliede ein Faktor a_m *auf die 2te Potenz erhoben ist. Bezeichnen wir das- durch* $^2t_{p-1}$, *so ist*

$$^2t_{p-1} = a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots a_m^2 \ldots a_{p-1} = t_{p-1} \cdot a_m$$

$_m = \alpha n + \beta + m\alpha$. *Man hat also statt* a_x *des vorigen Zusatzes* a_m *und statt setzen* $\beta + m\alpha$, *mithin*

$$q = \beta + p\alpha - (\beta + m\alpha) = (p-m)\alpha,$$

$$^2t_{p-1} = t_p - (p-m)\alpha \cdot t_{p-1}$$

$$\int {}^2t_{p-1} = \int t_p - (p-m)\alpha \cdot \int t_{p-1}$$

$$= t_p \cdot \left(\frac{a_{p+1}}{(p+2)\alpha} - \frac{p-m}{p+1}\right) - \beta_p \cdot \left(\frac{\beta + (p+1)\alpha}{(p+2)\alpha} - \frac{p-m}{p+1}\right)$$

Beispiel. Reihe: $2.5^2.8, 5.8^2.11, \ldots (3n-1)(3n+2)^2(3n+5)$

$$\alpha = 3,\ \beta = -1,\ p = 3,\ m = 1,\ \beta_p = -1.2.5.8$$

$$\int {}^{2}t_{p-1} = (3n-1)(3n+2)(3n+5)(3n+8)\cdot\left(\frac{3n+11}{15}-\frac{1}{2}\right)+1.2.5.8.\left\{\frac{11}{15}-\frac{1}{2}\right\}$$

$$= (3n-1)(3n+2)(3n+5)(3n+8)\cdot\frac{6n+7}{30}+\frac{56}{3}$$

Wir wollen jetzt die Aufgabe des 2ten Zusatzes allgemein behandeln.

§. 13. *Aufgabe. Das summatorische Glied einer Reihe zu finden, deren allgemeines Glied den Bedingungen des §. 10 entspricht, wenn ausserdem einer der Faktoren* a_m *auf die* $(r+1)$ *te Potenz erhoben ist.*

Auflösung. Bezeichnen wir das allgemeine Glied durch ${}^{r+1}t_{p-1}$, *so ist*

$${}^{r+1}t_{p-1} = a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots \overset{r+1}{a_m} \ldots\ldots a_{p-1}$$

Eben so ist

$${}^{r}t_{p} = a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots \overset{r}{a_m} \ldots\ldots a_{p-1} \cdot a_p$$

also

$${}^{r}t_{p} - {}^{r+1}t_{p-1} = a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots a_m \ldots a_{p-1} \cdot (a_p - a_m) = {}^{r}t_{p-1} \cdot (a_p - a_m$$

Nun ist $a_p - a_m = (\alpha n + \beta + p\alpha) - (\alpha n + \beta + m\alpha) = \alpha\,(p-m)$, *also wen* $\alpha\,(p-m) = A$ *gesetzt wird,*

$${}^{r}t_{p} - {}^{r+1}t_{p-1} = A \cdot {}^{r}t_{p-1}$$

folglich

$${}^{r+1}t_{p-1} = {}^{r}t_{p} - A \cdot {}^{r}t_{p-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\lambda$$

Wendet man das Gesetz, welches diese Gleichung (λ) *enthält, auf ihr letztes Glied an, so immerfort an, so erhält man*

$$\begin{aligned}
{}^{r+1}t_{p-1} &= {}^{r}t_{p} - A\left\{{}^{r-1}t_{p} - A \cdot {}^{r-1}t_{p-1}\right\} \text{ wegen } \lambda \\
&= {}^{r}t_{p} - A \cdot {}^{r-1}t_{p} + A^2 \cdot {}^{r-1}t_{p-1} \\
&= {}^{r}t_{p} - A \cdot {}^{r-1}t_{p} + A^2 \cdot \left\{{}^{r-2}t_{p} - A \cdot {}^{r-2}t_{p-1}\right\} \text{ wegen } \lambda \\
&= {}^{r}t_{p} - A \cdot {}^{r-1}t_{p} + A^2 \cdot {}^{r-2}t_{p} - A^3 \cdot {}^{r-2}t_{p-1} \\
&= {}^{r}t_{p} - A \cdot {}^{r-1}t_{p} + A^2 \cdot {}^{r-2}t_{p} - A^3 \cdot \left\{{}^{r-3}t_{p} - A \cdot {}^{r-3}t_{p-1}\right\} \text{ wege} \\
&= {}^{r}t_{p} - A \cdot {}^{r-1}t_{p} + A^2 \cdot {}^{r-2}t_{p} - A^3 \cdot {}^{r-3}t_{p} + A^4 \cdot {}^{r-3}t_{p-1}
\end{aligned}$$

Das Bildungsgesetz dieser Reihe ist deutlich. Setzt man die Reduktion fort, bis *zweite Faktor des letzten Gliedes* $= {}^{1}t_{p-1}$ *ist, so erhält man*

$${}^{r+1}t_{p-1} = {}^{r}t_{p} - A \cdot {}^{r-1}t_{p} + A^2 \cdot {}^{r-2}t_{p} - A^3 \cdot {}^{r-3}t_{p} + \ldots\ldots \mp A^{r-1} \cdot t_p \pm A^r \cdot$$

Die Zeichen wechseln regelmässig ab, daher hat das letzte Glied + für ein gerades *und — für ein ungerades* r. *Man findet also*

$${}^{2}t_{p-1} = t_p - A \cdot t_{p-1}, \text{ vergl. §. 12 Zus. 2.}$$

$${}^{3}t_{p-1} = {}^{2}t_{p} - A \cdot t_p + A^2 \cdot t_{p-1}$$

$${}^{4}t_{p-1} = {}^{3}t_{p} - A \cdot {}^{2}t_{p} + A^2 \cdot t_p - A^3 \cdot t_{p-1}$$

$${}^{5}t_{p-1} = {}^{4}t_{p} - A \cdot {}^{3}t_{p} + A^2 \cdot {}^{2}t_{p} - A^3 \cdot t_p + A^4 \cdot t_{p-1} \text{ u. s. w.}$$

e Summation der Reihe $t_n = {}^{r+1}t_{p-1}$, *wo der Faktor* a_m *auf die* $(r+1)$*te Potenz ioben ist, hängt hiernach ab von der Summation aller Reihen, welche* a_m *in den drigeren Potenzen bis zur ersten herab enthalten. Um diese Abhängigkeit zu ver-iden, setze man in den obigen Gleichungen für* ${}^2t_p$, ${}^3t_p$ *u. s. w. die Werthe aus den hergehenden Gleichungen. Aus der Entwickelung von* (λ) *aber erhellet, dass, wenn ibergeht*

$$\begin{aligned} &\text{in } p+1, \text{ auch } A \text{ in } A_1 = \alpha\,(p+1-m) \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (\mu)\\ &\text{in } p+2, \;.\;.\;.\;. \; A_2 = \alpha\,(p+2-m) \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

rgehen müsse. Wir erhalten demnach

$$t_{p-1} = t_p - A\,.\,t_{p-1}$$

$$\begin{aligned} t_{p-1} &= {}^2t_p - A\,.\,t_p + A^2\,.\,t_{p-1}\\ &= t_{p+1} - A_1\,.\,t_p\\ &\qquad - A\,.\,t_p + A^2\,.\,t_{p-1}\\ &= t_{p+1} - (A+A_1)\,.\,t_p + A^2\,.\,t_{p-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{p-1} &= {}^3t_p - A\,.\,{}^2t_p + A^2\,.\,t_p - A^3\,.\,t_{p-1}\\ &= t_{p+2} - (A_1+A_2)\,.\,t_{p+1} + A_1{}^2\,.\,t_p\\ &\qquad - A\,.\,(t_{p+1} - A_1\,.\,t_p)\\ &\qquad\qquad + A^2\,.\,t_p - A^3\,.\,t_{p-1}\\ &= t_{p+2} - (A+A_1+A_2)\,.\,t_{p+1} + (A^2+AA_1+A_1{}^2)\,.\,t_p - A^3\,.\,t_{p-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{p-1} &= {}^4t_p - A\,.\,{}^3t_p + A^2\,.\,{}^2t_p - A^3\,.\,t_p + A^4\,.\,t_{p-1}\\ &= t_{p+3} - (A_1+A_2+A_3)\,.\,t_{p+2} + (A_1{}^2+A_1A_2+A_2{}^2)\,.\,t_{p+1} - A_1{}^3\,.\,t_p\\ &\qquad - A\,.\,t_{p+2} + A\,(A_1+A_2)\,.\,t_{p+1} - AA_1{}^2\,.\,t_p\\ &\qquad\qquad + A^2\,.\,t_{p+1} - A^2A_1\,.\,t_p\\ &\qquad\qquad\qquad - A^3\,.\,t_p + A^4\,.\,t_{p-1}\\ &= t_{p+3} - (A+A_1+A_2+A_3)\,.\,t_{p+2} + (A^2+AA_1+AA_2+A_1{}^2+A_1A_2+A_2{}^2)\,.\,t_{p+1}\\ &\qquad - (A^3+A^2A_1+AA_1{}^2+A_1{}^3)\,.\,t_p + A^4\,.\,t_{p-1} \end{aligned}$$

Gesetz, nach welchem diese Formeln fortschreiten, ist einleuchtend. Bezeichnet die Kombinationen mit Wiederholungen in der

1ten Kl. aus den r *Elem.* $A, A_1, A_2, \ldots A_{r-3}, A_{r-2}, A_{r-1}$ *durch* $\overset{r}{K}_1$

2ten Kl. . . . . r—1 . . . $A, A_1, A_2, \ldots A_{r-3}, A_{r-2}$ . . . $\overset{r-1}{K}_2$

⋮

$(r-2)$*ten Kl.* . . . . 3 . . . A, A_1, A_2 . . . $\overset{3}{K}_{r-2}$

(r−1)*ten Kl. aus den* 2 *Elem.* A, A_1 *durch* $\overset{2}{K}_{r-1}$

r *ten Kl.* . . . . . 1 . . . . A . . . . $\overset{1}{K}_r$

so hat man

$$ {}^{r+1}t_{p-1} = t_{p+r-1} - \overset{r}{K}_1 . t_{p+r-2} + \overset{r-1}{K}_2 . t_{p+r-3} - \ldots . \mp \overset{2}{K}_{r-1} . t_p \pm \overset{1}{K}_r . t_{p-1} $$

und folglich

$$ \int^{r+1}t_{p-1} = \int t_{p+r-1} - \overset{r}{K}_1 . \int t_{p+r-2} + \overset{r-1}{K}_2 . \int t_{p+r-3} - \ldots . \mp \overset{2}{K}_{r-1} . \int t_p \pm \overset{1}{K}_r . \int t_{p-1} $$

Die Vorzeichen der Glieder wechseln ab, und das letzte Glied ist für ein gerades positiv, für ein ungerades negativ.

Beispiel. Reihe: $3 . 5 . 7^3, 5 . 7 . 9^3, \ldots . (2n+1)(2n+3)(2n+5)^3$.

$$ \alpha = 2, \beta = 1, p = 3, m = 2, r = 2 $$

$$ {}^3t_{p-1} = t_{p+1} - \overset{2}{K}_1 . t_p + \overset{1}{K}_2 . t_{p-1} $$

$$ A = \alpha(p-m) = 2, A_1 = \alpha(p+1-m) = 4, \overset{2}{K}_1 = 6, \overset{1}{K}_2 = 4 $$

$$ \int^3 t_{p-1} = \int t_{p+1} - 6 \int t_p + 4 \int t_{p-1}, \text{ also nach §. 11} $$

$$ = \tfrac{1}{12} . (2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n+9)(2n+11) - \tfrac{1}{12} . 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 1 $$

$$ - \tfrac{6}{10} . (2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n+9) + \tfrac{6}{10} . 1 . 3 . 5 . 7 . 9 $$

$$ + \tfrac{4}{8} . (2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7) - \tfrac{4}{8} . 1 . 3 . 5 . 7 $$

$$ = (2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7) . \left(\frac{(2n+9)(2n+11)}{12} - \frac{3(2n+9)}{5} + \frac{1}{2} \right) - \frac{14}{} $$

Zusatz 1. Die Aufgabe des §. 7 wird durch die vorstehende Aufgabe gelö wenn man $\alpha = 1, \beta = 0, p = 1, m = 0$ *setzt.*

Beispiel. Man finde $\int n^4$. *Hier ist* $t_{p-1} = n$,

$$ \int n^4 = \int^4 t_{p-1} = \int t_{p+2} - \overset{3}{K}_1 . \int t_{p+1} + \overset{2}{K}_2 . \int t_p - \overset{1}{K}_3 . \int t_{p-1} $$

$$ \alpha = 1, \beta = 0, p = 1, m = 0, r = 3, A = 1, A_1 = 2, A_2 = 3, \overset{3}{K}_1 = 6, \overset{2}{K}_2 = 7, \overset{1}{K}_3 = $$

$$ \int n^4 = \int t_{p+2} - 6 \int t_{p+1} + 7 \int t_p - \int t_{p-1}, \text{ also nach §. 11} $$

$$ = \tfrac{1}{5} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) - \tfrac{6}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) + \tfrac{7}{3} n(n+1)(n+2) - \tfrac{1}{2} n(n+ $$

Diese Formel nach den Potenzen von n *entwickelt giebt die Formel in §. 7.*

Zusatz 2. Es kann nun auch die Summe einer Reihe gefunden werden, de allgemeines Glied $a_0 . a_1 . a_2 \ldots . a_m^{r+1} \ldots . a_{p-1} . S$ *noch den Factor* S *als die Sum sämmtlicher Faktoren in der ersten Potenz enthält. Es ist*

$+ a_1 + a_2 \ldots + a_m \ldots + a_{p-1} = p \cdot \alpha n + p \cdot (\beta + \frac{p-1}{2}\alpha)$. *Bezeichnen wir das allgemeine Glied durch* ${}^{r+1}t^{+}_{p-1}$, *so ist*

$${}^{r+1}t^{+}_{p-1} = p \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots \ldots a_m^{r+1} \ldots \ldots a_{p-1} \cdot (\alpha n + \beta + \tfrac{p-1}{2}\alpha)$$

wire $\frac{1}{2} p \cdot (p+1)\ \alpha \cdot {}^{r+1}t_{p-1} = p \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots \ldots a_m^{r+1} \ldots \ldots a_{p-1} \cdot \frac{p+1}{2}\alpha$

t $\ldots {}^{r+1}t^{+}_{p-1} + \frac{1}{2} p \cdot (p+1)\alpha \cdot {}^{r+1}t_{p-1} = p \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots \ldots a_m^{r+1} \ldots a_{p-1} \cdot (\alpha n + \beta + p\alpha)$

$$= p \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots a_m^{r+1} \ldots a_p = p \cdot {}^{r+1}t_p$$

$${}^{r+1}t^{+}_{p-1} = p \cdot {}^{r+1}t_p - \tfrac{1}{2} p \cdot (p+1)\alpha \cdot {}^{r+1}t_{p-1}$$

nun nach §. 13 die Summen der Reihen ${}^{r+1}t_p$ *und* ${}^{r+1}t_{p-1}$ *gefunden werden können, st auch die Summe der gegebenen Reihe* ${}^{r+1}t^{+}_{p-1}$ *gefunden.*

Beispiel. Reihe: $1 \cdot 2 \cdot 3^4 \cdot 6,\ 2 \cdot 3 \cdot 4^4 \cdot 9,\ \ldots\ n(n+1)(n+2)^4(3n+3)$

$$\alpha = 1,\ \beta = 0,\ p = 3,\ m = 2,\ r = 3$$

$${}^{4}t^{+}_{p-1} = 3 \cdot {}^{4}t_p - 6 \cdot {}^{4}t_{p-1}$$

$$\int {}^{4}t^{+}_{p-1} = 3 \cdot (\int t_{p+3} - \overset{3}{K}_1 \cdot \int t_{p+2} + \overset{2}{K}_2 \cdot \int t_{p+1} - \overset{1}{K}_3 \cdot \int t_p)$$
$$- 6 \cdot (\int t_{p+2} - \overset{3}{K}_1 \cdot \int t_{p+1} + \overset{2}{K}_2 \cdot \int t_p - \overset{1}{K}_3 \cdot \int t_{p-1})$$

er ersten Klammer ist aber $p-1$ *in* p *übergegangen, daher ist nach Gleichung* (μ) *15*

$\alpha(p+1-m) = 2,\ A_1 = \alpha(p+2-m) = 3,\ A_2 = \alpha(p+3-m) = 4;\ K_1 = 9, K_2 = 19, K_3 = 8.$

r zweiten Klammer ist $A = \alpha(p-m) = 1,\ A_1 = 2,\ A_3 = 3;\ K_1 = 6,\ K_2 = 7,\ K_3 = 1$

$$\int {}^{4}t^{+}_{p-1} = 3 \cdot (\int t_{p+3} - 9 \int t_{p+2} + 19 \int t_{p+1} - 8 \int t_p)$$
$$- 6 \cdot (\int t_{p+2} - 6 \int t_{p+1} + 7 \int t_p - \int t_{p-1})$$
$$= 3 \cdot (\int t_{p+3} - 11 \int t_{p+2} + 31 \int t_{p+1} - 22 \int t_p + 2 \int t_{p-1})$$

$\frac{1}{1}(n+1)(n+2)(n+3)\left\{\frac{1}{8}(n+4)(n+5)(n+6)(n+7) - \frac{1}{7}^{1}(n+4)(n+5)(n+6) + \frac{3}{6}^{1}(n+4)(n+5) - \frac{2}{5}^{2}(n+4) + \frac{2}{4}\right\}$

§. 14. *Aufgabe. Das allgemeine Glied einer Reihe zu finden, deren jedes aus* $m+1$ *Faktoren besteht, von denen die* m *ersten Faktoren Glieder einer n. Reihe mit der konstanten Differenz* $= d$, *der letzte oder* $(m+1)$*te aber die ie der vorhergehenden* m *Faktoren und zugleich der erste Faktor des folgenden es ist.*

Auflösung. Irgend ein Glied der Reihe sei

$$x(x+d)(x+2d)(x+3d) \ldots\ldots (x+(m-1)d) \cdot S$$

so ist $S = mx + \frac{1}{2}dm(m-1)$. *Da* S *zugleich der erste Faktor des folgenden Glie des ist, so findet man den ersten Faktor jedes Gliedes, wenn man den ersten Faktor de vorhergehenden Gliedes mit* m *multiplicirt und* $\frac{1}{2}dm(m-1)$ *addirt. Setzt man als den ersten Faktor des*

1. *Gliedes* $= a$, *so ist der erste Faktor des*
2. „ $= ma + \frac{1}{2}dm(m-1)$
3. „ $= m^2a + \frac{1}{2}dm^2(m-1) + \frac{1}{2}dm(m-1)$
4. „ $= m^3a + \frac{1}{2}dm^3(m-1) + \frac{1}{2}dm^2(m-1) + \frac{1}{2}dm(m-1)$

$\vdots$

n. „ $= m^{n-1}a + \frac{1}{2}dm^{n-1}(m-1) + \frac{1}{2}dm^{n-2}(m-1) + \ldots\ldots + \frac{1}{2}dm(m-$

$= m^{n-1}a + \frac{1}{2}dm(m-1)\{m^{n-2} + m^{n-3} + m^{n-4} \ldots\ldots + m + 1\}$

$= m^{n-1}a + \frac{1}{2}dm(m-1) \cdot \frac{m^{n-1}-1}{m-1}$

$= m^{n-1}a + \frac{1}{2}dm(m^{n-1}-1) = (a + \frac{1}{2}dm) \cdot m^{n-1} - d \cdot \frac{1}{2}m$

Es sei nun $a + \frac{1}{2}dm = \alpha$, *so besteht das allgemeine Glied* t_n *aus folgenden Faktore*

1^r *F.*	$\alpha m^{n-1} - d \cdot \frac{1}{2}m$	$= \alpha m^{n-1} - d \cdot \frac{1}{2}m$
2^r *F.*	$\alpha m^{n-1} - d \cdot \frac{1}{2}m + d$	$= \alpha m^{n-1} - d(\frac{1}{2}m - 1)$
3^r *F.*	$\alpha m^{n-1} - d \cdot \frac{1}{2}m + 2d$	$= \alpha m^{n-1} - d(\frac{1}{2}m - 2)$

$\vdots$

m^r *F.*	$\alpha m^{n-1} - d \cdot \frac{1}{2}m + (m-1)d$	$= \alpha m^{n-1} - d(\frac{1}{2}m - (m-$
(m+1)^r *F.*	$m \cdot \alpha m^{n-1} - d \cdot \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}dm(m-1)$	$= m \cdot \alpha m^{n-1} - d \cdot \frac{1}{2}m$
		$= m \cdot (\alpha m^{n-1} - \frac{1}{2}d)$

Beispiel 1. Reihe: 2.3.5, 5.6.11, 11.12.23, 23.24.47, ...

$a = 2,\ d = 1,\ m = 2,\ \alpha = a + \frac{1}{2}dm = 3,$

$t_n = (3 \cdot 2^{n-1} - 1) \cdot (3 \cdot 2^{n-1}) \cdot (3 \cdot 2^n - 1)$

Beispiel 2. Reihe: 2.5.8.11.26, 26.29.32.35.122, 122.125.128.131.506, ..

$a = 2,\ d = 3,\ m = 4,\ \alpha = a + \frac{1}{2}dm = 8$

$t_n = (8 \cdot 4^{n-1} - 6)(8 \cdot 4^{n-1} - 3)(8 \cdot 4^{n-1})(8 \cdot 4^{n-1} + 3)(8 \cdot 4^n - 6$

§. **15.** *Aufgabe. Das summatorische Glied der Reihe des vorigen §. zu finden.*

Auflösung. Man setze in dem allgemeinen Gliede des vorigen §. die zwei Theile der Faktoren $= b_0, b_1, b_2 \ldots b_{m-1}, b_m$, *so dass* $b_0 = d \cdot \frac{1}{2}m$, $b_1 = d(\frac{1}{2}m - 1)$, $b_2 = d(\frac{1}{2}m - 2)$, $\ldots b_{m-1} = d(\frac{1}{2}m - (m-1))$, $b_m = \frac{1}{2}d$, *so ist*

$t_n = (\alpha m^{n-1} - b_0)(\alpha m^{n-1} - b_1)(\alpha m^{n-1} - b_2) \ldots (\alpha m^{n-1} - b_{m-1}) \cdot m \cdot (\alpha m^{n-1} -$

as allgemeine Glied ist also das m*fache Produkt von* m + 1 *Binomischen Faktoren, ren gemeinsamer Theil* $= \alpha\, m^{n-1}$, *und deren zweite Theile* $= b_0, b_1, b_2, \ldots$ *sind. hrt man die Multiplikation aus und bezeichnet durch* C_1 *die Summe der Unionen, rch* C_2 *die Summe der Binionen u. s. w. aus diesen zweiten Theilen, so erhält man*

$$t_n = m\,(\alpha^{m+1}\, m^{(n-1)\,(m+1)} + C_1\, \alpha^m\, m^{(n-1)\,m} + C_2\, \alpha^{m-1}\, m^{(n-1)\,(m-1)} + \ldots + C_m \alpha m^{n-1} + C_{m+1})$$

l $\int t_n = m\,(\alpha^{m+1} \,.\, \int m^{(n-1)\,(m+1)} + C_1\, \alpha^m \,.\, \int m^{(n-1)\,m} + \ldots + C_m \alpha \,.\, \int m^{n-1} + \int C_{m+1})$

ist zufolge §. 5 Zus., und weil nach §. 1 Zus. 2 $\int C_{m+1} = n \,.\, C_{m+1}$ *ist,*

$$= m \left\{ \alpha^{m+1} . \frac{m^{n(m+1)} - 1}{m^{m+1} - 1} + C_1\, \alpha^m \,.\, \frac{m^{nm} - 1}{m^m - 1} + C_2\, \alpha^{m-1} \,.\, \frac{m^{n(m-1)} - 1}{m^{m-1} - 1} + \ldots\ldots \right.$$
$$\left. + C_m\, \alpha \,.\, \frac{m^n - 1}{m - 1} + n \,.\, C_{m+1} \right\}$$

Beispiel 1. *Reihe:* 2.3.5, 5.6.11, 11.12.23, 23.24.47, ...

$a = 2,\ d = 1,\ m = 2,\ \alpha = 3,\ b_0 = -1,\ b_1 = 0,\ b_2 = -\frac{1}{2},$

$$C_1 = -\tfrac{3}{2},\ C_2 = +\tfrac{1}{2},\ C_3 = 0$$

$$\int t_n = 2 \left\{ 3^3 \,.\, \frac{2^{3n} - 1}{2^3 - 1} - \tfrac{3}{2} \,.\, 3^2 \,.\, \frac{2^{2n} - 1}{2^2 - 1} + \tfrac{1}{2} \,.\, 3 \,.\, \frac{2^n - 1}{2 - 1} \right\}$$
$$= \tfrac{54}{7}\,(2^{3n} - 1) - 9\,(2^{2n} - 1) + 3\,(2^n - 1)$$

Beispiel 2. *Reihe:* 2.5.8.11.26, 26.29.32.35.122, ...

$a = 2,\ d = 3,\ m = 4,\ \alpha = 8,\ b_0 = -6,\ b_1 = -3,\ b_2 = 0,\ b_3 = 3,\ b_4 = -\frac{3}{2},$

$$C_1 = -\tfrac{15}{2},\ C_2 = 0,\ C_3 = 1\tfrac{35}{2},\ C_4 = -81,\ C_5 = 0$$

$$t_n = 4 \left\{ 8^5 \,.\, \frac{4^{5n} - 1}{4^5 - 1} - \tfrac{15}{2} \,.\, 8^4 \,.\, \frac{4^{4n} - 1}{4^4 - 1} + 1\tfrac{35}{2} \,.\, 8^2 \,.\, \frac{4^{2n} - 1}{4^2 - 1} - 81 \,.\, 8 \,.\, \frac{4^n - 1}{4 - 1} \right\}$$

Schnellpressendruck von F. W. Neumann-Hartmann in Elbing.

JAHRES-BERICHT

über die

vereinigten Anstalten

s Königl. Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums, der Königl. Realschule und der Königl. Vorschule zu Berlin,

womit zu den

am 23. und 24. März 1877

stattfindenden

öffentlichen Prüfungen

ehrerbietigst einladet

der

Director Kern.

Voran geht: Ueber mechanische Quadratur. Von Prof. Dr. Karl Schellbach.

BERLIN.

Druck von A. W. Hayn's Erben.

(C. Hayn, Hof-Buchdrucker.)

Ueber mechanische Quadratur.

Der Erfolg des Unterrichts in der Mathematik an unseren höheren Lehranstalten ist icht so bedeutend, als man wohl zu erwarten berechtigt wäre, wenn man sieht, wie viele tüchtige nge Mathematiker an diesen Schulen thätig sind. Ein wesentlicher Grund des mangelhaften rfolges dieser Lehrthätigkeit liegt darin, dass gewöhnlich versäumt wird, den Vortrag durch umerische Beispiele zu erläutern. Aber schon Newton sagt: Exempla plus prosunt quam raecepta. Die elementarsten arithmetischen Operationen machen unseren Schülern, selbst in den bersten Klassen, wegen Mangels an Uebung ausserordentliche Schwierigkeiten. Bereits vor mehreren ahren erliess der Cultusminister, in Folge einer Aufforderung von Seiten des Handelsministeriums, ne Verfügung, dass beim mathematischen Unterrichte die Ausführung numerischer Rechnungen icht versäumt werden sollte. Die Ermahnung ist nach meiner Erfahrung ziemlich erfolglos eblieben; zum Theil wohl aus dem Grunde, weil die Studirenden weder durch Lehrbücher noch urch die Vorträge an unseren Universitäten auf den Werth dieses Theils der mathematischen hätigkeit aufmerksam gemacht werden. Denn wie sollte man sich wohl sonst die auffallende rscheinung erklären, dass junge Mathematiker, welche sich der Staatsprüfung für Lehrer unter- ehen, gar nicht selten den Sinus von 3^0 durch die Reihe $3 - \frac{3^3}{1,2,3} + \frac{3^5}{1,2,3,4,5} \cdots$ zu erechnen versuchen. Was aber für Mittel angewandt werden müssen, um z. B. den numerischen Verth eines bestimmten Integrals annähernd zu bestimmen, ist nur wenigen bekannt, ja viele issen nicht einmal, da sie nur mit Buchstabenformeln umgegangen sind, dass ein solches Integral ur einen Zahlenwerth ausdrückt. Zu diesen Ansichten bin ich durch eine mehr als dreissigjährige rfahrung hingedrängt worden.

Schon Gauss hebt in seiner Abhandlung über die annähernde Berechnung bestimmter ntegrale hervor, dass diese Methoden von den Mathematikern, mehr als recht ist, vernach- ssigt werden.

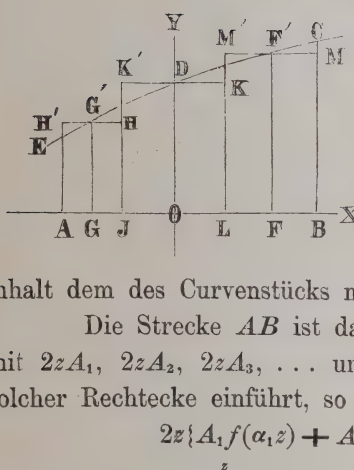
Aber das Studium dieser wichtigen Abhandlung und mehrerer anderen aus der Feder edeutender Mathematiker wird hauptsächlich dadurch erschwert, dass der grosse Reichthum der edanken, der von den Verfassern ausgebreitet wird, sie zu Excursen veranlasst, welche sie emmen, sich dem Hauptziele direct zu nähern. Offenbar würden auf einem mehr geradlinigen

Wege die Studirenden weit leichter folgen können. Der Staat bedarf aber solcher Lehrer u technischen Mathematiker, welche, ohne entschieden productives Talent zu besitzen, doch fä sind, einen möglichst grossen Schatz von mathematischen Kenntnissen in sich aufzunehmen u ihn mit Sicherheit zu verwerthen. Diese Ueberlegungen haben mich bestimmt, hier die Gaussisch und Cotesischen Formeln für die mechanische Quadratur auf eine kurze und leicht verständli Weise zu entwickeln und daran einige Anwendungen und eine neue Methode der Berechnungswe bestimmter Integrale anzuschliessen, die in manchen Fällen gewisse Vortheile vor anderen Metho darbietet. Ich unternehme diese Arbeit zugleich in der Hoffnung und mit dem Wunsche, dass sich in die Lehrbücher der Integralrechnung Eingang verschaffen möchte.

§ 1.

Das bestimmte Integral

$$\int_{-z}^{z} f(x)dx$$



kann bekanntlich so aufgefasst werden, dass es den Flächeninh *ABCDE* der Figur darstellt, welche von dem Stücke *AB* e Abscissenaxe, den Ordinaten *AE* und *BC* und dem Curvenbo *EDC* begrenzt ist. Wenn die Gleichung der Curve $y = f(x)$ s und die Abscissen $OA = -z$ und $OB = +z$ sind, so kön man dieses Flächenstück durch eine Anzahl Rechtecke *AH*, *K* *LM* ersetzen wollen, deren Grundlinien *AJ*, *JL*, *LB* und Hö *GG′*, *OD*, *FF′* so bestimmt werden müssten, dass ihr Fläch inhalt dem des Curvenstücks möglichst gleichkommt.

Die Strecke *AB* ist dann gleich $2z$, und wenn man die Grundlinien *AJ*, *JL*, *LB*, . mit $2zA_1$, $2zA_2$, $2zA_3$, ... und die Höhen mit $f(\alpha_1 z)$, $f(\alpha_2 z)$, $f(\alpha_3 z)$, ... bezeichnet un solcher Rechtecke einführt, so hat man die Summe von n Producten

$$2z\{A_1 f(\alpha_1 z) + A_2 f(\alpha_2 z) + A_3 f(\alpha_3 z) + \ldots + A_n f(\alpha_n z)\} = 2z\Sigma A f(\alpha z)$$

dem Integrale $\int_{-z}^{z} f(x)dx$ möglichst gleich zu machen.

Man kann zu dem Zwecke über $2n$ willkürliche Constanten A_1, A_2, A_3, ... A_n nd α_1, α_2, α_3, ... α_n verfügen.

Nun ist nach Mac Laurin

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \ldots$$

$$(1) \qquad \text{also } \int_{-z}^{z} f(x)dx = 2zf(0) + \frac{2z^3}{3\cdot 2!}f''(0) + \frac{2z^5}{5\cdot 4!}f^{IV}(0) + \ldots$$

$$\text{und } f(\alpha z) = f(0) + \alpha z f'(0) + \frac{\alpha^2 z^2}{2!}f''(0) + \frac{\alpha^3 z^3}{3!}f'''(0) + \ldots$$

Entwickelt man hiernach den Summenausdruck, so erhält man

$$2z\Sigma Af(\alpha z) = 2zf(0)\Sigma A + 2z^2f'(0)\Sigma\alpha A + \frac{2z^3}{2!}f''(0)\Sigma\alpha^2 A + \frac{2z^4}{3!}f'''(0)\Sigma\alpha^3 A + \ldots$$

Zieht man diese Gleichung von No. 1 ab, so bleibt

$$\int_{-z}^{z} f(x)dx - 2z\Sigma Af(\alpha z) = -2zf(0)(\Sigma A - 1) - 2z^2f'(0)\Sigma\alpha A - \frac{2z^3}{2!}f''(0)\left(\Sigma\alpha^2 A - \frac{1}{3}\right)$$

$$- \frac{2z^4}{3!}f'''(0)\Sigma\alpha^3 A - \frac{2z^5}{4!}f^{IV}(0)\left(\Sigma\alpha^4 A - \frac{1}{5}\right) - \ldots$$

Die $2n$ Constanten können nun so benutzt werden, dass man die $2n$ ersten Glieder der chten Seite dieser Gleichung verschwinden lässt. Man erhält dann

$$(3)\quad \int_{-z}^{z} f(x)dx = 2\Sigma Af(\alpha z) - \frac{2z^{2n+1}}{(2n)!}f^{(2n)}(0)\left(\Sigma\alpha^{2n}A - \frac{1}{2n+1}\right) - \frac{2z^{2n+2}}{(2n+1)}f^{(2n+1)}(0)\Sigma\alpha^{2n+1}A - \ldots$$

d hat, um die Coefficienten A und α zu bestimmen, die $2n$ Gleichungen aufzulösen:

$$\Sigma A - 1 = 0;\ \Sigma\alpha A = 0;\ \Sigma\alpha^2 A - \frac{1}{3} = 0;\ \Sigma\alpha^3 A = 0;\ \Sigma\alpha^4 A - \frac{1}{5} = 0;\ \ldots$$

$$\Sigma\alpha^{2n-2}A - \frac{1}{2n-1} = 0;\ \Sigma\alpha^{2n-1}A = 0.$$

Für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ gelingt diese Auflösung bloss mit Hülfe einer quadratischen eichung; für $n = 6$ und 7, auf welchen Fall Gauss seine Rechnung ausdehnt, bedarf es nur Auflösung zweier kubischen Gleichungen. Da man nur sehr selten 6 oder sogar 7 Glieder Summenausdrucks $\Sigma Af(\alpha z)$ benutzen wird, so will ich hier nur in Erinnerung bringen, wie Auflösung der 10 Gleichungen:

$$A + B + C + D + E = 1,$$
$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D + \varepsilon E = 0,$$
$$\alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C + \delta^2 D + \varepsilon^2 E = \frac{1}{3},$$
$$\alpha^3 A + \beta^3 B + \gamma^3 C + \delta^3 D + \varepsilon^3 E = 0,$$
$$\alpha^4 A + \beta^4 B + \gamma^4 C + \delta^4 D + \varepsilon^4 E = \frac{1}{5},$$
$$\alpha^5 A + \beta^5 B + \gamma^5 C + \delta^5 D + \varepsilon^5 E = 0,$$
$$\alpha^6 A + \beta^6 B + \gamma^6 C + \delta^6 D + \varepsilon^6 E = \frac{1}{7},$$
$$\alpha^7 A + \beta^7 B + \gamma^7 C + \delta^7 D + \varepsilon^7 E = 0,$$
$$\alpha^8 A + \beta^8 B + \gamma^8 C + \delta^8 D + \varepsilon^8 E = \frac{1}{9},$$
$$\alpha^9 A + \beta^9 B + \gamma^9 C + \delta^9 D + \varepsilon^9 E = 0,$$

elementarem Wege bewerkstelligt wird.

Man bezeichnet nämlich die Summe der Combinationen der Elemente α, β, γ, δ, ε zu je 2, 3, 4, 5 mit P, Q, R, S, T, setzt also

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = P$$
$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \ldots + \delta\varepsilon = Q$$
$$\alpha\beta\gamma + \ldots + \gamma\delta\varepsilon = R$$
$$\alpha\beta\gamma\delta + \ldots + \beta\gamma\delta\varepsilon = S$$
$$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = T$$

und addirt die ersten sechs dieser Gleichungen, nachdem man die erste mit $-T$, die zweite mit die dritte mit $-R$, die vierte mit Q, die fünfte mit $-P$ und die sechste mit $+1$ multiplic hat. Man erhält so die Gleichung

$$0 = T + \frac{1}{3} R + \frac{1}{5} P.$$

Verfährt man ebenso mit der zweiten bis siebenten, mit der dritten bis achten, mit vierten bis neunten und mit der fünften bis zehnten, so ergeben sich noch die vier Gleichung

$$0 = \frac{1}{3} S + \frac{1}{5} Q + \frac{1}{7},$$
$$0 = \frac{1}{3} T + \frac{1}{5} R + \frac{1}{7} P,$$
$$0 = \frac{1}{5} S + \frac{1}{7} Q + \frac{1}{9},$$
$$0 = \frac{1}{5} T + \frac{1}{7} R + \frac{1}{9} P.$$

Aus der ersten, dritten und fünften dieser fünf Gleichungen ersieht man sogleich, da

$$P = 0, \quad R = 0, \quad T = 0$$

sein müssen und aus der zweiten und vierten erhält man

$$Q = -\frac{10}{9}; \quad S = \frac{5}{21}.$$

Also werden die Grössen α, β, γ, δ, ε oder α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 durch die Gleichung bestimmt

$$x^5 - \frac{10}{9} x^3 + \frac{5}{21} x = 0,$$

deren Wurzeln sind

$$\alpha_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{5 + \sqrt{\frac{40}{7}}}$$
$$\alpha_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{5 - \sqrt{\frac{40}{7}}}$$
$$\alpha_3 = 0$$
$$\alpha_4 = \frac{1}{3}\sqrt{5 - \sqrt{\frac{40}{7}}}$$
$$\alpha_5 = \frac{1}{3}\sqrt{5 + \sqrt{\frac{40}{7}}}$$

Dieselbe Methode der Auflösung lässt sich natürlich auf eine beliebige Anzahl dies Gleichungen anwenden, auch wenn die rechten Seiten willkürliche Zahlenwerthe besitzen. be

m die Anzahl der Gleichungen 10 übersteigt, so sind dann höhere als quadratische Gleichun-
i aufzulösen.

Die Coefficienten A, B, C, D, E werden jetzt leicht gefunden, denn da $\varepsilon = -\alpha$, $= -\beta$, $\gamma = 0$ ist, so giebt die zweite und vierte der 10 Gleichungen

$$\alpha(A-E) + \beta(B-D) = 0,$$
$$\alpha^3(A-E) + \beta^3(B-D) = 0,$$

o $A = E$ und $B = D$.

Aus der ersten, dritten und fünften erhält man

$$2(A+B) + C = 1,$$
$$\alpha^2 A + \beta^2 B = \frac{1}{6},$$
$$\alpha^4 A + \beta^4 B = \frac{1}{10}.$$

ist aber $\alpha^4 = \frac{10}{9}\alpha^2 - \frac{5}{21}$ und $\beta^4 = \frac{10}{9}\beta^2 - \frac{5}{21}$,

o $$\frac{10}{9}(\alpha^2 A + \beta^2 B) - \frac{5}{21}(A+B) = \frac{1}{10},$$

her $$A + B = \frac{3{,}22}{9}$$

d $$C = \frac{64}{225};\quad A = \frac{1{,}61 - 0{,}65\sqrt{0{,}7}}{9};\quad B = \frac{1{,}61 + 0{,}65\sqrt{0{,}7}}{9}.$$

Da nun alle Summen von der Form $\Sigma\alpha^{2m+1}A$ verschwinden, so bleibt in No. 3 nur

$$\int_{-z}^{z} f(x)dx = 2z\Sigma A f(\alpha z) - \frac{2z^{2n+1}}{(2n)!}f^{(2n)}(0)\left(\Sigma\alpha^{2n}A - \frac{1}{2n+1}\right) - \frac{2z^{2n+3}}{(2n+2)!}f^{(2n+2)}(0)\left(\Sigma\alpha^{2n+2}A - \frac{1}{2n+3}\right) - \ldots$$

Benutzt man nun 2, 3, 4, 5, ... Ordinaten, so hat man entsprechend 4, 6, 8, 10 ... eichungen nach der angegebenen Methode aufzulösen.

Man findet dann

für 2 Ordinaten

$$\alpha_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}};\quad \alpha_2 = +\sqrt{\frac{1}{3}};\quad A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$$

für 3 Ordinaten

$$\alpha_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}};\quad \alpha_2 = 0;\quad \alpha_3 = +\sqrt{\frac{3}{5}};\quad A_1 = A_3 = \frac{5}{18};\quad A_2 = \frac{8}{18};$$

für 4 Ordinaten

$$\alpha_1 = -\alpha_4 = -\sqrt{\frac{1}{7}(3+\sqrt{4{,}8})} = -0{,}8611363116;\quad \log\alpha_4 = 9{,}9350720$$

$$\alpha_2 = -\alpha_3 = -\sqrt{\frac{1}{7}(3-\sqrt{4{,}8})} = -0{,}3399810436;\quad \log\alpha_3 = 9{,}5314548$$

$$A_1 = A_4 = \frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{\frac{5}{54}}\right) = 0{,}1739274226;\ \log A_1 = 9{,}2403681;$$

$$A_2 = A_3 = 0{,}3260725774;\ \log A_2 = 9{,}5133143;$$

für 5 Ordinaten

$$\alpha_1 = -\alpha_5 = -\,0{,}9061798459;\ \log \alpha_5 = 9{,}9572144;$$

$$\alpha_2 = -\alpha_3 = -\,0{,}5384693101;\ \log \alpha_4 = 9{,}7311610;$$

$$\alpha_3 = 0;$$

$$A_1 = A_5 = 0{,}1184634425;\ \log A_1 = 9{,}0735843;$$

$$A_2 = A_4 = 0{,}2393143352;\ \log A_2 = 9{,}3789687;$$

$$A_3 = \frac{64}{225} = 0{,}28444\ \ldots$$

Hiernach ist also

$$\int_{-z}^{z} f(x)dx = \frac{2z}{2}\left\{f\left(-z\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + f\left(z\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right\} + \frac{z^5 f^{IV}(0)}{135} + \ldots$$

$$= \frac{2z}{18}\left\{5\left[f\left(-z\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + f\left(z\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right] + 8f(0)\right\} + \frac{z^7 f^{VI}(0)}{15750} + \ldots$$

$$= 2z\left\{A_1[f(-\alpha z) + f(\alpha z)] + A_3[f(-\beta z) + f(\beta z)]\right\} + \frac{z^9 f^{VIII}(0)}{3472826} + \ldots$$

$$= 2z\left\{A_1[f(-\alpha z) + f(\alpha z)] + A_2[f(-\beta z) + f(\beta z)] + A_3 f(0)\right\} + \frac{z^{11} f^{X}(0)}{1237822000} + \ldots$$

Gauss geht bei seinen Entwicklungen von ganz anderen Vorstellungen aus. Er gelng nach Jacobi's Ansicht, dessen erste Abhandlung im Crelleschen Journale sich mit demselben Gegenstande beschäftigt, zu seinen Resultaten auf dem Wege einer schwierigen Induction.

Ich will hier aber wegen der grossen Eleganz des Resultates, zu welchem Jacobi gelngt die Gleichung ebenfalls entwickeln, deren n Wurzeln unmittelbar die Coefficienten α_1; α_2 α_3 $\ldots$ α_n darstellen.

Die $n$te Ableitung des Binoms $(x^2 - 1)^n$ möge die Gleichung liefern

$$\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = px^n + qx^{n-2} + rx^{n-4} + \ldots$$

in welcher die p, q, r, $\ldots$ die Coefficienten der übrig bleibenden Potenzen von x darstellen E ist aber, wenn man m mal theilweise integrirt:

$$\int_0^1 x^m \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx = (-1)^m\ 1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ m\left\{\frac{d^{n-m-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-m-1}}\right\}_0^1 = 0$$

denn für $x = 1$ ist der Differentialquotient immer Null, da er noch den Factor $x^2 - 1$ enthält und für $x = 0$ verschwindet er ebenfalls, wenn n und m beide entweder gerade oder eid ungerade sind. Setzt man in dem bestimmten Integrale für $\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ die angegebene Reihe

ergiebt sich in diesen Fällen

$$\frac{p}{n+m+1} + \frac{q}{n+m-1} + \frac{r}{n+m-3} + \ldots = 0.$$

ltiplicirt man nun die $n+1$ste der obigen $2n$ Gleichungen mit p, die $n-1$ste mit q, die -3te mit r u. s. w. und addirt dann alle so erhaltenen Gleichungen, so verschwinden die chten Seiten und links bleibt

$$\Sigma A \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = A_1 \frac{d^n(\alpha_1^2-1)^n}{d\alpha_1^n} + A_2 \frac{d^n(\alpha_2^2-1)^n}{d\alpha_2^n} + A_3 \frac{d^n(\alpha_3^2-1)^n}{d\alpha_3^n} + \ldots$$

Verfährt man ebenso mit der $n+2$ten, $n$ten, $n-2$ten, ... ferner mit der $n+3$ten, $+1$sten, $n-1$sten, ... und schreitet so fort, bis man endlich die Operation mit der letzten eichung beginnt, so verschafft man sich folgende n Gleichungen:

$$\Sigma A \frac{d^n(\alpha^2-1)^n}{d\alpha^n}=0;\ \Sigma A\alpha \frac{d^n(\alpha^2-1)^n}{d\alpha^n}=0;\ \Sigma A\alpha^2 \frac{d^n(\alpha^2-1)^n}{d\alpha^n}=0;\ \ldots\ \Sigma A\alpha^{n-1} \frac{d^n(\alpha^2-1)^n}{d\alpha^n}=0.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich aber unmittelbar, dass die Ableitungen

$$\frac{d^n(\alpha_1^2-1)^n}{d\alpha_1^n};\quad \frac{d^n(\alpha_2^2-1)^n}{d\alpha_2^n};\quad \ldots\ \frac{d^n(\alpha_n^2-1)^n}{d\alpha_n^n}$$

mmtlich gleich Null sein müssen, oder, was dasselbe ist, dass die $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ die n Wurzeln r Gleichung

$$\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = 0$$

id, welche, wenn x^n von seinem Factor befreit wird, die Gestalt annimmt:

$$x^{n-2} - \frac{n(n-1)}{(2n-1)\,2} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2(2n-1)(2n-3)2^2} x^{n-4} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\,(2n-1)(2n-3)(2n-5)\,2^3} x^{n-6} + \ldots = 0.$$

ernach sind z. B. die beiden Gleichungen, welche Gauss noch benutzt, um seine Formeln auf und 7 Ordinaten ausdehnen zu können:

$$x^6 - \frac{15}{11} x^4 + \frac{5}{11} x^2 - \frac{5}{231} = 0,$$

$$x^7 - \frac{21}{13} x^5 + \frac{105}{143} x^3 - \frac{35}{429} x = 0,$$

e also nur die Auflösung zweier Gleichungen vom dritten Grade erfordern.

§ 2.

Die Cotesischen Formeln.

Die Entwickelung dieser Formeln lässt sich auf dasselbe Prinzip zurückführen, welches z: Berechnung der Gaussischen Formeln benutzt wurde. Cotes nimmt die Abstände der dinaten in gleichen Intervallen an. Er setzt also in der Gleichung No. 2 bei der Anwendung

von zwei, drei, vier, fünf ... Ordinaten die α entsprechend

$$-1, +1$$
$$-1, 0, +1$$
$$-1, -\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}, +1$$
$$-1, -\frac{1}{2}, 0, +\frac{1}{2}, +1$$
$$-1, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, +\frac{1}{5}, +\frac{3}{5}, +1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Es bleibt also nur übrig, in den Gleichungen, die zu den Gaussischen Formeln führ die Coefficienten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ zu bestimmen, und da die Summen $\Sigma\alpha^{2m+1}A$ von selbst v schwinden, so hat man nur die Gleichungen zu behandeln:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_3 = 1,$$
$$\alpha_1^2 A_1 + \alpha_2^2 A_2 + \ldots + \alpha_n^2 A_n = \frac{1}{3},$$
$$\alpha_1^4 A_1 + \alpha_2^4 A_2 + \ldots + \alpha_n^4 A_n = \frac{1}{5},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Eür 2 Ordinaten erhält man

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{2},$$

für 3 Ordinaten

$$A_1 = A_3 = \frac{1}{6}; \quad A_2 = \frac{4}{6};$$

für 4 Ordinaten

$$A_1 = A_4 = \frac{1}{8}; \quad A_2 = A_3 = \frac{3}{8};$$

für 5 Ordinaten

$$A_1 = A_5 = \frac{7}{90}; \quad A_2 = A_4 = \frac{32}{90}; \quad A_3 = \frac{12}{90}$$

u. s. w.

Hiernach wird also

$$\int_{-z}^{z} f(x)dx = z\{f(-z) + f(z)\} - \frac{2}{3}z^3 f''(0) - \ldots$$
$$= \frac{z}{3}\{f(-z) + 4f(0) + f(z)\} - \frac{1}{90}z^5 f^{IV}(0) - \ldots$$
$$= \frac{z}{4}\left\{f(-z) + f(z) + 3\left[f\left(-\frac{z}{3}\right) + f\left(\frac{z}{3}\right)\right]\right\} - \frac{2z^5 f^{VI}(0)}{405} - \ldots$$
$$= \frac{z}{45}\left\{7[f(-z) + f(z)] + 32\left[f\left(-\frac{z}{2}\right) + f\left(\frac{z}{2}\right)\right] + 12f(0)\right\} - \frac{z^7 f^{VI}(0)}{15120} - \ldots$$

Aus den Correctionen, deren erstes Glied hier zugefügt worden ist, sieht man zugleich, ss es vortheilhaft ist, eine ungerade Anzahl Ordinaten anzuwenden, statt einer geraden, denn B. bei vier Ordinaten ist der begangene Fehler nicht viel kleiner als der bei dreien, wogegen bei fünf Ordinaten von einer um zwei Einseiten höheren Ordnung ist.

Cotes hat seine Formeln bis auf 11 Ordinaten ausgedehnt und ich werde sie hier, wenn e Grenzen des Integrals sich von 0 bis 1 erstrecken, worauf andere Grenzen leicht zurückgeführt erden können, bis für 9 Ordinaten mittheilen.

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\{f0 + f1\}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{f0 + f1 + 4f\frac{1}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\left\{f0 + f1 + 3\left(f\frac{1}{3} + f\frac{2}{3}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{90}\left\{7(f0 + f1) + 32\left(f\frac{1}{4} + f\frac{3}{4}\right) + 12f\frac{1}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{288}\left\{19(f0 + f1) + 75\left(f\frac{1}{5} + f\frac{4}{5}\right) + 50\left(f\frac{2}{5} + f\frac{3}{5}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{840}\left\{41(f0 + f1) + 216\left(f\frac{1}{6} + f\frac{5}{6}\right) + 27\left(f\frac{1}{3} + f\frac{2}{3}\right) + 272f\frac{1}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{17280}\left\{751(f0 + f1) + 3577\left(f\frac{1}{7} + f\frac{6}{7}\right) + 1323\left(f\frac{2}{7} + f\frac{5}{7}\right) + 2989\left(f\frac{3}{7} + f\frac{4}{7}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{28350}\left\{989(f0 + f1) + 5888\left(f\frac{1}{8} + f\frac{7}{8}\right) - 928\left(f\frac{1}{4} + f\frac{3}{4}\right) + 10496\left(f\frac{3}{8} + f\frac{5}{8}\right) - 4540f\frac{1}{2}\right\}$$

Die letzte Formel ist hier hauptsächlich deswegen mit aufgenommen worden, damit man emerkt, dass die Coefficienten A auch negative Werthe annehmen können, die bei elf Ordinaten benfalls auftreten.

Aus den Correctionen, welche sowohl den Gaussischen als zum Theil auch den Cotesischen ormeln zugefügt worden sind, ergiebt sich, dass alle diese Formeln nur unter der Voraussetzung irksam sind, dass die höheren Ableitungen der $f(x)$ für $x = 0$ nicht sehr grosse Werthe anehmen. Leider ist das aber doch sehr häufig der Fall und dann nähern sie sich ihrem Ziele ur sehr langsam.

§ 3.

Im Folgenden werde ich Formeln entwickeln, die weit einfacher sind als die Gaussischen nd Cotesischen und in manchen Fällen sogar wirksamer.

Es ist

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \ldots$$

und für $b - a = \delta$

$$f(b) = f(a) + \delta f(a) + \frac{\delta^2}{2!} f''(a) + \frac{\delta^3}{3!} f'''(a) + \ldots$$

Ebenso $$f'(b) = f'(a) + \delta f''(a) + \frac{\delta^2}{2!} f'''(a) + \frac{\delta^3}{3!} f^{IV}(a) + \ldots$$

$$f''(b) = f''(a) + \delta f'''(a) + \frac{\delta^2}{2!} f^{IV}(a) + \frac{\delta^3}{3!} f^{V}(a) + \ldots$$

. . . . . .

Man hat daher die Relation

$$\int_a^b f(x)dx = \delta fa + \frac{\delta^2}{2!} f'a + \frac{\delta^3}{3!} f''a + \frac{\delta^4}{4!} f'''a + \frac{\delta^5}{5!} f^{IV}a + \ldots$$

Nun ist, wenn A, B, C, . . . willkürliche Coefficienten bedeuten,

$$\frac{\delta}{2}(fa + fb) = \delta fa + \frac{\delta^2}{2} f'a + \frac{\delta^3}{2 \cdot 2!} f''a + \frac{\delta^4}{2 \cdot 3!} f'''a + \frac{\delta^5}{2 \cdot 4!} f^{IV}a + \ldots$$

$$A\delta^2(f'a - f'b) = \quad - A\delta^3 f''a - \frac{A}{2!}\delta^4 f'''a - \frac{A}{3!}\delta^5 f^{IV}a - \ldots$$

$$B\delta^3(f''a + f''b) = \quad 2B\delta^3 f''a + B\delta^4 f'''a + \frac{B}{2!}\delta^5 f^{IV}a + \ldots$$

$$C\delta^4(f'''a - f'''b) = \quad - C\delta^5 f^{IV}a - \ldots$$

$$D\delta^5(f^{IV}a + f^{IV}b) = \quad + 2D\delta^5 f^{IV}a + \ldots$$

Zieht man nun die Summe dieser Gleichungen von dem bestimmten Integrale ab, so bleibt

$$\int_a^b f x dx - \frac{\delta}{2}(fa + fb) - A\delta^2(f'b - f'b) - B\delta^3(f''a + f''b) - \ldots$$

$$= \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2 \cdot 2!} + A - 2B\right)\delta^3 f''a + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2 \cdot 3!} + \frac{A}{2!} - B\right)\delta^4 f'''a$$

$$+ \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{2 \cdot 4!} + \frac{A}{3!} - \frac{B}{2!} + C - 2D\right)\delta^5 f^{IV}a + \ldots$$

Man kann jetzt die A, B, C, . . . benutzen, um eine beliebige Anzahl Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung verschwinden zu lassen.

Wendet man nur A an, so kann man setzen

$$\frac{1}{3!} - \frac{1}{2 \cdot 2!} + A = 0, \text{ also } A = \frac{1}{12}$$

und es bleibt, da der nächste Coefficient von selbst verschwindet

$$\int_a^b f x dx = \frac{\delta}{2}(fa + fb) + \frac{\delta^2}{12}(f'a - f'b) + \frac{\delta^5 f^{IV}a}{720} + \ldots$$

Setzt man also

$$\int_a^b f x dx = \frac{\delta}{2}(fa + fb) + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 (f'a - f'b)$$

ist der Fehler nur von der Ordnung $\frac{\delta^5 f^{IV} a}{720}$.

Wendet man zwei Coefficienten A und B an, so kann man setzen

$$\frac{1}{3!} - \frac{1}{2 \cdot 2!} + A - 2B = 0,$$

$$\frac{1}{4!} - \frac{1}{2 \cdot 3!} + \frac{A}{2!} - B = 0,$$

e aber mit der ersten Gleichung identisch ist. Daher ist auch noch zu setzen

$$\frac{1}{5!} - \frac{1}{2 \cdot 4!} + \frac{A}{3!} - \frac{B}{2!} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt $A = \frac{1}{10}$ und $B = \frac{1}{120}$, also

$$\int_a^b f x dx = \frac{\delta}{2}(fa + fb) + \frac{\delta^2}{10}(f'a - f'b) + \frac{\delta^3}{120}(f''a + f''b)$$

der Fehler ist von der Ordnung $\frac{\delta^7 f^{IV} a}{100800}$.

In dieser Weise könnte man fortschreiten und den Fehler zu immer höherer Ordnung bringen.

Man kann aber aus der Formel (1) durch Theilung des Integrals noch andere Formeln wickeln, die oft brauchbarer sind.

Setzt man z. B.

$$\int_a^b f x \cdot dx = \int_a^{a+\delta} f x \cdot dx = \int_a^{a+\frac{\delta}{2}} + \int_{a+\frac{\delta}{2}}^{a+\delta}$$

$$\int_a^b f x \cdot dx = \int_a^{a+\delta} + \int_{a+\frac{\delta}{3}}^{a+\frac{2\delta}{3}} + \int_{a+\frac{2\delta}{3}}^{a+\delta}$$

w. und bezeichnet in No. 1

$$\frac{\delta}{2}(fa + fb) = P \text{ und } \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 (f'a - f'b) = Q,$$

rhält man die Formeln

$$\int_a^b f x \cdot dx = P + Q$$

$$= \frac{1}{2}P + \frac{1}{4}Q + \frac{\delta}{2} f\left(a + \frac{\delta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}P + \frac{1}{9}Q + \frac{\delta}{2}\left\{ f\left(a + \frac{\delta}{3}\right) + f\left(a + \frac{2\delta}{3}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}P + \frac{1}{16}Q + \frac{\delta}{2}\Big\{ f\left(a+\frac{\delta}{4}\right) + f\left(a+\frac{2\delta}{4}\right) + f\left(a+\frac{3\delta}{4}\right)\Big\}$$

$$= \frac{1}{5}P + \frac{1}{25}Q + \frac{\delta}{2}\Big\{ f\left(a+\frac{\delta}{5}\right) + f\left(a+\frac{2\delta}{5}\right) + f\left(a+\frac{3\delta}{5}\right) + f\left(a+\frac{4\delta}{5}\right)\Big\}$$

. . . . . .

Nimmt man der einfacheren Schreibweise wegen die Grenzen von 0 bis 1, so wird a

(4)
$$\int_0^1 fx \cdot dx = \frac{1}{2}(f0 + f1) + \frac{1}{12}(f'0 - f'1)$$

$$= \frac{1}{4}(f0 + f1) + \frac{1}{2}f\frac{1}{2} + \frac{1}{48}(f'0 - f'1)$$

$$= \frac{1}{6}(f0 + f1) + \frac{1}{3}\left(f\frac{1}{3} + f\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{108}(f'0 - f'1)$$

$$= \frac{1}{8}(f0 + f1) + \frac{1}{4}\left(f\frac{1}{4} + f\frac{2}{4} + f\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{192}(f'0 - f'1)$$

$$= \frac{1}{10}(f0 + f1) + \frac{1}{5}\left(f\frac{1}{5} + f\frac{2}{5} + f\frac{3}{5} + f\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{300}(f'0 - f'1)$$

. . . . . .

§ 4.

Diese Formeln sollen zunächst auf einige Beispiele angewendet werden.

Benutzt man die vierte der Formeln unter No. 4, so findet man

I.
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{17} + \frac{4}{20} + \frac{4}{25} + \frac{1}{192}\cdot\frac{1}{2} = 0{,}78539828.$$

Es ist aber

$$\frac{\pi}{4} = 0{,}78539816,$$

also der Fehler nur 0,00000012.

Drei Ordinaten bei Gauss, welche den Fehler tiefer herabzudrücken scheinen, sig denselben dennoch auf 0,00013 und fünf Ordinaten in den Cotesischen Formeln führen ebn zu dem Fehler 0,00014.

II. Nach der fünften Formel ist

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{300}\left(-1 + \frac{1}{4}\right) = 0{,}6931349.$$

Es ist aber $l(2) = 0{,}6931478$, also der Fehler 0,0000129. Drei Ordinaten bei Ga machen den Fehler noch etwas grösser.

III. Das einzige Beispiel, welches Gauss seiner Abhandlung zum Schlusse beifügt, ist Berechnung des Integrals

$$u = \int_p^q \frac{dx}{l(x)} \text{ für } p = 10^5 \text{ und } 9 = 2 \cdot 10^5,$$

ches bereits Bessel im Königsberger Archiv berechnet hatte.

Um für unsere Formel die Rechnung etwas bequemer zu machen, setzen wir $l(x) = y$, also

$$u = \int_a^b \frac{e^y dy}{y} \text{ für } a = 5l(10) = 11{,}512925 \text{ und } b = 5l(10) + l(2) = 12{,}206072,$$

$\delta = l(2)$. Es ist hier $f(a) = \frac{e^a}{a}$ und $f'(a) = \frac{e^a(a-1)}{a^2}$, folglich wird nach No. 3

$$P = 10^5 \frac{\delta}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right) = 8689{,}004$$

$$Q = 10^5 \frac{\delta^2}{12}\left(\frac{a-1}{a^2} - \frac{2(b-1)}{b^2}\right) = -284{,}7267$$

$$u = P + Q = 8404{,}277.$$

Benutzt man nun die folgenden Formeln unter No. 3, so findet man noch ohne beschwerliche Rechnung mit Benutzung von siebenstelligen Tafeln

$$u = 8406{,}117$$
$$8406{,}213$$
$$8406{,}233$$
$$8406{,}240$$

Diese letzte Zahl ist so genau, als siebenstellige Tafeln sie überhaupt zu geben gestatten. Gauss findet, wenn er fünf Ordinaten benutzt,

$$u = 8406{,}243117$$

acht genauen Ziffern, aber offenbar durch eine ausserordentlich mühsame Zahlenrechnung.

IV. Summirung der Reihe

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots$$

Es ist

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}\, l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$$

Setzt man hier $x = \varphi\sqrt{-1}$, vertauscht dann φ mit $\frac{\pi}{4}x$ und integrirt von $x = 0$ bis $= 1$, so wird

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}\int_0^1 \frac{x dx}{\sin\frac{\pi}{2}x}$$

Benutzt man nun, um das Integral durch mechanische Quadratur zu berechnen, die letzte der Formeln unter No. 4 in § 3, so wird

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sin\frac{\pi}{2}x} = \frac{1}{10}\left(\frac{2}{\pi}+1\right)+\frac{4}{100}\left(\frac{1}{\sin 18^0}+\frac{1}{\sin 36^0}+\frac{1}{\sin 54^0}+\frac{1}{\sin 72^0}\right)-\frac{1}{300}$$

Hiernach ergiebt eine ganz leichte Rechnung für die Summe der vorgelegten Reihe

0,915946

mit einem Fehler von noch nicht ganz zwei Einheiten in der fünften Decimale.

V. Das Integral

$$u=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

drückt den Quadranten des Bogens der Lemniskate aus, deren grösster Radius 1 ist. Um dieses Integral durch mechanische Quadratur zu berechnen, muss es transformirt werden, da $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x4}}$ würde für $x=1$ unendlich gross werden.

Setzt man aber

$$x=\frac{y\sqrt{2}}{\sqrt{1+y^4}}$$

so wird

$$u=\sqrt{2}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^4}}$$

und man erhält nach der letzten Formel in § 3

$$u=\frac{1}{10}(1+\sqrt{0{,}5})+10\left(\frac{1}{\sqrt{2504}}+\frac{1}{\sqrt{2564}}+\frac{1}{\sqrt{2824}}+\frac{1}{\sqrt{3524}}\right)+\frac{\sqrt{0{,}5}}{300}=1{,}3110$$

mit sechs richtigen Ziffern.

Die Thetafunctionen liefern für das Integral die rasch convergirende Reihe

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=2\pi\left\{\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{1+e^{-\pi}}+\frac{e^{-\frac{3\pi}{2}}}{1+e^{-3\pi}}+\frac{e^{-\frac{5\pi}{2}}}{1+e^{-5\pi}}+\ldots\right\}=1{,}311028777.$$

§ 5.

Zum Schluss will ich noch andeuten, wie langsam convergirende Reihen durch vorstehende Mittel in rasch convergirende verwandelt werden können.

Entwickelt man z. B. $f(x-y)$ nach Potenzen von y und setzt dann $y=x$, so erhält man

$$f0=fx-xf'x+\frac{x^2}{2!}f''x-\frac{x^3}{3!}f'''x+\ldots$$

Ebenso

$$f'0=f'x-xf''x+\frac{x^2}{2!}f'''x-\frac{x^3}{3!}f^{IV}x+\ldots$$

u. s. w. $f''0$, $t'''0$, ...

Multiplicirt man nun diese Gleichungen der Reihe nach mit u, $u_1 x$, $\frac{u_2 x^2}{2!}$, $\frac{u_3 x^3}{3!}$, $\frac{u_4 x^4}{4!}$, ... die u, u_1, u_2, ... ganz beliebige Grössen bedeuten, und addirt alle so erhaltene Gleichungen, ergiebt sich die Formel:

$$uf0 + u_1 x f'0 + \frac{u_2 x^2}{2!} f''0 + \frac{u_3 x^3}{3!} f'''0 + \ldots = ufx + x\Delta uf'x + \frac{x^2 \Delta^2 u}{2!} f''x + \frac{x^3 \Delta^3 u}{3!} f'''x + \ldots$$

ich früher benutzt habe, um die höheren Ableitungen gewisser Functionen zu entwickeln. kann aber auch häufig angewendet werden, wenn die Summe schwach convergirender Reihen chnet werden soll.

Um dies an einigen Beispielen zu zeigen, setze ich zunächst

$$fx = \frac{1}{1+x}$$

erhalte

$$u - u_1 x + u_2 x^2 - u_3 x^3 + \ldots = \frac{u}{1+x} - \frac{x\Delta u}{(1+x)^2} + \frac{x^2 \Delta^2 u}{(1+x)^3} - \frac{x^3 \Delta^3 u}{(1+x)^4} + \ldots$$

für $x = 1$

$$u - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots = \frac{u}{2} - \frac{\Delta u}{4} + \frac{\Delta^2 u}{8} - \frac{\Delta^3 u}{16} + \ldots$$

Würden die Differenzen der Reihe links rasch abnehmen, so würde die rechte Seite dieser chung eine stark convergirende Reihe darstellen.

Setzt man z. B. $u_m = \frac{1}{n+m}$, so tritt dieser Fall ein und man erhält

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \ldots = \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n(n+1)} + \frac{1 \cdot 2}{8n(n+1)(n+2)} + \ldots$$

auch, wenn man, der bequemen numerischen Rechnung wegen, die Glieder der rechten Seite Reihe nach durch

$$A' + A'' + A''' + \ldots$$

ichnet:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \ldots = \frac{1}{2n} + \frac{A'}{2(n+1)} + \frac{2A''}{2(n+2)} + \frac{3A'''}{2(n+3)} + \frac{4A''''}{2(n+4)} + \ldots$$

Vertauscht man hier noch n mit $\frac{n}{2}$, so wird

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+6} + \ldots = \frac{1}{2n} + \frac{A'}{n+2} + \frac{2A''}{n+4} + \frac{3A'''}{n+6} + \frac{4A''''}{n+8} + \ldots$$

Um nun z. B.

$$l(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

erechnen, addirt man etwa die neun ersten Glieder dieser Reihe

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \ldots + \frac{1}{17 \cdot 18} = 0{,}666139824$$

und findet dann aus 9 Gliedern der Formel (4)

$$\frac{1}{19}-\frac{1}{20}+\frac{1}{21}-\frac{1}{22}+\ldots=\frac{1}{38}+\frac{A'}{40}+\frac{2A''}{42}+\ldots=0{,}027007355,$$

so dass also

$$l(2)=0{,}693147179$$

bis auf eine Einheit in der letzten Stelle genau gefunden worden ist.

Ebenso leicht berechnet man mit Hülfe der Formel (5) den Werth von

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=0{,}785398163$$

bis zur neunten Decimale genau.

§ 6.

In der 1730 in London erschienenen „Methodus differentialis“ von Stirling wer
schwach convergirende Reihen durch eigenthümliche Mittel summirt, von deren Wirksamkeit
hier eine Vorstellung geben will. Wenn auch die angewandten Methoden und Formeln ganz an
sind, als die von Stirling benutzten, so liegt ihnen doch derselbe Gedanke zu Grunde. A
Kummer geht in seiner Abhandlung über die Berechnung numerischer Summen langsam
vergirender Reihen (im 16ten Bande dieses Journals) von ähnlichen Gedanken wie Stirl
aus, ohne indessen, als er seine Abhandlung schrieb, das ziemlich seltene Buch von Stir
zu kennen.

Es mögen nun F_x, u_x, v_x Functionen von x bedeuten, welche der Bedingung u
worfen sind:

(1) $$F_x=1-v_x+u_xv_{x+1}.$$

Lässt man hier x um 1, 2, 3, 4, ... wachsen, multiplicirt dann die erste, zweite, dritte, .. d
so erhaltenen Gleichungen der Reihe nach mit u_x; u_xu_{x+1}; $u_xu_{x+1}u_{x+2}$; ... und addirt all d
so erhaltenen Gleichungen zur ersten, so ergiebt sich

(2) $$1+u_x+u_xu_{x+1}+u_xu_{x+1}u_{x+2}+\ldots=v_x+F_x+u_xF_{x+1}+u_xu_{x+1}F_{x+2}+u_xu_{x+1}u_{x+2}F_{x+3}-\ldots$$

wenn man annimmt, dass das Glied

$$u_xu_{x+1}u_{x+2}\ldots u_{x+m-1}v_{x+m}$$

für unendlich grosse m verschwindet, und die Reihen überhaupt convergiren.

Als Beispiel für eine solche Transformation wähle ich zunächst

$$u_x=\frac{(a+x)(b+x)}{x(\alpha+x)} \text{ und } v_x=m+nx,$$

also

$$F_x=1-m-nx+(m+n+nx)\frac{(a+x)(b+x)}{x(\alpha+x)}$$

Bringt man die rechte Seite dieser Gleichung auf denselben Nenner und bestimmt u
n so, dass die Coefficienten von x und x^2 verschwinden, so wird

$$F_x=\frac{ab(\alpha-a)(\alpha-b)}{(\alpha-a-b)(\alpha-a-b-1)}\cdot\frac{1}{x(\alpha+x)}$$

Setzt man nun die Werthe von F_x, u_x, v_x in (2) ein, ersetzt dann noch x, α, a, b durch $\alpha-\beta$, $a-\beta$, $b-\beta$ und bezeichnet

$$\alpha-a=\alpha';\ \beta-b=\beta';\ \alpha-b=\alpha'';\ \beta-b=\beta''$$

erhält man die Gleichung

$$1+\frac{ab}{\alpha\beta}+\frac{a(a+1)\,b(b+1)}{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}+\frac{a(a+1)(a+2)\,b(b+1)(b+2)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\,\beta(\beta+1)(\beta+2)}+\ldots$$

$$\frac{\alpha'\beta'+\alpha'(\alpha-1)+\beta'(\beta-1)}{(\alpha'+\beta')(\alpha'+\beta'-1)}+\frac{\alpha'\beta'\alpha''\beta''}{\alpha\beta(\alpha'+\beta')(\alpha'+\beta'-1)}\Big\{1+\frac{ab}{(\alpha+1)(\beta+1)}+\frac{a(a+1)b(b+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\beta+1)(\beta+2)}+\ldots\Big\}$$

Bezeichnet man nun noch

$$c(c+1)(c+2)\ldots(c+x-1)\ \text{durch}\ c_x,$$

kann man diese Gleichung auch kürzer so schreiben:

$$\sum_0^\infty\frac{a_xb_x}{\alpha_x\beta_x}=\frac{\alpha'\beta'+\alpha'(\alpha-1)+\beta'(\beta-1)}{(\alpha'+\beta')(\alpha'+\beta'-1)}+\frac{\alpha'\beta'\alpha''\beta''}{\alpha\beta(\alpha'+\beta')(\alpha'+\beta'-1)}\sum_0^\infty\frac{a_xb_x}{(\alpha+1)_x(\beta+1)_x}$$

sich das Summenzeichen auf x bezieht, dem alle Werthe 0, 1, 2, 3, ... beigelegt werden len und $\frac{a_0b_0}{\alpha_0\beta_0}=1$ ist.

Diese Gleichung lässt sich auf eine leicht verständliche Weise auffassen als

$$\varphi(\alpha,\beta)=\chi(\alpha,\beta)+\psi(\alpha,\beta)\,\varphi(\alpha+1,\beta+1),$$

φ, χ, ψ Functionszeichen sind. Bezeichnet man aber $\varphi(\alpha+n)(\beta+n)$ mit $\varphi(n)$ und ver- irt ähnlich mit χ und ψ, so kann man diese Gleichung auch kürzer so schreiben:

$$\varphi(0)=\chi(0)+\psi(0)\,\varphi(1).$$

sst man dann n um 1, 2, 3, ... wachsen und multiplicirt die erste, zweite, dritte, ... der so altenen Gleichungen mit $\psi 0$; $\psi 0\cdot\psi 1$; $\psi 0\cdot\psi 1\cdot\psi 2$; ... und addirt alle zur ersten, so ält man

$$\varphi(0)=\chi 0+\psi 0\cdot\chi 1+\psi 0\cdot\varphi 1\cdot\chi 2+\psi 0\cdot\psi 1\cdot\psi 2\cdot\chi 3+\ldots$$

nn man annimmt, dass das letzte mit φ multiplicirte Glied verschwindet. Nach einfacher chnung nimmt diese Gleichung die Gestalt an:

(3) $$\sum_0^\infty\frac{a_xb_x}{\alpha_x\beta_x}=\sum_0^\infty\frac{(\alpha+\beta'+2x-1)(\beta+\alpha'+2x-1)-(\alpha+x-1)(\beta+x-1)}{\alpha_x\beta_x(\alpha'+\beta'-1)_{2x+2}}\cdot\alpha'\beta'\alpha''\beta''$$

§ 7.

Diese Formel ist zahlreicher Anwendungen fähig, wie jetzt gezeigt werden soll.

Setzt man zunächst $\alpha=a+1$, $\beta=b+1$ und dividirt beide Seiten mit ab, so er- bt sich

(1) $$\sum_0^\infty\frac{1}{(a+x)(b+x)}=\sum_0^\infty\frac{1_x(a+b+3x+1)(a-b+1)_x(b-a+1)_x}{a_{x+1}b_{x+1}(2+x)_{x+1}}$$

Als Anwendung berechnen wir zunächst die Reihe

$$l(2)=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots\frac{1}{17\cdot18}+\frac{1}{19\cdot20}+\frac{1}{21\cdot22}+\ldots$$

Die Summe der ersten neun Glieder dieser Reihe giebt

0,666139824

und der Rest ist

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10\cdot 19}+\frac{1}{11\cdot 21}+\cdots\right)=\frac{1}{4}\sum_0^\infty\frac{1}{(10+x)\left(\frac{19}{2}+x\right)}=\sum_0^\infty\frac{1_x\left(\frac{41}{2}+3x\right)\left(\frac{1}{2}\right)_x\left(\frac{3}{2}\right)_x}{4\cdot 10_{x+1}\left(\frac{19}{2}\right)_{x+1}(2+x)_{x+1}}$$

Der Quotient zwei aufeinander folgender Glieder der Reihe rechts ist aber

$$\frac{(x+1)\ (1+2x)\ (47+6x)}{4\,(11+x)\,(21+2x)\,(41+6x)}$$

Bezeichnet man nun die Glieder der rechten Seite mit

$$A'+A''+A'''+\cdots$$

so nimmt sie die Gestalt an

$$\frac{41}{1520}+\frac{47A'}{37884}+\frac{53A''}{8648}+\frac{177A'''}{13780}+\cdots$$

A'	$=0{,}026973684$
A''	$=\quad 33464$
A'''	$=\quad 205$
A''''	$=\quad 3$
	$0{,}027007356$
Hierzu	$0{,}666139824$
giebt	$0{,}693147180=l(2)$

bis zur letzten Decimale richtig.

Durch dieselbe Formel würde $\frac{\pi}{4}$ mit nur wenigen Gliedern der Reihe (1) bis auf nu Decimalen berechnet werden können.

Setzt man in No. 1 $b=a$, so erhält man die Formel

(2) $$\sum_0^\infty\frac{1}{(a+x)^2}=\sum_0^\infty\frac{1_x^3(2a+1+3x)}{a_{x+1}^2(2+x)_{x+1}}$$

Berechnet man

$$\sum_0^9\frac{1}{(1+x)^2}=1{,}549767331$$

so hat man nur noch durch No. 2 die Summe

$$\sum_0^\infty\frac{1}{(11+x)^2}=\sum_0^\infty\frac{1_x^3\,(23+3x)}{(11_{x+1})^2(2+x)_{x+1}}$$

zu berechnen, um den numerischen Werth von

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=1{,}64493406684822643$$

ermitteln zu können.

Man findet mit Hülfe der Reihe aus fünf Gliedern

$$\begin{array}{rr} A' = & 0{,}090909091 \\ A'' = & 4132231 \\ A''' = & 124350 \\ A^{IV} = & 657 \\ A^{V} = & 7 \\ \hline & 0{,}095166336 \\ \text{Dazu} & 1{,}549767331 \\ \hline & 1{,}644934067 \end{array}$$

zur letzten Decimale genau. Stirling hat die aufgenommenen 17 Decimalen mit 9 Gliedern derselben Reihe ermittelt.

§ 8.

Vertauscht man in der Formel No. 3 § 6 β mit $b+1$, so verwandelt sich die linke Seite in

$$\Sigma_0^{\infty} \frac{a_x b_x}{\alpha_x (b+1)_x} = b \Sigma_0^{\infty} \frac{a^x}{\alpha_x (b+x)}$$

Es ist aber

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^{\frac{1}{\alpha}})^a} = \alpha \Sigma_0^{\infty} \frac{a_x}{1_x(\alpha+x)} = \alpha \Sigma_0^{n-1} \frac{a_x}{1_x(\alpha+x)} + \frac{\alpha a_n}{1_n} \Sigma_0^{\infty} \frac{(a+n)_x}{(n+1)_x\,(\alpha+n+x)}$$

Daher kann man mit Hülfe unserer Formel Integrale von dieser Form durch stark convergirende Reihen berechnen, denn durch Vertauschung von a, b, α mit $a+n$, $\alpha+n$, $n+1$ ergiebt sich aus ihr

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^{\frac{1}{\alpha}})^a} = \alpha \Sigma_0^{n-1} \frac{a_x}{1_x(\alpha+x)} + \frac{\alpha a_n}{1_n} \Sigma_0^{\infty} \frac{1_x(1-\alpha)_x(1+\alpha-a)_x}{(n+1)_x(n+\alpha)_{x+1}(1-a+x)_{x+2}} \{(n+x)(2-a+2x)+(1+x)(1+x-a+\alpha)\}$$

$a = \frac{1}{2}$ und $\alpha = \frac{1}{4}$ ist hernach z. B.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \Sigma_0^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_x}{1_x(1+4x)} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{4 \cdot 1_n} \Sigma_0^{\infty} \frac{1_x \left(\frac{3}{4}\right)_x^2 (2n+3x+1)}{(n+1)_x \left(n+\frac{1}{4}\right)_{x+1} \left(\frac{1}{2}+x\right)_{x+1}}$$

Schon wenn man nur $n = 4$ setzt, findet man den numerischen Werth dieses Integrals auf 9 Decimalen genau.

Es wird nämlich

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x4}} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{24} + \frac{5}{208} + \left\{ \frac{315}{9176} + \frac{12A'}{3150} + \frac{7A''}{360} + \dots \right\}$$

$$= 1{,}165705128$$
$$144761029$$
$$551471$$
$$10723$$
$$402$$
$$23$$
$$1$$
$$\overline{1{,}311028777}$$

Für $n = 9$ findet Stirling 17 genaue Decimalen desselben bereits in § 4 berechneten Integrals.

Ebenso giebt dieselbe Formel

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x4}} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{d \cdot x^3}{\sqrt{1-x4}} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{\frac{4}{3}}}}$$

$$= \sum_0^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_x}{1_x(3+4x)} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{16 \cdot 1_n} \sum_0^{\infty} \frac{1_x \left(\frac{1}{4}\right)_x \left(\frac{5}{4}\right)_x \left(\frac{1}{2}\right)_x}{(n+1)_x \left(n+\frac{3}{4}\right)_{x+1} \left(\frac{1}{2}\right)_{2x+2}} \{(2n+2x)(3+4x) + (1+x)(5+x)$$

für $n = 4$ findet man mit 5 Gliedern der Reihe

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x4}} = 0{,}599070116$$

Stirling erhält mit 9 Gliedern derselben Reihe, die er auf besondere Weise entwickelt und nicht etwa aus der allgemeinen Formel No. 3 in § 6 ableitet, die ihm unbekannt ist für das vorgelegte Integral

0,59907011736779611.

Gauss berechnet in der Abhandlung über die hypergeometrische Reihe diese Zahl (calculo artificio peculiari innixo) bis auf 20 Decimalen und fügt also zu der StirlingschenZahl noch 3 Decimalen 372 hinzu, während die 17te Stelle eine 0 statt einer 1 enthält. Offenbar würde man dieselbe Genauigkeit mit einer etwas grösseren Anzahl von Gliedern erreichen.

§ 9.

Für weitere Anwendungen der Vorschrift in § 6 setzen wir

$$u_x = -\frac{2x+a+1}{2x+a-1} \cdot \frac{x^3}{(x+a)^3} \text{ und } v_x = \frac{x+2a-1}{2x+a-1}$$

und erhalten

$$Fx = -\frac{(2x+a)\,a^3}{(2x+a-1)\,(x+a)^3}$$

Verfährt man nun ganz wie dort, so gelangt man, wenn noch x mit b vertauscht wird, ler Formel

$$\Sigma_0^\infty \frac{(-1)^x(2a+b+2x-1)}{(a+b)_x^3}\, a_x^3 = \Sigma_0^\infty \frac{(-1)^x(2b+a+2x-1)\, b_x^3}{(b+a)_x^3}$$

mit kurzer Bezeichnung

$$\varphi(a,b) = \varphi(b,a)$$

$b=1$ wird hiernach, wenn man beide Seiten der Gleichung mit $2a^3$ dividirt

$$\Sigma_0^\infty \frac{(-1)^x}{(a+x)^2} = \frac{1}{2}\Sigma_0^\infty \frac{(-1)^x(a+1+2x)1_x^3}{a_{x+1}^3}$$

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+2)^2} - \ldots = \frac{a+1}{2a^3} - \frac{1^3(a+3)A'}{(a+1)(a+1)^3} + \frac{2^3(a+5)A''}{(a+3)(a+2)^3} - \frac{3^3(a+7)A'''}{(a+5)(a+3)^3} + \ldots$$

Für $a=11$ erhält man

$$\begin{aligned} A' &= 0{,}0045078888 \\ -A'' &= \quad -30435 \\ A''' &= \quad 127 \\ -A'''' &= \quad -2 \\ \hline & \quad 0{,}0045048578 \end{aligned}$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots - \frac{1}{10^2} = 0{,}8179621756$$

ist die Summe der unendlichen Reihe

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots = 0{,}8224670334$$

Es ist aber für positive ganze n

$$\Sigma_1^\infty \frac{(-1)^x}{x^n} = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\Sigma_1^\infty \frac{1}{x^n}$$

er für $n=2$

$$\Sigma_1^\infty \frac{1}{x^2} = 2\Sigma_1^\infty \frac{(-1)^x}{x^2} = 1{,}6449340668$$

schon oben gefunden wurde.

Vertauscht man noch a mit $\frac{a}{2}$, so verwandelt sich die letzte Reihe in

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+2)^2} + \frac{1}{(a+4)^2} - \ldots = \frac{a+2}{2a^3} - \frac{2^3(a+6)A'}{(a+1)(a+2)^3} + \frac{4^3(a+10)A''}{(a+3)(a+4)^3} - \ldots$$

$a=11$ erhält man aus 5 Gliedern dieser Reihe die Summe

$$0{,}004860812$$

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} = 0{,}920826405.$$

Daher ist die Summe der unendlichen Reihe

$$1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{11^2}+\ldots=0{,}915965593.$$

Von dieser Reihe wurden bereits in § 4 die 4 ersten Decimalen durch mechanisch Quadratur aus einem bestimmten Integrale berechnet.

§ 10.

Auch mit Hülfe der Mac Laurin'schen Summationsformel lassen sich Reihen, wie die hi behandelten, oft bequem summiren.

Diese Formel ist

$$(1)\quad f'(x)=\Delta\left\{fx-\frac{1}{2}f'x+\frac{B'}{1_2}f''x-\frac{B''}{1_4}f''''x+\ldots+\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}B^{(\frac{n}{2}-1)}}{1_{n-2}}f^{(n-2)}x\right\}$$

$$-\frac{1}{1_n}\int_0^1 f^{(n+1)}(x+1-z)\,dz\left\{z^n-\frac{n}{2}z^{n-1}+(-n)_2 z^{n-2}B'-(-n)_4 z^{n-4}B''+(-n)_6 z^{n-6}B'''-\ldots(-1)^{\frac{n}{2}}(-n)_2 z^2 B^{(\frac{n}{2}-1)}\right\}$$

in welcher das bestimmte Integral den von Jacobi berechneten Restausdruck angiebt, und in Coefficienten B die Bernoullischen Zahlen $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66}, \frac{691}{2730}, \frac{7}{6}, \ldots$ bedeuten. Das Differenzenzeichen Δ drückt die Operation aus

$$\Delta F(x)=F(x+1)-F(x)$$

Lässt man den Restausdruck fort und bezeichnet die Klammer nach Δ durch F, so ist also

$$f'(x)=\Delta F(x)=F(x+1)-F(x)$$

Lässt man hier nach und nach x um 1, 2, 3, ... wachsen und nimmt an, dass $F(x+\infty)$ verschwindet, so ergiebt sich durch Addition der so erhaltenen Gleichungen:

$$(2)\quad f'(x)+f'(x+1)+f'(x+2)+\ldots=-F(x)=-f(x)+\frac{1}{2}f'(x)-\frac{B'}{1_2}f''(x)+\frac{B''}{1_4}f''''(x)\ldots$$

Setzt man hier z. B.

$$f(x)=\frac{1}{x^n-1}$$

so erhält man die Formel

$$(3)\quad \frac{1}{x^n}+\frac{1}{(x+1)^n}+\frac{1}{(x+2)^n}+\ldots=\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+\frac{1}{2x^n}+\frac{n_1 B'}{1_2 x^{n+1}}-\frac{n_3 B''}{1_4 x^{n+3}}+\frac{n_5 B'''}{1_6 x^{n+5}}-\ldots$$

Für $n = 3$ und $x = 10$ ergiebt sich fast ohne alle Rechnung

$$\frac{1}{10^3} + \frac{1}{11^3} + \frac{1}{12^3} + \ldots = 0{,}00552500000 = A'$$
$$-8333 = -A''$$
$$83 = A'''$$
$$-1 = -A''''$$
$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{9^3} = 1{,}19653198567$$

o die Summe der unendlichen Reihe

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots = 1{,}20205690316$$

Bezeichnet man

$$\frac{1}{x^n} + \frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n} + \ldots \text{ durch } F(x)$$

ist

$$\frac{1}{x^n} - \frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n} - \ldots = \frac{1}{2^{n-1}} F\left(\frac{x}{2}\right) - F(x)$$

hier wird

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n} - \frac{1}{(x+3)^n} + \ldots = \frac{1}{2x^n} + \frac{(2^2-1)n_1 B'}{1_2 x^{n+1}} - \frac{(2^4-1)n_3 B''}{1_4 x^{n+3}} + \frac{(2^6-1)n_5 B'''}{1_6 x^{n+5}} - \ldots$$

Würde man hier x mit $\frac{x}{2}$ vertauschen, so würde man auch mit Hülfe dieser Formel die endliche Reihe

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots$$

summiren können, aber die Rechnung würde weit mühsamer werden als die in § 9 zu diesem Zwecke geführte, da diese Reihe in den ferneren Gliedern nur sehr schwach convergirt. Es ist nicht unsere Absicht die Mac Laurin'sche Summationsformel, deren zahlreiche Anwendungen hinlänglich bekannt sind, für weitere Beispiele zu benutzen; sie ist hier nur der Uebersicht wegen aufgenommen worden.

§ 11.

Schliesslich muss ich noch darauf aufmerksam machen, dass die von mir aufgestellten Formeln für mechanische Quadratur oder vielmehr für die numerische Berechnungsweise bestimmter Integrale nicht benutzt werden können, wenn in dem Integral

$$\int_a^b f(x) \, . \, dx$$

die Form der $f(x)$ nicht bekannt ist, wogegen die Formeln von Cotes und Gauss auch dann noch ihre Anwendung finden.

Wenn z. B. für einen bestimmten Zeitraum die mittlere Temperatur gefunden werden sollte, so übersieht man bald, dass das Integral

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \cdot dx = T$$

die mittlere Temperatur dieses Zeitraumes darstellen wird, wenn $f(x)$ die Temperatur zur Zeit x bedeutet. Würde man nun etwa drei Beobachtungen während der Zeit von 6 Uhr Morgens bis 6 Uhr Abends machen können, so müsste man nach der Vorschrift der Cotesischen Formeln um 6 Uhr Morgens, Mittags 12 Uhr und Abends 6 Uhr beobachten. Nach den Gaussischen Formeln aber wären diese Beobachtungen am zweckmässigsten Morgens 7,36 Uhr, Mittags 12 Uhr und Abends 4,64 Uhr anzustellen, da die drei zur Berechnung erforderlichen Thermometerstände $f\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{5}}\right)$ sein müssten.

Mit diesen drei Beobachtungen würde man aber im Allgemeinen ein ebenso genaues Resultat erzielen, als wenn man sechs Beobachtungen in gleichen Zeitintervallen anstellen wollte. Ebenso würden diese Formeln für jede andere Anzahl von Beobachtungs-Terminen die zweckmässigste Zeit kennen lehren.

Diese kurzen Andeutungen werden genügen, um den practischen Werth der Gaussischen Formeln in noch helleres Licht zu setzen.

Schellbach.

Schulnachrichten.

I. Vertheilung der Stunden unter die

Laufende Nummer.	Rangordnung.	Name.	Ordinarius in	OI.	UI.	OII.
1.	Director	Dr. **Kern.**		1 Prop. 2 Horaz.	1 Prop.	
2.	1. Oberlehrer	Professor Dr. **Schellbach.**	OI.	4 Mathem. 2 Physik	4 Mathem. 2 Physik	3 Mathem. 2 Physik
3.	2. desgl.	Professor Dr. **Zumpt.**				
4.	3. desgl.	Professor Dr. **Gaedke.**	OII.	2 Deutsch		10Lateinisch 6 Griechisch
5.	4. desgl.	Professor **Böhm.**		2 Religion 2 Hebräisch	2 Religion	2 Religion 2 Hebräisch
6.	5. desgl.	Professor **Borchard.**	UIIA.			
7.	6. desgl.	Dr. **Badstübner.**	OIIIA.			
8.	7. desgl.	Dr. **Bernhardt.**	UI.	6 Griechisch	2 Horaz 6 Griechisch	
9.	8. desgl.	**Martiny.**	OIIIB.			
10.	9. desgl.	Dr. **Schultze.**				
11.	10. desgl.	Dr. **Braumann.**	UIIA.	2 Franz. 3 Geschichte	2 Franz. 3 Geschichte	
12.	11. desgl.	Dr. **Schumacher.**	UIIIA.			
13.	1. ordentl. Lehrer	Dr. **Zekéli.**				
14.	2. desgl.	Dr. **Behncke.**	UIIIB.	6 Lateinisch	2 Deutsch	
15.	3. desgl.	Dr. **Taubert.**	IVB.		6 Lateinisch	
16.	4. desgl.	Dr. **Bachmann.**				
17.	5. desgl.	Dr. **Wagner.**	IVA.			3 Gesch u. Ge
18.	6. desgl.	Dr. **Seckt.**	VA.			
19.	7. desgl.	Dr. **Schneider.**	VB.			
20.	8. desgl.	Dr. **Schwieger.**	VIA.			2 Deut 2 Fran
21.	9 desgl.	**Decken.**	VIB.			
22.	Wissensch. Hilfslehrer	Professor Dr. **Schoenermark.**		Englisch (facult.)		
23.	desgl.	Dr. **Wegener.**				
24.	desgl.	Dr. **Schmidt.**				
25.	desgl.	Dr. **Mann.**				
26.	desgl.	Vorschull. **Schmidt.**				
27.	Techn. Lehrer	Schreiblehrer **Köhler.**				
28.	desgl.	Zeichenlehrer **Scherfling.**				
29.	desgl.	Musikdir. **Hoffmann.**				

Anmerkung. Die Curse sämmtlicher Klassen sind einjährig. Die Klassen von UII. an abwärts haben Wechselcötus. Der Cötus A ginnt zu Ostern, der Cötus B zu Michaelis.

sung.

nasiums im Winter-Semester 1876/77.

IIIA.	OIIIB.	UIIIA.	UIIIB.	IVA.	IVB.	VA.	VB.	VIA.	VIB.	Anzahl der Stunden.
			2 Ovid.							6
										17
										18
										18
										18
ateinisch riechisch ranz.										20
										20
	2 Religion 2 Deutsch 10Lateinisch 6 Griechisch									20
lathem.		4 Mathem.		3 Mathem.						20
										20
		2 Deutsch 10Lateinisch 6 Griechisch 2 Franz.								20
eutsch eschichte Geogr. aturg.	2 Franz. 3 Geschichte u. Geogr. 2 Naturg.					2 Naturg.	2 Naturg.	2 Naturg.	2 Naturg.	22
			8 Lateinisch 3 Geschichte u. Geogr.							20
					10Lateinisch 6 Griechisch					22
	3 Mathem.		4 Mathem.		3 Mathem.	3 Rechnen	3 Rechnen	4 Rechnen 2 Geogr.		22
				10Lateinisch 3 Geschichte u. Geogr.						22
			2 Religion			3 Religion 2 Deutsch 10Lateinisch	3 Religion			22
		4 Geschichte u. Geogr.	2 Deutsch 2 Franz.				2 Deutsch 10Lateinisch 2 Geogr.			22
					3 Geschichte u. Geogr.		3 Franz.	2 Deutsch 10Lateinisch		22
eligion		2 Religion		2 Religion 2 Deutsch					3 Religion 2 Deutsch 10Lateinisch	23
										4
				2 Franz.	2 Franz.					4
			6 Griechisch	6 Griechisch	2 Religion 2 Deutsch			3 Religion		19
						3 Franz. 2 Geogr.			2 Geogr.	7
									4 Rechnen	4
						3 Schreiben	3 Schreiben	3 Schreiben	3 Schreiben	12
				2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	18
				2 Gesang	2 Gesang	2 Gesang	2 Gesang	2 Gesang	2 Gesang	18
										480

II. Lehrpensa des Gy

Klasse.	Religion.	Deutsch.	Lateinisch.	Griechisch.	Fra
VI.	Biblische Geschichte des A. T., das 1. Hauptstück, Sprüche, 4 Kirchenlieder.	Lesen u. Erklären prosaischer und poetischer Lesestücke, Uebung im Wiedererzählen und Declamiren, der einfache Satz, orthographische Uebungen und schriftliche Wiedererzählungen.	Regelmässige Declination u. Conjugation, Comparation, Numeralia, Genusregeln, Extemporalien und Exercitien.		
V.	Biblische Geschichte des N. T., das 2. Hauptstück, Sprüche, 4 Kirchenlieder.	Der erweiterte Satz, die Satzverbindung und das Satzgefüge, Präpositionen und Conjunctionen. Sonst wie in Sexta.	Deponentia, Verba anomala, Pronomina, Acc. c. inf., Participialconstr., Abl. absol., Hauptregeln über die Casus, Extemporalien und Exercitien.		Ploet buch Le u. être; und Ex
IV.	Bibelkunde des A. T. mit Lectüre historischer Abschnitte und einzelner Psalmen, Sprüche, 4 Kirchenlieder.	Prosaische u. poetische Lectüre, Uebungen im Wiedererzählen und Declamiren, grammatische Erörterungen, Dictate und Aufsätze.	Lectüre aus Cornelius Nepos, unregelmässige Verba, unregelmässige Declination, Adverbia, Präpositionen, Conjunctionen, syntactische Uebungen, Extemporalien und Exercitien.	Jacobs' Lesebuch I—VII., Lese-Uebungen, Declinationen, Adjectiva, Zahlwörter, Pronomina, das regelmässige Verbum. Extemporalien u. Exercitien.	Ploe buch I. tempo citien.
UIII.	Bibelkunde des N. T., Lectüre des Evang. Marci, das 3. und die folgenden Hauptstücke des Katechismus, 4 Kirchenlieder.	Uhland'sche und Schiller'sche Balladen und Romanzen, Declamationsübungen, Repetition der Satz- und Interpunctionslehre, Aufsätze.	Caesars bellum Gallicum, Ovids Metamorphosen nach Rankes Chrestomathie, die Casuslehre, Extemporalien und Exercitien.	Jacobs' Lesebuch VIII. u. IX. und Abschnitte aus den folgenden Lesestücken, Verba contracta, muta und liquida. Extemporalien und Exercitien.	Pl buch türe d Anha lien
OIII.	Apostelgeschichte und einzelne Partien aus der ältesten Kirchengeschichte, Abschnitte leichterer Paulinischen Briefe, 4 Kirchenlieder.	Voss' siebzigster Geburtstag, Goethes Hermann und Dorothea, privatim Voss' Luise, Vorträge, Aufsätze.	Caesars b. civile, elegische Dichtungen Ovids nach Rankes Chrestomathie, Casus-, Modus- u. Tempuslehre, Extemporalien und Exercitien.	Xenophons Anabasis; verba auf μι und anomala. Extemporalien und Exercitien.	XII.: gen 2. C citie ralie
UII.	Bibelkunde, Wiederholung des Katechismus, Reformationsgeschichte.	Schillers Tell, Goethes Götz und Egmont, freie Vorträge, Aufsätze.	Ciceros Cato major, Livius, Virgils Aen., Infinitiv, Particip., Gerundium, Supinum, grammat. Wiederholungen, Extemporalien und Exercitien.	Xenoph. Hellen., Hom. Od. I. II., Casuslehre, Extemporalien u. Exercitien.	XII. Ver Con Ext
OII.	Geschichte der christl. Kirche bis zur Reformation, Lectüre ausgewählter Stücke des A. T.	Schiller, die Wallenstein'sche Trilogie: Declamationen, Vorträge und Aufsätze.	Livius XXI., Cicero pro Rosc. Am., Virgils Aen. XI. u. XII., Wiederholung der Syntax, Syntaxis ornata, Exercitien und Extemporalien.	Xenoph. Memorabil. I., Lysias' Eratosth., Hom. Od. XV.—XVII., Genera verbi, tempora und modi. Exercitien und Extemporalien.	Bo sto fra et Le Ex cit
UI.	Glaubenslehre, Wiederholungen aus Bibelkunde und Kirchengeschichte.	Literaturgeschichte bis 1300, Goethe'sche Gedichte, Declamationen und Aufsätze. Anfangsgründe der Logik.	Cicero in Verrem IV. u. pro Murena, Tacitus' Germania u. Annales I. Aufsätze und Extemporalien.	Demosthenes' olynth. Reden und die Rede vom Frieden, Homers Ilias I. bis VI., grammat. Repetitionen, Extemporalien und Exercitien.	ne po
IO.	Ueberblick der Bibelkunde und Glaubenslehre, Augsburgische Konfession, Römerbrief im Urtext.	Lessings Laokoon und Hamburg. Dramaturgie; Wiederholungen und Vorträge aus der Literaturgeschichte; Dispositionsübungen und Aufsätze; Logik und Einleitung in die Philosophie.	Cicero de off. I. und de oratore I., Tacitus' Annal. I., Horatius' Od. III. u. IV. und Epod., Aufsätze und Extemporalien, Disputationsübungen.	Thucydides II., Platons Protagoras, Homers Ilias XIII.—XIX., XXII.—XXIV., Sophokles' Antigone. Repetition der Syntax, Extemporalien und Exercitien.	

Rechnen und Mathematik.	Naturgeschichte und Physik.	Geographie und Geschichte.	Schreiben und Zeichnen.	Singen.
Rechnen mit benannten ganzen Zahlen, Vorübungen zur Bruchrechnung.	Im S. Beschreibung einzelner Pflanzen. Im W. Säugethiere.	Nach einer allgemeinen Einleitung in die Geographie die aussereuropäischen Erdtheile.	Schreiben: Die einzelnen Buchstaben beider Alphabete und Hauptwörter. Zeichnen: Gerade Linien u. geradlinige Figuren, leichte architektonische Umrisse nach Vorzeichnungen.	Einübung von Chorälen und Liedern (einstimmig). Theoretische Belehrungen. (Noten, Pausen, Tonleiter, Dreiklang.)
Bruchrechnung, Anfänge der Regeldetri.	Im S. Pflanzengattungen. Im W. Vögel, Reptilien, Fische, Insecten.	Geographie Europas.	Schreiben: Hauptwörter und Sätze, griechische Buchstaben. Zeichnen: Bogenlinien, Ornamente, Blattformen und Gefässe nach Vorzeichnungen.	Einübung von Chorälen und Liedern (einstimmig). Fortsetzung der theoret. Belehrungen (Dur-Tonleiter, Intervallenlehre).
Rechnen: Decimalbrüche, Anwendung der Klammern, Regeldetri, Zins- und Gesellschaftsrechnung. Geometrie: Die Lehre von den Winkeln und Parallelen.		Geographie: Elemente der mathem. Geogr. u. die aussereuropäischen Erdtheile. Geschichte: Alte Geschichte.	Zeichnen: Linearzeichnen, Elemente der Perspective, Zeichnen nach Körpern, Proportionen des menschlichen Kopfes.	Einübung zweistimmiger Lieder, Treffübungen, weitere theor. Belehrungen (Forts. der Intervallenlehre, Moll-Tonleiter, Uebungen im Transponiren).
Die 4 Species mit Buchstaben. Congruenz der Dreiecke, Flächenvergleichung von Dreiecken und Parallelogrammen bis zum pythagor. Lehrsatze.		Geographie: Deutschland. Geschichte: Deutsche Geschichte, 1. Hälfte.		
Zerlegung polynomischer Ausdrücke in Factoren, Vereinigen und Heben von Brüchen mit polynomischen Nennern, negative Grössen, Gleichungen 1. Grades, Quadratwurzelausziehung, Flächenberechnung. Kreislehre. Aufgaben.	Im S. Pflanzenfamilien und botanische Systematik. Im W. Mineralogie und Geognosie.	Geographie: Die ausserdeutschen Länder Europas. Geschichte: Deutsche Geschichte, 2. Hälfte.		
Allgemeine Potenzlehre, Logarithmen, Gleichungen 1. Grades mit mehreren Unbekannten. Gleichungen 2. Grades, Aehnlichkeit der Polygone, Kreisberechnung. Aufgaben.		Geschichte der orientalischen Völker und der Griechen; geographische Repetitionen.	Zeichnen von Ornamenten u. antiken Köpfen nach Gypsmodellen; Perspective bis zur Ausführung eines Intérieurs; Schattenconstruction; Zeichnen von Landschaften, Köpfen und Ornamenten nach Vorlegeblättern; Maschinenzeichnen.	Zweite Gesangklasse: Einübung von Chorälen und Liedern (zweistimmig) Erste Gesangklasse: Einübung von Chorälen, Motetten, Psalmen, Chören und Liedern (vier- und mehrstimmig).
Quadratische Gleichungen und die einfachsten Reihen, ebene Trigonometrie. Aufgaben.	Elemente der Chemie. allgemeine Physik.	Römische Geschichte; geschichtliche und geographische Repetitionen.		
Stereometrie. Gleichungen, Auflösung der Kugeldreiecke, binomischer Satz und Reihen. Aufgaben.	Mechanik. Magnetismus und Electricität.	Geschichte des Mittelalters, geogr. Repetitionen.		
Elemente der Curvenlehre, Kettenbrüche und unbestimmte Gleichungen, mathematische Uebungen. Aufgaben.	Akustik und Optik.	Geschichte der Neuzeit, geogr. Repetitionen.		

III. Vertheilung der Stunden u

Laufende Nummer.	Rangordnung.	Name.	Ordinarius in	I.	II. A.
1.	Director	Dr. **Kern.**			
2.	Prorector	Professor Dr. **Strack.**	I.	3 Lateinisch	
3.	2. Oberlehrer	Professor **Heller.**	II. A.	4 Französ.	4 Lateinisc 4 Französ.
4.	3. desgl.	Professor Dr. **Voigt.**	II. B. 1.	3 Gesch. und Geographie	3 Gesch. u Geograph
5.	4. desgl.	**Zauritz.**	III. A. 2.	3 Englisch	3 Englisc
6.	5. desgl.	Professor Dr. **Schwalbe.**		2 Physik 2 Chemie 4 Laborat. in 2 Abtheil.	2 Physik 2 Chemie
7.	6. desgl.	Dr. **Ohrtmann.**	II. B. 2.	5 Mathem. 2 Mechanik	5 Mathem
8.	7. desgl.	Dr. **Meyer.**	III. B. 2.		
9.	8. desgl.	Dr. **Loew.**	III. B. 1.		2 Naturg
10.	9. desgl.	**Schubart.**	III. A. 1.		
11.	1. ordentlicher Lehrer	Dr. **Hohenberg.**	V. 1.		3 Dents
12.	2. desgl.	Dr. **Dressel.**	IV. 1.		
13.	3. desgl.	Dr. **Müller.**	IV. 2.		
14.	4. desgl.	Dr. **Freytag.**		3 Deutsch	
15.	5. desgl.	**Grossmann.**	VI. 2.		
16.	6. desgl.	Dr. **Stäckel.**	VI. 1.		
17.	7. desgl.	**Schröder.**			
18.	8. desgl.	Lic. Dr. **Kirchner.**		2 Religion	2 Rel
19.	9. desgl.	Dr. **Schemmel.**			
20.	10. desgl.	**Fiege.**	V. 2.		
21.	Technischer Lehrer	Zeichenlehrer **Müller.**		3 Zeichnen	2 Ze
22.	desgl.	„ **Krause.**			
23.	desgl.	Schreiblehrer **Köhler.**			
24.	desgl.	Gesanglehrer **Bradsky.**			
			Summa	36	2

Anmerkung. Die mit A bezeichneten Klassen bilden die obere, die mit B bezeichneten die untere Klassenstufe; durch 1 u. 2 w
Cötus unterschieden. Der Cursus von I. ist zweijährig, alle übrigen Klassen haben einjährige Curse.

er Realschule im Schuljahr 1876/77.

III. A. 1.	III. A. 2.	III. B. 1.	III. B. 2.	IV. 1.	IV. 2.	V. 1.	V. 2.	VI. 1.	VI. 2.	Summa.
Religion	2 Religion	5 Lateinisch								12
										20
	4 Gesch. und Geographie									20
	4 Französ. 4 Englisch						3 Geogr.			20
										20
						4 Rechnen				21
		4 Französ.	4 Französ. 5 Lateinisch 4 Gesch.							21
Naturg.	2 Naturg.	6 Mathem. 2 Naturg.	2 Naturg.							20
Lateinisch Gesch. und Geographie Deutsch		4 Gesch. und Geographie		3 Deutsch					3 Geogr.	22
					6 Lateinisch	6 Lateinisch 4 Deutsch 3 Geogr.				22
Französ.		4 Englisch		6 Lateinisch 5 Französ.		3 Religion				22
Mathem.					6 Mathem. 3 Deutsch					23
Englisch	5 Lateinisch			4 Gesch. und Geographie				3 Geogr.		22
		2 Religion 3 Deutsch			2 Religion				3 Religion 10 Lateinisch 4 Deutsch	24
						5 Französ.		10 Lateinisch 4 Deutsch		22
	6 Mathem.			2 Naturg.	2 Naturg.	2 Naturg.	2 Naturg	5 Rechnen	5 Rechnen	24
	3 Deutsch		2 Religion 4 Englisch 3 Deutsch	2 Religion						22
			6 Mathem.	6 Mathem.	4 Gesch. und Geographie		4 Rechnen 4 Deutsch			24
					5 Französ.		3 Religion 6 Lateinisch 5 Französ.	3 Religion		22
Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen							17
				2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	12
				2 Schreiben	2 Schreiben	2 Schreiben	2 Schreiben	3 Schreiben	3 Schreiben	14
				2 Gesang	2 Gesang	2 Gesang	2 Gesang	2 Gesang	2 Gesang	18
32	32	32	32	34	34	33	33	32	32	464

Klasse.	Religion.	Deutsch.	Lateinisch.	Französisch.	Englis
VI.	Erlernung des 1. und 2. Hauptstücks. Biblische Geschichte des Alten Testaments nach Zahn. Kirchenlieder.	Die Wortarten, der einfache und der erweiterte Satz. Lesen, Declamiren, orthographische Uebungen nach Hopf und Paulsiecks Lesebuch.	Regelmässige Declination und Conjugation, Genusregeln, nach Fromm. Tirocinium und Militia 1—40.		
V.	Erlernung des 3., 4. und 5. Hauptstücks. Biblische Geschichte des Neuen Testaments nach Zahn. Kirchenlieder.	Declination und Conjugation, Lesen, Declamiren, orthographische Uebungen nach Hopf und Paulsieck.	Comparation, Deponentia, Pronomina, Präpositionen, nach Fromm. Tirocinium und Militia 41—86.	avoir und être, regelmässige Pluralbildung, 1. regelmässige Conjugation nach Plötz' Elementargrammatik 1—60.	
IV.	Wiederholung der Pensa V. und VI., das Kirchenjahr, die biblischen Bücher, biblische Geographie. Kirchenlieder.	Der zusammengesetzte Satz, Interpunction, Lesen, Declamiren, orthographische Uebungen nach Hopf und Paulsieck. Aufsätze erzählenden Inhalts (Reproduction).	Wiederholung des Früheren. Unregelmässige Verba, Numeralia, nach Fromm. Abl. abs. und Acc. cum Inf. Uebersetzung aus O. Schulz' Aufgaben. Lectüre aus Gedickes Lesebuch (Fabeln etc.)	Die drei anderen regelmässigen Conjugationen, das Passif, die Adjectifs uud die Pronoms nach Plötz 61—100.	
III. B.	Erklärung des 1. und 3. Hauptstücks. Erlernung einschlagender Sprüche und Lieder. Lectüre der heiligen Schrift.	Ausführung der Lehre vom zusammengesetzten Satz. Aufsätze beschreibenden Inhalts (nach der Anschauung). Lesen und Declamiren nach Hopf und Paulsiek.	Bildung der Adverbia, ut, quod, Acc. cum. Inf., Participial- und Relativ-Construction nach Fromm und O. Schulz' Aufgaben. Lectüre aus Gedike.	Die unregelmässige Pluralbildung und die unregelmässigen Verba. Das Wichtigste über die Wortstellung, nach Plötz. Lectüre aus Fränkels Cours de leçons I.	Aussprac lehre, Erle cabeln, Uebe Gesenius' L
III. A.	Erklärung des 2. Hauptstücks, Wiederholung des 1. und 3. — Lectüre des Evangeliums Matthäi.	Rep. d. Satzlehre. Rection der Adjectiva und der Verba. Aufsätze historischen oder geographischen Inhalts. Lectüre einzelner Stücke von Lessing u. A.	Casuslehre nach Fromms Grammatik und O. Schulz' Aufgaben. Abschnitte aus Caesars Comm. de bello gallico.	Wiederholung und Ergänzung alles bisher Gelernten nach Plötz' Schulgrammatik. Lectüre aus Fränkels Cours de leçons II.	Unregel Pronomina Präpositio junctionen Lehrbuch. Marryats Canada.
II. B.	Geschichte des Reiches Gottes unter dem alten Bunde und Bibelkunde des Alten Testaments. Lectüre der zugehörigen Bibelstellen. Wiederholung des Katechismus. Erlernen von Psalmen und Liedern.	Das Wichtigste aus der Metrik im Anschlusse an Lectüre aus Schiller. Hauptregeln über die Disposition bei Besprechung der Aufsätze.	Moduslehre nach Fromms Grammatik und O. Schulz' Aufgaben. Abschnitte aus Caesars Comm. de bello civili.	Construction und Wortstellung, Lehre von den Zeiten, vom Subj. und vom Part. passée, nach Plötz' Schulgrammatik. Uebersetzung aus Hoffmann's Aufgaben. Lectüre aus Herrmann und Büchner (erzählende Abschnitte).	Gebrau tionen u Bildung Adverbia. zahlwörte Lehrbuch ryats Ma
II. A.	Heilsgeschichte, Bibelkunde des Neuen Testaments, Sprüche, Lieder, Psalmen.	Das Wichtigste aus der Rhetorik und der deutschen Poetik im Anschluss an die Lectüre Goethe'scher Werke. Uebungen im Disponiren und im freien Vortrage über deutsche Dramen.	Wiederholung und Ergänzung der Syntax; Prosodie; Hexameter und Pentameter. Sallust. Catilina zu Ende und Curtius III. nebst einigen Stücken aus Rankes Chrestomathie.	Syntax nach Plötz' Schulgrammatik 50 — 78. Uebersetzung aus Hoffmanns Aufgaben. Lectüre aus Herrmann und Büchner (rhetorische Abschnitte) u. einige Dramen.	Satzle der unr men nac buch. A aus Hilfs Uebersetz von Schil
I.	Glaubens- und Sittenlehre. Evangelium Johannis und Brief an die Römer. Das Wichtigste aus der Kirchengeschichte.	Das Wichtigste aus der Stilistik bei Durchnahme der Aufsätze. Uebungen im Disponiren und Vortragen. Besprechung der wichtigsten deutschen und fremdländischen Dramen. Litteraturgeschichtliches.	Livius I. und II., dgl. verschiedene Abschnitte aus Ovid und Vergil nach Rankes Chrestomathie, mit sachlichen und sprachvergleichenden Erklärungen.	Wiederholung und Ergänzung der Syntax. Uebersetzungen aus Schillers dreissigjährigem Kriege. Aufsätze. Lectüre einiger Dramen.	Ergä eigenthüml nen, Le Aufsatz Lec rigs Hilfsb Shakespe

*) Gesang wie in der Pensentabelle des Gymnasiums.

ik und en.	Geschichte und Geographie.	Naturgeschichte.	Physik.	Chemie.	Schreiben und Zeichnen. *)
der neuen wichte. De- nach Loews infache Re- trischer An- richt.	Die allgemeinen Grundbegriffe aus der physischen und mathematischen Geographie. — Länder und Meere nach Voigts Leitfaden, 1. Cursus.				Schreiben: Die kleinen und grossen Buchstaben beider Alphabete. Zeichnen: Gerade Linien und geradlinige Figuren, leichte architektonische Verzierungen, nach Vorzeichnungen.
Brüche nach hs Rechen- trischer An- richt.	Repetition des Pensums der VI. Die aussereuropäischen Erdtheile, nach Voigt. 2. Cursus.	Im Winter die wichtigeren Säugethiere.			Schreiben: Hauptwörter und Sätze in Current- und Cursivschrift, Taktschreiben. Zeichnen: Gebogene Linien und ihre Anwendungen, nach Vorzeichnungen.
nd zusam- Regeldetri nung, nach rie bis zum en Dreieck nach Meh-	Europa, nach Voigt, 2. Cursus. — Griechische (orientalische) Geschichte bis zum Tode Alexander des Grossen und römische bis Titus, nach Voigt.	Im Sommer Bau der Pflanzen, Linnés System, Fruchtbildung, nach Leunis' Schul-Naturgeschichte. Im Winter Vögel, namentlich einheimische.			Schreiben: Sätze in Current- und Cursivschrift. Zeichnen: Elementare Ornamente, Proportionen des menschl. Kopfes.
ihe Rechnen irzte Multi- Division. — 4 Species xponenten, llelogramm Mehler.	Deutschland nach Voigt. — Römische Kaisergeschichte und Deutsche Geschichte bis 1600.	Im Sommer Terminologie der Früchte, Demonstrationen; Nachweisung der natürlichen Verwandtschaft. Im Winter Repetition und Vervollständigung des Pensums von IV.			Uebungen im Freihandzeichnen, nach Vorzeichnungen und nach Holzkörpern.
urzeln, Pro- hnungen des ier Hirsch. it, Aehn- cheninhalt, nach Meh-	Preussen speciell, nach Voigt. — Deutsche und preussische Geschichte bis 1815, nach Voigt. — Das Wichtigste aus der mathematischen Geographie.	Im Sommer das natürliche Pflanzensystem. Im Winter wirbellose Thiere.			Freihandzeichnen wie in III B. Geometrisches Zeichnen, die ersten Elemente der Perspective.
und recip- en, Loga- nzins- und , geome- ametrische Trigono- che Puncte	Die Länder des römischen Reiches. — Erweiternde Repetition der alten Geschichte, nach Dielitz. Wiederholung der deutsch-preussischen Geschichte.	Im Sommer Fortsetzung des Pensums von III A, die Culturpflanzen, Physiologie der Pflanzen. Im Winter Naturgeschichte des Menschen.	Im Sommer Mechanik der festen Körper. Im Winter Mechanik der flüssigen und der gasförmigen Körper, nach Brettner.	Chemie der Metalloide, nach Rüdorff.	Freihandzeichn. nach Vorlagen, Holzkörpern, nach Vasen und Ornamenten von Gyps. Anfangsgründe der Projectionslehre, Lehre vom Grund- und Aufriss, perspect. Zeichnen.
Permuta- ionen, der satz. De- tenbrüche, ichungen.	Repetition und Vervollständigung der Geographie; mathematische Geographie. — Das Mittelalter, nach Dielitz.	Im Sommer Geologie. Im Winter Mineralogie, Krystallographie, Gebrauch des Löthrohrs.	Im Sommer Wärmelehre Im Winter Magnetismus und Reibungselectricität, nach Brettner.	Im Sommer Chemie der leichten Metalle. Im Winter Chemie der wichtigsten schweren Metalle mit Ausnahme der edlen und der seltneren Metalle.	Freihandzeichnen wie in II B. Projectionslehre, die rechtwinklige Projectionsart, Perspective.
iere und Gleichun- d Minima. nometrie, thetische eometrie. hem. Geo- nomie.	Repetition der Geographie im Anschluss an die Geschichte. — Neuere und neueste französische und englische Geschichte.		Im Sommer Galvanismus. Im Winter Wellenlehre u. Akustik, nach Brettner.	Organische Chemie. Seltenere Metalle, als Ergänzung zur Experimentalchemie. Praktische Arbeiten im Laboratorium.	Freihandzeichnen wie in II. Linearzeichnen nach Vorlagen aus der Maschinenkunde, Architectur etc. Projectionszeichnen, Perspective, Schattenconstruction.

Klasse.	Religion.	Lesen.	Deutsch	
			a) Grammatik.	b) Orthogra
I.	Wiederholung der biblischen Geschichten des Alten Testaments. Ausgewählte Geschichten des Neuen Testaments. 2. Hauptstück. 1. Artikel mit Erklärung. 3 Lieder. Gebete. Sprüche. Fürbringers bibl. Gesch. II. Th.	Leseübungen in dem Lesebuche von Gude und Gittermann (Mittelstufe). Mündliches Wiedererzählen. Vortrag von Gedichten.	Wiederholung des Dingwortes, Fürwortes, Eigenschaftswortes. Conjugation in allen Redeweisen. Die zehn Wortarten. — Der einfache Satz und seine Glieder.	Dictate über die gekommenen Regeln Unregelmässigkeit gebrauchs.
II.	Saul, David, Salomo. Fürbringers bibl. Gesch. II. Th. S. 89—107. Aus dem Neuen Testament: Zehn Aussätzige. Segnung der Kinder. 1. Hauptstück mit Erklärung und Schluss. 3 Lieder. Gebete und Sprüche.	Leseübungen in dem Lesebuche „Schreibleseschüler“ von Gittermann. Erlernen von Gedichten.	Wiederholung. Conjugation im Activ und Passiv. Declination des persönlichen Fürwortes. Bestimmtes und unbestimmtes Zahlwort. Wortbildung. — Der einfache Satz.	Dictate mit bes rückstichtigung d dung.
III.	Zug durch die Wüste bis Mosis Tod. Josua, Samuel, Saul bis zur Salbung Davids. Fürbringers bibl. Gesch. II Th. S. 79—89. Aus dem Neuen Testament: Jüngling zu Nain. Gebote mit Erklärung. 2 Lieder, Gebete. Sprüche.	Leseübungen in dem deutschen Lesebuch von Engelien und Fechner, I. Th. Erlernen von Gedichten.	Dingwort: Declination desselben. Concretum und Abstractum. Bestimmter und unbestimmter Artikel. Eigenschaftswort: Steigerung desselben. Zeitwort: Conjugation der sechs Zeiten. Anfänge der Wortbildung.	Orthographisch mit Berücksichtig nung und Schär cale.
IV.	Auszug aus Aegypten. Gesetzgebung auf Sinai. Mosis Tod. Ergänzungen. Fürbringers bibl. Gesch. II. Th. S. 54—79. Erklärung der christlichen Feste und der zwölfjährige Jesus. Gebote ohne Erklärung. 2 Lieder. Gebote. Sprüche.	Leseübungen in der Handfibel von Otto Schulz.	Dingwort: Geschlecht, Mehrzahlbildung. Artikel. Eigenschaftswort. Zeitwort: Conjugation der drei Hauptzeiten.	Orthographis mit Berücksicht stammung und Wörter. Verl Wörter.
V.	Abraham. Isaak. Jakob. Joseph. Fürbringers bibl. Gesch. I. Th. S. 10—24. Wiederholung der Weihnachtsgeschichte und Festgeschichten. Sprüche und Gebete. Fürbringers bibl. Gesch. I. Th. Anhang.	Leseübungen in deutscher und lateinischer Schrift in dem ersten Lesebuche von Fechner.	Erkennen des Dingwortes.	Abschreibe- leichte Dictate tigung der Re wie du richtig
VI.	Schöpfung. Paradies. Sündenfall. Kain und Abel. Sündfluth. Fürbringers bibl. Gesch. I. Th. S. 1—10. Aus dem Neuen Testament: Weihnachtsgeschichte. Sprüche und Gebete. Fürbringers bibl. Gesch. I. Th. Anh.	Einübung der Laute und Buchstaben in der deutschen Schreib- und Druckschrift nach der Fibel von Fechner.		Uebungen der gelesenen schreiben leic Sätze aus den

ungen.	Rechnen.	Schreiben.	Geographie.	Zeichnen.	Gesang.
	Mündlich: Zahlenkreis von 1 — 1000 und darüber. Schriftlich: Die vier Species mit benannten Zahlen. Koch Rechenheft II. und III.	Uebungen in der Current- und Cursivschrift.	Wiederholung von Europa; die andern Erdtheile nach ihren Grenzen, Inseln, Halbinseln, Meerbusen, Gebirgen, Flüssen, Ländern und Zonen.	Geradlinige Figuren.	Notenkenntniss. Einübung der Tonleiter. Choräle und einstimmige Lieder. Deutscher Liederhain von Kienholz.
	Mündlich: Zahlenkreis von 1—1000 multiplicativ und divisiv. Schriftlich: Division. Resolviren. Reduciren. Koch Rechenheft I. und II.	Fortsetzung der Uebungen des deutschen und lateinischen Alphabets. Wörter und Sätze in beiden Schriftarten.	Globus. — Europa nach seinen Grenzen, Meerbusen, Inseln, Hauptgebirgen, Flüssen, Ländern und Hauptstädten.	Gerade Linien und leichte Figuren.	
	Mündlich: Zahlenkreis von 1—1000 additiv und subtractiv. Einmaleins mit 24, 25. Schriftlich: Multiplication; Division mit einer Stelle. Koch Rechenheft I.	Uebungen des lateinischen Alphabets in Wörtern und Sätzen.	Heimathskunde. — Geographische Vorbegriffe.		
d Erchten.	Mündlich: Zahlenkreis von 1—200. Einmaleins mit 7—10, 12, 15, 16. Schriftlich: Addition und Subtraction. Koch Rechenheft I.	Uebungen der deutschen Schrift und der kleinen lateinischen Buchstaben.			
g von Ernen urch chen.	Mündlich u. schriftlich: Zahlenkreis von 1 bis 100. Einmaleins von 2—6.	Uebungen der deutschen Schrift in Wörtern und Sätzen.			
Gemitung. rlerchte ach-	Mündlich u. schriftlich: Zahlenkreis von 1 bis 20.	Einübung der kleinen und grossen deutschen Buchstaben, einzeln und in Wörtern.			

VI. Vertheilung der Stunden unter die Lehrer der Vorschule im Winter-Semester 1876 bis 1877.

Rang-ordnung.	Namen.	Ordinar.	I. A.	I. B.	II. A.	II. B.	III. A.	III. B.	IV. A.	IV. B.	V. A.	V. B.	VI. A.
Director	Dr. **Kern.**												
Ober-lehrer	Dr. **Schnell.**		3 Relig. 9 Deutsch										
1. Ordentlicher Lehrer	**Möllinger.**	I. A.	3 Geogr. 4 Schreib. 2 Zeichnen	3 Geogr. 1 Deutsch	2 Zeichnen	2 Zeichnen	3 Relig. 2 Geogr.						
2. desgl.	**Schmidt.**	I. B.		3 Relig. 8 Deutsch 5 Rechn. 4 Schreib. 2 Zeichnen									
3. desgl.	**Streithorst.**	II. A.			3 Relig. 9 Deutsch 6 Rechn. 2 Geogr. 4 Schreib.								
4. desgl.	**Lübcky.**	III. A	5 Rechn.				9 Deutsch 6 Rechn. 4 Schreib.						
5. desgl.	Dr. **Dallwitz.**	III. B.						3 Relig. 9 Deutsch 6 Rechn. 2 Geogr. 4 Schreib.					
6. desgl.	**Pache.**	IV. A.							3 Relig. 9 Deutsch 2 Sprech-Uebung. 6 Rechn. 4 Schreib.				
7. desgl.	**Lüben.**	II. B				3 Relig. 9 Deutsch 6 Rechn. 2 Geogr. 4 Schreib.							
8. desgl.	**Schiller.**	IV. B.								3 Relig. 9 Deutsch 2 Sprech-Uebung. 6 Rechn. 4 Schreib.			
9. desgl.	**Werdermann.**	V. A.									3 Relig. 7 Lesen 2 Sprech-Uebung. 6 Rechn. 6 Schreib.		
10. desgl.	**Manteufel.**	V. B.										3 Relig. 7 Lesen 2 Sprech-Uebung 6 Rechn. 6 Schreib.	
11. desgl.	**Clausnitzer.**	VI. B.											
12. desgl.	**Mehles.**	VI. A.											3 Relig 7 Lese 2 Spre Uebu 6 Rech 6 Schr
Technischer Lehrer	Prof. **Commer.**		2 Gesang	2 Gesang									
	Summa		28	28	26	26	24	24	24	24	24	24	24

Anmerkung. Im Sommer-Semester 1876 waren die Ordinariate in folgender Weise vertheilt: Möllinger in I. A., Schmidt in I. B., Lübcky in II. A., Dallwitz in II. B., Pache in V. A., Lüben in III. B., Schiller in V. B., Werdermann in VI. A., Manteufel in VI B., Mehles in IV. A. — Jede Klasse hat einen halbjährigen Cursus und zwei durch A und B unterschiedene Parallelcötus.

VII. Der Turn-Unterricht.

Die Schüler des Gymnasiums und der Realschule turnten im Sommer gemeinschaftlich auf n Turnplatze in der Hasenhaide, im Winter abtheilungsweise im Turnsaale auf dem Hofe der Real- n Vorschule unter der Leitung von Prof. Dr. Voigt, der ordentlichen Lehrer Dr. Wagner und cken, sowie des Gemeindelehrers Günter. Während des Sommers nahmen am Turn-Unterricht Gymnasiasten und 480 Realschüler, während des Winters 536 Gymnasiasten und 605 Realschüler il. Die geringere Betheiligung im Sommer erklärt sich aus der weiten Entfernung des Turnplatzes der Schule. — Auf dem Turnplatze waren die 950 Schüler in 18 Züge eingetheilt, deren Führung ülern der obersten Klassen unter der Aufsicht der Lehrer und mit Beihülfe von etwa 70 Vorturnern rtraut wurde. Im Winter turnten die unteren Klassen einzeln unter unmittelbarer Leitung der rer mit Bevorzugung der Frei- und Ordnungsübungen sowie der Turnspiele; aus den mittleren oberen Klassen wurden Abtheilungen von ungefähr 80 Schülern nach der Turnfertigkeit zusammen- ellt und die Schwächeren hauptsächlich mit Kletter- und Sprungübungen, die Vorgeschrittneren r mit Reck-, Schwingel- und Barrenübungen beschäftigt. Die Vorturner wurden in besonderen den ausgebildet. Mehrfach wurden Wettturnübungen im Klettern, Weitspringen, Laufen und am k veranstaltet; an dem üblichen Wettturnen der Vorturner betheiligten sich 74 Schüler beider talten. Das Schlussturnen musste der ungünstigen Witterung wegen bis auf den 12. October ver- ben werden. In der gewöhnlichen Weise folgten dem unter Musikbegleitung stattfindenden Auf- rsche die Frei- und Ordnungsübungen sämmtlicher 18 Züge; daran reihte sich das Geräthturnen der elnen Züge, welches durch Reigen und Schauturnen der Vorturner beendigt wurde. Zuletzt übergab Director die Erinnerungsmedaillen an die 8 Zugführer: Hans Busse (R.), Max Denk (R.), Adolf dberg (G.), Max Müller (R.), Paul Otto (R.), Georg Raetzell (G.), Johannes Schneider (G.), Otto emann (G.).

Die 4 obersten Klassen der Vorschule turnten nur im Sommer unter der Leitung der Vorschul- er Möllinger und Clausnitzer in der Turnhalle.

VIII. Verzeichniss der Themata zu den im verflossenen Schuljahre ausgearbeiteten Aufsätzen.

1. Gymnasium.

Deutsch. OI. 1. a) Vor Jedem steht ein Bild dess, das er werden soll; | So lang' er nicht ist, ist nicht sein Friede voll. b) Carpe diem — wie versteht es Horaz und wie sollen wir erstehen? — 2. a) Nihil est tam mortiferum ingeniis quam luxuria. b) Ein Thor der klaget stets re an, | Sich selbst anklaget ein halb schon weiser Mann, | Nicht sich noch Andre klaget der se an. — 3. a) Mit welchem Rechte wird ein grosser Mann der Sohn seiner Zeit genannt? annst Du nicht Allen gefallen durch Deine That und Dein Kunstwerk, | Mach' es Wenigen recht; en gefallen ist schlimm. — 4. Goethes Wort: „In der Beschränkung zeigt sich erst der Meister", gwandt auf das Gebiet sittlicher Bildung. — 5. a) Das Mittelmeer in der Geschichte (Abiturienten- na). b) Die Bedeutung des Perikles für Athen, für Griechenland und für die allgemeine Culturgeschichte. — 6. a) Thu' was Jeder loben müsste, | Wenn die ganze Welt es wüsste; | Thu' es, dass iemand weiss, | Und gedoppelt ist sein Preis. b) Die ersten vier Kapitel des Lessing'schen oon, nach ihrem Gedankengange entwickelt. — 7. a) Tasso und Antonio in Goethes Drama. ie Macht und die Bedeutung des Kleinen auf dem Gebiete der Natur und der Sittlichkeit. — arum geht die Sage der Geschichte voran?

UI. 1. a) Ueber den Begriff des Wortes Furcht und synonymer Wörter. b) Odysseus, ein o kluger als gemüthvoller Held. — 2. a) Walther von der Vogelweide als politischer Dichter. zählung der Handlung des Götz von Berlichingen. — 3. a) Patriarch, Klosterbruder und Tempel- r. b) Götzens Verhältniss zu Kaiser, Fürsten, Städten und Bauern. — 4. a) Ueber die Urtheile der olität als Ausdrucksformen verschiedener Erkenntnissstufen. b) Ueber Goethes Abweichungen von Geschichte im Götz von Berlichingen. — 5. Inwiefern ist Karl Moor eine Nachbildung Richard III.? Ueber den Einfluss der Natur auf das Gemüth des Menschen. — 7. Inwiefern hat die Tragödie gfrau von Orleans" den Charakter des Romantischen? — 8. Das Allegorische in den drei Gedichten es „Gesang der Geister über dem Wasser", „Mahomet's Gesang" und „Seefahrt". — 9. Sammlung Ordnung der Hauptgedanken in den chorischen Stellen der „Braut von Messina" und Betrachtung e Beziehung zur Handlung.

OII. 1. a) Ueber die Fremdwörter. b) Die Nervierschlacht nach Caes. b. Gall. II. — e Fabel in der „Braut von Messina". — 3. Ueber die Vorzüge einer grossen Stadt (Klassenaufsatz).

4. Ueber die wichtigsten Erfindungen des 19. Jahrhunderts. — 5. Inwiefern kann sich der Deutsch seines Namens rühmen? — 6. Inwiefern ist Wallensteins Lager eine nothwendige Einleitung zu de eigentlichen Drama? — 7. Der erste Aufzug der Piccolomini als Exposition des Dramas. — 8. D Gang der Handlung in den Piccolomini. — 9. Aus welchen Gründen fällt Wallenstein vom Kaiser al — 10. Aus welchen verschiedenen Ursachen wird Wallenstein von seinen Anhängern verlassen?

UIIA. 1. Der siebenzigste Geburtstag von J. H. Voss (Gedankengang und Gliederung). 2. Der Pfarrer von Grünau. — 3. In welchem Sinne bezeichnet der Pfarrer im ersten Gesang v „Hermann und Dorothea" die Neugier als ein wohlthätiges Geschenk der Natur? — 4. Schilderu der Vaterstadt Hermanns. — 5. Inhaltsangabe des fünften Gesanges von „Hermann und Dorothea". 6. Wie benutzest Du Deine Freistunden? — 7. Der Tod des Laokoon (nach Verg. Aen. II.). — 8. D Leben des Ritters Götz von Berlichingen. — 9. Weislingen als Gefangener bei Götz. — 10. Wo weicht Goethes Götz von der Geschichte ab? — 11. Die Charaktere der Elisabeth und Maria Goethes Götz. — 12. Egmont und Wilhelm von Oranien (nach Goethes Egmont).

UIIB. 1. In der Noth erkennt man den Menschen am besten. — 2. Charakteristik des Sch meisters Tamm in Voss' siebenzigstem Geburtstage. — 3. Inhalt des ersten Gesanges von „Herma und Dorothea". — 4. Der Wirth zum goldenen Löwen nach der Schilderung Hermanns. — 5. I Handlung in „Hermann und Dorothea" (Klassenarbeit). — 6. Fides supremum rerum humanar vinculum. — 7. Götz und Weislingen im ersten Acte des „Götz von Berlichingen". — 8. Götzens En — 9. Oranien im „Egmont". — 10. Egmont vor Alba. — 11. Ferro nocentius aurum (Klassenarbe

Lateinisch. OI. 1. a) Bellorum cum duo sint genera, quoniam aut certatur, utri sint aut u imperent, quae utriusque generis bella Romani gesserint. b) Oratio habita in senatu de Jani tem claudendo. — 2. a) M. Cato de philosophis Graecis, qui Athenis Romam venerant legati, dimitter in senatu orationem habet. b) Eos potissimum justitiae oblivione capi, qui honores, imperium glor petant, exemplis demonstretur. — 3. a) Quod apud Ciceronem est: mortem sapientes nunquam in fortes etiam saepe libenter appetiverunt, illustretur. b) Explicetur quibus ex causis Cicero quatuo Catilinam orationes habuerit. — 4. Rectene Sulla judicarit tribuniciam potestatem ita esse imminuend ut auxilii latio iis relinqueretur, jus legum ferendarum majorumque magistratuum petendorum adimer (Klassenaufsatz). — 5. Domesticae fortitudines non inferiores militaribus (Klassenaufsatz). — 6. B Persicis utri melius de Graeciae salute meruerint, Lacedaemonii an Athenienses. — 7. Rectene Cra orator apud Ciceronem ab oratoribus civitates et initio constitutas et saepe conservatas esse d — 8. Qui orator haberi velit, num idem esse debeat philosophus. — 9. Qua argumentatione Cicer oratione de imperio Pompeji habita utatur. — 10. Summas virtutes, sapientiam, justitiam, fortitudin temperantiam universas oratori inesse oportere demonstretur (Klassenaufsatz). — 11. Ciceronem orato quando rei publicae et civium salus ageretur, omnia pericula, inimicitias, exilium, mortem ipsam libe subisse explicetur (Klassenaufsatz).

UI. 1. a) Quos veteres Germani potissimum coluerint deos, e Taciti Germania demonstr b) De M. Tullii Ciceronis consulatu. — 2. a) Num recte Cicero dixerit rei militaris virtutem prae ceteris omnibus. b) Bellum Mithridaticum a L. Lucullo gestum non esse contemnendum. — 3. a) M. Po Cato Censorius, M. Porcius Cato Uticensis inter se comparentur. b) Quibus de causis Servius Sulpi Rufus anno sexagesimo tertio consulatus repulsam tulerit. — 4. Quibus de causis Cicero nob scribendo sit imitandus. — 5. De Pericle Atheniensi. — 6. a) De Pyrrho rege Romanorum lst b) Dulce et decorum est pro patria mori. — 7. a) Quibus de causis plerumque se Cicero, quod sculpt pictorumque nomina pronuntiet, in orationibus in C. Verrem habitis videatur excusare. b) Qui Graecos praestantissimi fuerint sculptores. — 8. a) C. Verris laudatio. Oratio Romae habita a C. Mamertino, legationis Mamertinae principe ad C. Verrem laudandum Romam publice missae. b) Fur in Sicilia a C. Verre commissorum quae fuerint genera. — 9. a) Exercitus maximos saepe puls fugatos esse terrore ipso impetuque hostium sine cujusquam non modo morte, verum etiam vo b) Cur litterae latinae nobis discendae sint.

2. Realschule.

Deutsch. I. 1. a) Müssiggang ist aller Laster Anfang. b) Die natürlichen Gr zwischen Frankreich und Deutschland. — 2. a) Ist es ein Unglück oder ein Glück, dass wir ei Colonien haben? b. Umsichtig und verschwiegen sei ein Jeder und im Zutrauen zaghaft. Wor Anderen anvertraut wurden, büsst man oft bitter. — 3. a) Die Charaktere in Lessings N b. Aequam memento rebus in arduis servare mentem, non secus in bonis ab insolenti temp laetitia, moriture Delli. — 4. a) Der Ehrgeiz, eine Quelle zum Guten und zum Bösen. b) Ci Maecenas, ut nemo, quam sibi sortem seu ratio dederit seu fors obiecerit, illa contentus vivat, diversa sequentis? 5. a) Charakter Kaiser Friedrichs II. b) Die Götter bei Homer. 6. a) Die charaktere in Sophokles' Antigone. b) Wohl denen, die des Wissens Gut nicht mit dem

ılen. 8. a) Die Iphigenie Goethes, verglichen mit derjenigen des Euripides. b) Weshalb waren illers Räuber so anziehend für die Zeitgenossen? — 9. a) Die Eumeniden des Aeschylus. b) Wenn eiheit Du begehrst, des Menschen höchste Zierde, | Herrsch über Leidenschaft und Neigung und gierde. | Doch bilde Dir nicht viel auf diese Herrschaft ein; | Des freien Willens Stolz ist Gott gorsam sein.

IIA. 1. Wovon hängt die Trockenheit des Klimas eines Landes ab? — 2. Der Apfel fällt ht weit vom Stamm. — 3. Hat Tell ein Recht, den Parricida als Mörder zu behandeln? — 4. Noth iert Kraft. — 5. Warum ist das Bild des Baumes für uns beschämend? (Klassenarbeit). — 6. Dasbe (häusliche Arbeit). — 7. Die Eigenthümlichkeiten der heissen Zone. — 8. Beispiele zur Metonie und Synekdoche aus Schiller. — 9. Die Worte des Glaubens und des Wahns von Schiller. — Es scheint ein Mensch oft sehr gering, durch den Gott schafft grosse Ding (Klassenarbeit).

IIB1. 1. Soll ich Dir die Gegend zeigen, musst Du erst das Dach besteigen. — 2. Veranung zum Zorn des Achilleus. — 3. Here bei Homer. — 4. Die Minister der Königin Elisabeth von gland. — 5. Die Rolle des Mortimer in Schillers Maria Stuart (Klassenarbeit). — 6. Nur Beharrung rt zum Ziel. — 7. Die Piccolomini. — 8. Dispositionen zu einzelnen Abschnitten aus der Odyssee. 9. Die Götter als Freunde und Feinde des Odysseus. — 10. Frohlocke nicht; denn neidisch sind Schicksals Mächte (Klassenarbeit).

IIB2. 1. Des Odysseus Fahrt von Ogygia zur Insel der Phäaken. — 2. Der Ordensritter in illers Kampf mit dem Drachen. — 3. Steter Tropfen höhlt den Stein. — 4. Das menschliche Leben glichen mit den Jahreszeiten (Klassenaufsatz). — 5. Hoffen und Harren macht Manchen zum Narren. 6. Hauptgründe des Wohlstandes der Rheinprovinz. — 7. Wie entstand der Zorn des Achilleus? — iegfrieds Tod, nach dem Nibelungenliede. — 9. Zeus, nach den ersten Büchern der Ilias geschildert. 10. Nützliche und schädliche Seiten der Gebirge (Klassenaufsatz). — 11. Rom ist nicht an einem e erbaut worden.

Französisch. I. 1. Frédéric Guillaume, électeur de Brandebourg. — 2. Guerres entre la nce et l'Angleterre. — 3. Réforme de l'Eglise en Allemagne. — 4. Troisième guerre punique. — ierre le Grand. — 6. Guerre de sept ans. — 7. Guerre de la succession d'Autriche (ou Guerres Louis XIV.). — 8. Guerre de 1813 et 1814. — 9. Prépondérance d'Athènes sous Périclès. — Les Ostrogoths en Italie. — 11. Henri IV., empereur d'Allemagne. — 12. Alexandre le Grand. — Guerre de la succession d'Autriche. — 14. Commencement de la révolution francaise. — 15. Charlene. — 16. César et Pompée (ou Antoine et Auguste). — 17. Henri I. (et Othon I.) d'Allemagne. — Vie d'Alcibiade. — 19. Frédéric I. (ou II.), empereur d'Allemagne. — 20. Marius et Sylla. — Miltiade.

Englisch. I. 1. Maria Theresa and Frederick the Great. — 2. The Seven Years' War. — ar against the Latins and Samnites. — 4. Henry the Fourth of Germany. — 5. The Second Civil . — 6. Henry the First of Germany. — 7. Life of Pausanias. — 8. Thebes in the height of its lopment. — 9. Frederick II. of Suabia and his struggle against Popery. — 10. The Year 146 in Roman History. — 11. Lewis IX. and the Fifth Crusade. — 12. Richard II., King of England.

IX. Die von den Abiturienten bearbeiteten Aufgaben.

1. Gymnasium.

Ostern 1876. Deutsch. Vor Jedem steht ein Bild dess, was er werden soll; | So lang er nicht ist, ist nicht sein Friede voll. — Lateinisch. Cum genera bellorum duo sint, cum aut tur, utri sint aut utri imperent, quae utriusque generis bella Romani gesserint. — Mathematik. $\sqrt{214}$ durch ein Näherungsverfahren zu berechnen. b) Die Gleichungen $xy+xz=45$, $x+y+z=14$, $x^2+y^2+z^2=94$ aufzulösen. — c) Die Diagonale des Axenschnittes eines Cylinders sei $=d$. gross ist dessen Höhe, wenn sein Volumen ein Maximum sein soll? — d) Die Seiten eines Vierecks a, b, c, d und zwei einander gegenüberliegende Winkel sind einander gleich. Wie gross sind Winkel, und wie gross ist der Flächeninhalt des Vierecks?

Michaelis 1876. Deutsch. Das Mittelmeer in der Geschichte. — Lateinisch. Laudes Barcinae. — Mathematik. a) Ein Cylinder $EFGH$ ist durch zwei Halbkugeln EAH und FBG nzt; die Oberfläche des ganzen Körpers ist gleich der Oberfläche einer Kugel vom Radius r und nhalt gleich dem einer Kugel vom Radius ϱ. Wie gross ist die Länge AB und der Radius CE Körpers? Beispiel: $r=2$, $\varrho=1$. — b) Die Gleichungen $xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}=a$ und $=b$ aufzulösen. — c) Auf der Geraden AD ist die Strecke $BC=a$ gemessen und von einem

Punkte E ausserhalb sind die Winkel α, β, γ beobachtet; wie gross sind die gleichen Strecken AE und CD? Beispiel: $\alpha = 12^0$, $\beta = 20^0$, $\gamma = 30^0$, $a = 15^m$. — d) Entwickelung des Ausdrucks $\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}$ $-\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}$ in eine nach Potenzen von x geordnete Reihe.

2. Realschule.

Ostern 1876. Deutsch. Die landläufige Phrase vom finsteren Mittelalter. Französisch. L'amour de la patrie est le mobile des plus grandes actions. — Mathematik. a) Die Summe der Glieder einer stetigen Proportion beträgt 39, die Summe ihrer Quadrate 741. Wie heisst die Proportion? — b) Von welchem Punkte der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks muss man Lote auf die Katheten fällen, damit das entstehende Rechteck bei seiner Rotation um eine der Katheten einen Cylinder von möglichst grossem Inhalt ergiebt? — c) Aus der Declination $\delta = +23^0\ 27'\ 2$ der Sonne, ihrem Stundenwinkel $\omega = 90^0$ und ihrer Höhe $h = 18^0\ 37'\ 48''$ die Polhöhe des Beobachtungsortes zu berechnen. — d) In einer Ellipse ist $a^2 = 3b^2$; zwei conjugirte Durchmesser schneiden sich unter 120^0. Welche Winkel bilden sie mit der grossen Axe? — Mechanik. Welches ist die Neigung einer schiefen Ebene, wenn eine über sie rollende Kugel viermal so viel Zeit braucht wie im freien Falle von ihrer Höhe h? — Physik. Bei einem Glasprisma sei der brechende Winkel 54^0 ($n = 1{,}5$; ein Strahl falle unter dem Winkel von 50^0 auf das Prisma. Unter welchem Winkel tritt derselbe aus, wie gross ist die Gesammtablenkung, für welchen Einfallswinkel wird das Minimum der Ablenkung stattfinden, und bei welchem Einfallswinkel ist kein Austritt an der anderen Seite des Prismas mehr möglich? — Chemie. Welche Producte erhält man, wenn man 100 Gramm Schwefeleisen, 100 Gramm Schwefelsäure und 500 Gramm Wasser zusammenbringt? Wie viel Wasser braucht man, um den entweichenden Schwefelwasserstoff zu absorbiren, und wie viel Procent H_2S enthält das entstandene Schwefelwasserstoffwasser? Absorptionscoëfficient $= 2{,}8$.

Michaelis 1876. Deutsch. Die Unbekanntschaft mit der Zukunft ist uns erspriesslicher als die Kenntniss derselben. Französisch. Comment les colonies européennes dans l'Amérique du Nord ont-elles été fondées, et comment se sont-elles rendues indépendantes? — Mathematik. a) Die Zahl 23 soll so in drei Theile getheilt werden, dass das Dreifache des ersten, das Achtfache des zweiten und das Elffache des dritten Theils zusammen 200 geben. — b) Um einen geraden Kegel mit dem Radius r und der Höhe h sei ein zweiter Kegel so beschrieben, dass die Spitze des einen der Mittelpunkt der Grundfläche des zweiten, die Grundfläche des ersten ein Schnittkreis des zweiten und der Inhalt des zweiten ein Minimum sei. Wie gross ist dieser Inhalt? — c) Die Entfernung zwischen Paris und Berlin beträgt 118 geographische Meilen; die geographische Breite von Paris $48^0\ 50'\ 13''$, die von Berlin $52^0\ 30'\ 16''$. Wie viel beträgt die Differenz der Uhren an beiden Orten? — d) Zwei conjugirte Durchmesser einer Ellipse haben die Längen a und b und bilden den Winkel α; wie gross ist die grosse und die kleine Achse der Ellipse? — Mechanik. Bei Anstellung des Foucault'schen Pendelversuches in Bonn ergab sich für eine scheinbare ganze Umdrehung der Pendelebene eine Zeit von 31 Stunden. Wie kann man daraus die geographische Breite von Bonn bestimmen? — Physik. Die Brennweite eines Hohlspiegels sei 8^{dcm}; wie gross ist der Abstand des Bildes vom Spiegel, wenn ein Gegenstand 60^{dcm}, 12^{dcm}, 9^{dcm}, 5^{dcm} vom Spiegel entfernt ist, und wie ist die verhältnissmässige Grösse des Bildes in den einzelnen Fällen? — Chemie. Es sind 500 Gramm krystallisirtes Blutlaugensalz gegeben; es fragt sich, wie viel Berliner Blau man damit herstellen kann, wie viel Eisenchlorid erforderlich ist, wie viel Chlor dem Volumen noch durch die Lösung von 500 Gramm zu leiten ist, um Ferridcyankalium darzustellen, und wie viel davon entsteht?

B. Chronik.

1. Schon der Jahresbericht des vorigen Jahres brachte in einem Nachtrage die Nachricht von dem am 29. März 1876 erfolgten Tode des Directors der vier vereinigten Anstalten Dr. theol. und phil. Ferdinand Ranke. Am 1. April fand unter der Theilnahme der Schüler und Schülerinnen sowie zahlreicher Lehrer und Lehrerinnen vor der Beisetzung der Leiche in der dicht gefüllten Dreifaltigkeits-Kirche die Todtenfeier statt. Sein Grab soll bald ein würdiges Denkmal zieren, errichtet von

iebe und Dankbarkeit seiner letzten und früheren Schüler und Schülerinnen und von der Hochachtung
id Verehrung seiner Amtsgenossen und Freunde. In den Annalen der seiner Leitung anvertrauten
.nstalten, in welchen der Ruf seiner Treue und seiner edlen Begeisterung immerdar fortleben wird,
öge, ebenfalls als ein Denkmal, folgender von dem Oberlehrer Martiny verfasste Lebensabriss des
is allen theuren Dahingeschiedenen Platz finden.

Carl Ferdinand Ranke, der Sohn eines Patrimonial-Richters, wurde am 26. Mai 1802 in
em thüringischen Städtchen Wiehe in der goldenen Aue geboren. Er war der dritte fünf namhafter
Jüder, von denen der älteste und gefeiertste der noch lebende Geschichtsschreiber Leopold von
Janke ist (geb. 1795). Von Natur reich beanlagt, erhielt er den ersten Unterricht in der Stadtschule
z Wiehe, mit ihm die ersten nachhaltigen religiösen Anregungen. Im Lateinischen privatim unter-
:htet durch den dortigen Prediger Damm, wurde er durch die Vermittelung des geistlichen Inspectors
er Landesschule Pforta John, welcher vordem zweiter Prediger in Wiehe und Freund des Rankeschen
Hauses gewesen war, Michaelis 1814 Alumnus dieser Anstalt.

Die Klosterschule Pforta stand damals noch unter Königl. Sächsischer Regierung; allein seit
em 18. Mai 1815 an Preussen gefallen, erfuhr sie unter der Königlich Preussischen Regierung eine
Ungestaltung, welche unter dem scholarchischen Scepter des von ihm hochverehrten Dr. Carl David
Ilgen in einer auch für die Entwickelung des deutschen Volkslebens bedeutenden Zeit zu durchleben
Janke vergönnt war. Dieser Periode der äusseren und inneren Umgestaltung Pfortas, welche er selbst
i seinen im Jahre 1874 erschienenen „Rückerinnerungen an Schulpforta zum Besten des Koberstein-
nen Schülerstipendiums“ eingehender beleuchtet, hatte er, ein begeisterter Schüler des nachmaligen
Rectors Lange, noch den Unterricht des Mathematikers C. Fr. Andr. Jacobi, zu dem er als Famulus
i ein näheres Verhältniss trat, und die entscheidende Einwirkung Chr. Friedr. Neues auf seine
philologischen Studien zu verdanken. Ostern 1820 Primus omnium und erster Inspector der Anstalt
geworden, fügte er, hauptsächlich der neuen bedeutenden Lehrkräfte wegen, welche Schulpforta zuge-
führt worden waren (unter denen auch Koberstein sich befand), Michaelis 1820 noch ein halbes
Jahr zu dem vorgeschriebenen Sexennium hinzu und verliess, mit einer gediegenen wissenschaftlichen
und sittlichen Vorbildung ausgerüstet, Ostern 1821 mit dem Zeugniss No. 1. die Pforta, um in Halle
Theologie und Philologie zu studiren.

Durch geringe Unterstützung von Seiten seiner wenig gut situirten Eltern auf Universitäts-
Benefizien und Nebenverdienst angewiesen, lebte Ranke in Halle unter sehr bescheidenen Verhält-
nissen. Um so eifriger und nachdrücklicher widmete er sich dem Studium. Seine ganze Neigung,
durch Schulpforta geweckt, war schulmännischer und pädagogischer Thätigkeit zugewandt. Deshalb
trieb sein theologisches Studium mehr hinter dem philologischen zurück. Zwar hörte er auch theologische
Vorlesungen bei den damals grossen Zuspruchs sich erfreuenden Lehrern der Theologie Knapp und
Gesenius, selbst philosophische. Mit grösserer Begeisterung aber ergriff er das Studium der klassi-
schen Alterthums-Wissenschaften, ein Verehrer Christ. Aug. Wolfs, und trieb dasselbe mit rühm-
lichem Fleisse drei Jahre hindurch, 1821—1824, in förderlicher Gemeinschaft gleichgesinnter Studien-
genossen, wie Yxem, Martin, Sempach, (unter denen ihm Max Schmidt, schon von Schulpforta
her ihm befreundet, am nächsten stand), unter der trefflichen Leitung Aug. Seidlers, eines Freundes
und Studiengenossen Gottfr. Hermanns, und C. Chr. Reisigs, eines vielversprechenden Schülers
Hermanns. Durch seine unbemittelte Lage genöthigt, aber auch dem inneren Drange regen wissen-
schaftlichen Strebens folgend, trat er, was damals zulässig war, bereits im ersten Semester in das von
Seidler mit erfreulichem Erfolge geleitete Seminar, in das er sich durch eine kritische Arbeit über
Stellen des Sophokleischen Ajax, auf welche bereits Neue in Pforta ihn hingewiesen, die Aufnahme
wirkt hatte, und gehörte 2¼ Jahr demselben als ordentliches Mitglied an. — Sowohl zu Seidler
als zu Reisig trat er in ein nahes persönliches Verhältniss, in ein noch näheres zu Carl v. Raumer,
der anfänglich durch seine naturhistorischen Vorlesungen, später, seit dem Jahre 1822, durch seine
Aufsehe machenden Vorträge über Pädagogik einen zahlreichen Zuhörerkreis um sich sammelte. Als
einziger Schüler v. Raumers lernte Ranke schon damals dessen historisch fundirte gediegene Ansichten
über Erziehung kennen, wie er sie später im Jahre 1842 ausführlicher in seiner „Geschichte der
Pädagogik“ niedergelegt hat. Einflussreicher noch als durch seine Vorlesungen wurde in seinem Hause
zu Siebichenstein v. Raumer auf Ranke durch seine persönliche religiös sittliche Einwirkung.
Zugleich lernte er in diesem auch als Centrum der burschenschaftlichen Bestrebungen der Hallenser
Studentenschaft vielbesuchten Kreise eine Anzahl talentvoller strebsamer junger Männer kennen, wie
Wismann, Philipp Wackernagel u. A., deren Umgang anregend und fördernd auf ihn einwirkte.
Ranke war dort ein gern gesehener Gast, trieb auch privatim mit v. Raumer auf dessen Wunsch
Lectüre lateinischer Klassiker (des Cornelius Nepos, Caesar, Sallustius, Livius, Tacitus, der beiden
Plineren mit Auswahl) und lernte bei ihm seine künftige Gemahlin, die sinnige Fanny Pollau, die
Schwägerin des Hallenser Professors Blanc, kennen, dem er die Einführung in die französische und

italienische Literatur und die genauere Bekanntschaft mit Boccaccios Decamerone und Dantes Divin
Commedia verdankte.

Ostern 1824 hatte Ranke sein Triennium in Halle beendigt; bereits den 9. Juni 1824 leg
er bei der Wissenschaftlichen Prüfungs-Commission daselbst, in der die alten Sprachen Reisig ve
trat, sein Examen pro facultate docendi ab. Auf Grund des darüber ausgestellten Zeugnisses erlang
er, längst nach einer Anstellung sich sehnend und bis dahin mit Lieblingsstudien beschäftigt, ei
solche durch Vermittelung eines seiner Freunde Schwalbe, der seit Kurzem Lehrer am Gymnasiu
in Quedlinburg war, an der nämlichen Anstalt als erster Collaborator erst am 1. Januar des folgend
Jahres (1825). Zufrieden, Gelegenheit gefunden zu haben, seine Lehrthätigkeit, die er schon in Hal
eine kurze Zeit an den Frankeschen Stiftungen versucht hatte, nach Herzenslust zu entfalten, ve
schaffte er sich durch sein in Pforta und Halle wohl begründetes gelehrtes Wissen, welches in pra
ihn zum Unterrichte fast in allen Gymnasial-Disciplinen befähigte, wie durch Begeisterung für sein
Beruf und Gemeinnützigkeit seines Strebens solche Anerkennung, dass er, der Gunst seiner vorg
setzten Behörden sich erfreuend, schnell höher und höher stieg. Nach vorausgegangener rühmlich
Ablegung des ersten theologischen Examens vor dem Consistorium in Magdeburg (am 1. März 182
wurde er den 28. Juni 1826 nach Huchs Austritt zunächst Subrector; noch in demselben Jah
nachdem er noch hatte ein Examen pro ascensione bei der Königlichen Wissenschaftlichen Prüfun
Commission in Halle bestehen müssen, Conrector, endlich nach dem Tode des bisherigen Rect
Sachse und bestandenem Colloquium pro rectoratu den 23. Juli 1831 Director des Gymnasiums
Quedlinburg. Seinem eifrigen schulmännischen Wirken in Quedlinburg ging eine ebenso rege wiss
schaftliche als gemeinnützige Thätigkeit zur Seite. Abgesehen von einer im Programm
Quedlinburger Gymnasiums 1827 veröffentlichten Abhandlung „de Cornelii Nepotis vita et scrip
schrieb er 1830 als Einleitung zu Bernhard Thiersch' Ausgabe des Aristophanes das Leben dies
Dichters unter dem Titel „de vita Aristophanis". Seine mit Scharfsinn und Gelehrsamkeit im Jah
1831 abgefasste „Commentatio de lexici Hesychiani vera origine et genuina forma" zog ihm die Acht
der Gelehrten und die ehrende Anerkennung des damaligen preussischen Cultusministers Altenst
zu. Wie zu dieser Schrift, so hatten auch zu seiner Abhandlung „Pollux et Lucianus" die liter
historischen Vorträge Langes in Schulpforta die erste Anregung gegeben. Von seinem eingehen
Studium der Demosthenischen Reden zeugt der von ihm herrührende treffliche Artikel „Demosthe
in Ersch' und Grubers Encyklopädie. Ein practisches Bedürfniss ins Auge fassend, verfasste er
Jahre 1833 seine durch spätere Auflagen erweiterte, mit einem lateinisch-deutschen Lexicon verse
Chrestomathie aus lateinischen Dichtern, vorzüglich aus Ovidius. Einen Beitrag zur allgemeinen
schichte der Gründung und Entwickelung der Gymnasien des preussischen Vaterlandes liefert
durch eine im Quedlinburger Wochenblatte, Jahrgang 1835, abgedruckte Geschichte des dorti
Gymnasiums. Auf ein abgelegneres Gebiet führte ihn „die Geschichte der Quedlinburger Schlosskirc
welche, in Verbindung mit Franz Kugler von ihm herausgegeben, von den Behörden beifällig ag
nommen wurde. — Dieser seiner mannigfachen wissenschaftlichen Arbeiten wegen ward Ranke
der philosophischen Facultät der Universität Halle im Jahre 1834 als „rector meritissimus pr
insignem eruditae antiquitatis peritiam libris aliquot editis luculenter comprobatam" durch Verlei
der Doctorwürde geehrt. — Auch gemeinnützigen Bestrebungen widmete Ranke schon da
seine Zeit und seine Kraft. Unverdrossen unterzog er sich der mühsamen Arbeit der Anfert
eines Katalogs der in dem Cythergewölbe der St. Servatii-Kirche in Quedlinburg aufbewahrten
thümer und erwarb sich dadurch den Dank der ihm vorgesetzten Regierung. Verdient um die
Quedlinburg und deren Bewohner machte er sich, abgesehen von der Hebung des Gymnasiums
seine directoriale Wirksamkeit, durch die Vereinigung der vielen daselbst für sich bestehenden Bü
Sammlungen zu einer Stadt-Bibliothek, sowie durch seine Mitwirkung sowohl zur Gründung de
dem Jahre 1833 in dortiger Stadt bestehenden literarischen Vereins, als auch durch seine rege T
keit für dessen gedeihliche Förderung. — Kein Wunder, dass er sich die Achtung und die Ne
der Einwohner Quedlinburgs, denen er schon durch seine Verheirathung näher getreten war, in h
Grade erwarb, zumal er ihnen die Freude machte, dann und wann auch die Kanzel ihrer Stadtk
zu besteigen. Gleich hier sei erwähnt, dass von 8 Kindern, 3 Söhnen und 5 Töchtern, mit denen
Ehe gesegnet war, nur ein Sohn und vier Töchter ihn überlebten. Zwei Söhne und eine Tochter
er in der Blüthe ihrer Jahre. Zu seinem grossen Schmerze entriss ihm der Tod 1867 auch seine
in sich gekehrte Gattin, nachdem ihr noch die Freude geworden, das 25jährige Director-Jubiläum
geliebten Mannes zu erleben. — Seine Predigten wurden gern gehört. Auch später bestieg er
zuweilen die Kanzel. Auf den Wunsch seiner Freunde hat Ranke eine Predigt drucken lassen,
er als Greis im Jahre 1872, wo er mit seinem Bruder Leopold seine thüringische Heimat besch
in seiner Vaterstadt Wiehe gehalten hat. Es ist eine Predigt über die Speisung der 4000 nac
Evangelium Marci 8, 1—9. — Gern hätten es die Quedlinburger gesehen, dass das weit üb

Decennium zwischen Ranke und ihnen zum Besten der Stadt und des Gymnasiums bestandene glück-
liche Verhältniss seinen Fortbestand gehabt hätte. Allein es war anders beschlossen.

Zwölf Jahre seines kräftigsten Mannesalters, erfolgreicher Lehrwirksamkeit, darunter sechs der
Rectorialen, gewidmet, lagen hinter ihm; sein Name als Gelehrter, Schulmann und Pädagog war in
weiteren und ferneren Kreisen bekannt geworden, als durch den Oberschulrath F. Kohlrausch, der
im vormaligen Königreich Hannover das höhere Schulwesen zu der Zeit leitete, der ehrenvolle Ruf an
Ranke erging, das durch den Tod des zeitherigen Directors (des als Gelehrten und Schulmann hoch-
angesehenen Aug. Grotefend) erledigte Directorat des Göttinger Stadt-Gymnasiums zu übernehmen.
Mit Wehmuth schied er von Quedlinburg, dessen Einwohner mit rührender Anhänglichkeit an ihm
hingen und noch bei seinem Abgang durch Widmung eines goldenen Pokals ihn ehrten, und trat
Ostern 1837 sein neues Amt an, von den Behörden des neuen Vaterlandes, dem er sich zugewandt
hatte, mit dem entgegenkommendsten Vertrauen beehrt. — Vorläufig fand Ranke in seinem neuen
Wirkungskreise in der Durchführung dessen, was Grotefend mit Besonnenheit und Energie unter-
nommen und angebahnt, eine seine intellectuellen Kräfte und pädagogische Thätigkeit schon hin-
reichend in Anspruch nehmende Aufgabe. Wie sehr er den von Anfang an von oben her in ihn gesetzten
Erwartungen entsprochen, beweist, dass er „in Anerkennung seiner ausgezeichnet nützlichen Dienst-
leistungen“ als Göttinger Gymnasial-Director bereits im Sommer des folgenden Jahres (1838) von dem
Königlich Hannoverschen Ministerium der geistlichen und Unterrichts-Angelegenheiten zum Mitgliede
der dortigen Wissenschaftlichen Prüfungs-Commission für die beiden Jahre vom 1. Juli 1838 bis dahin
1840 ernannt wurde. Damit war die von Kohlrausch ihm von Anfang an neben seiner amtlichen
Wirksamkeit als Gymnasial-Director der Universitätsstadt Göttingen zugedachte Mitwirkung zur Heran-
bildung eines tüchtigen Gymnasiallehrerstandes im Königreich Hannover angebahnt. Was aber Kohl-
rausch erstrebte, war die mit Rankes Stellung als Gymnasial-Director verbundene Errichtung eines
pädagogischen Seminars zur practischen Durchbildung der studirten Lehrer. Zunächst wurde durch
Kohlrausch' Vermittelung ein solches an der altberühmten Georgia Augusta vorläufig eingerichtet
und Ranke einstweilen die Leitung desselben, d. h. die practische Ausbildung einiger Schulamts-
candidaten, auf die Zeit zweier Jahre, von Michaelis 1838 bis dahin 1840, übertragen. Da er das in
ihn gesetzte Vertrauen rechtfertigte, wurde er, ohne aus seiner Stellung als Vorsteher des Göttinger
Gymnasiums auszuscheiden, auf Antrag des Universitäts-Curatorii den 15. Juni 1841 zum ordentlichen
Professor in der philosophischen Facultät auf dortiger Universität ernannt. Als solchem wurde ihm
zugleich neben der ferneren Mitgliedschaft an der Wissenschaftlichen Prüfungs-Commission die bisher
ihm einstweilen geführte Leitung des pädagogischen Seminars, welches nunmehr als akademische
Anstalt fortbestehen sollte, definitiv übertragen. Ranke fiel damit eine sehr einflussreiche und dank-
bare Wirksamkeit zu. Mit gewohntem Eifer in seinem Berufe nahm er sich der jungen Seminaristen,
ehe an seinem Gymnasium unter seiner Aufsicht und Leitung practisch das Unterrichten lernen
wollten, an, besuchte fleissig die von ihm denselben am Gymnasium zugewiesenen und von ihnen er-
theilten Lectionen, machte sie in der wohlwollendsten Weise auf die in der Handhabung der Disciplin
oder Ertheilung des Unterrichts hervortretenden Mängel aufmerksam und besprach in seiner Wohnung,
wo sie regelmässig jeden Sonnabend Nachmittag zu einer bestimmten Stunde zur Sitzung sich ver-
sammelten, mit Milde und Nachsicht kritisirend und mit Lebhaftigkeit ermunternd, sowohl die Methode
des Unterrichts und ihr Verfahren in der Handhabung der Disciplin, als die von ihnen angefertigten
Arbeiten über Themata pädagogischen Inhalts. Seine neben der Erfüllung seiner Hauptaufgabe her-
gehende Lehrthätigkeit an der Universität, darauf berechnet, nach Otfried Müllers im Jahre 1840
erfolgtem Ableben einigen Ersatz zu schaffen durch Heranziehung junger philologischer Lehrkräfte,
war nur den kurzen Zeitraum eines Jahres dauern. Sie führte ihn zum tieferen Studium der ersten
Anfänge der griechischen Literaturgeschichte. Als Frucht desselben liegen vor die drei in Göttingen
von ihm verfassten und herausgegebenen Schriften: „de Hesiodi Operibus et Diebus“, Göttingen 1836,
„Hesiodi quod fertur scutum Herculis“, Quedlinburg nnd Leipzig 1840, und „Historische Studien“,
Göttingen 1840. Sie sind ein schätzbares Denkmal seiner geistigen Regsamkeit und seines Fleisses.

Eine bedeutende Aufgabe schulmännischer Wirksamkeit fiel Ranke zu, als ihm Ostern 1842
das Directorat des hiesigen Königlichen Friedrichs-Wilhelms-Gymnasiums und der mit diesem ver-
bundenen zwei Anstalten, der Königlichen Real- und der Elisabeth-Schule, übertragen wurde. Das mit
denselben verbundene Pensionat war, als Ranke eintrat, bereits factisch eingegangen; es wurde jetzt
definitiv aufgehoben. Die Aufgabe, die drei in stetem Wachsthum begriffenen Anstalten zu leiten,
war gross und schwierig. Ranke unterzog sich ihr mit frischem Muthe, von Gottvertrauen und
hoher Liebe zur Jugend beseelt, von jugendlicher Begeisterung für sein Amt erfüllt, mit selbstloser
Treue und rastlosem Eifer. Kam er auch vielleicht an Entschiedenheit und unerschütterlicher Festig-
keit des Willens seinem Vorgänger im Amte nicht gleich, so besass er auf der anderen Seite eine
bewundernswürdige Regsamkeit und Elasticität des Geistes, mit welcher sich eine natürliche Liebens-

würdigkeit, Milde und herzgewinnende Freundlichkeit verband. Um nicht auf einmal eine zu au
dehnte und umfangreiche Verwaltung zu übernehmen, überliess er während des ersten Semesters
seinem eigenen Wunsche und mit höherer Genehmigung die Direction der Real- und Elisabethsc
den Professoren Kalisch und Müller. Erst am Ende des Sommerhalbjahrs 1842 ging die Direc
auch dieser Anstalten auf ihn über. Zugleich wurden Bestimmungen über das Verhältniss getro
in welchem die genannten ersten Lehrer der Real- und der Elisabethschule als Directorial-Gehülfe
ihm und den Anstalten stehen sollten. Die Zahl der Rankes Direction anvertrauten Schulen
mehrte sich um noch eine, als zu Michaelis 1843 die zur Realschule gehörigen Elementarklassen
dieser getrennt und in eine abgesonderte, für sich bestehende Vorschule für das Friedrich-Wilhe
Gymnasium und die Realschule verwandelt wurde. — Es kann nicht die Aufgabe dieser Zeilen sein
Art und Weise, wie Ranke sein Amt führte, zu schildern oder einen Ueberblick über die Gesch
der vier Anstalten während seiner Direction zu geben. Kurz nur wollen wir hinweisen auf e
Züge seiner amtlichen Thätigkeit, welche besonders geeignet sind, uns sein Bild zu vergegenwärt
Wer gedächte nicht gern der anregenden und begeisterten Ansprachen, die er in allen vier Sch
oft unmittelbar nach einander hielt, bei der Eröffnung oder dem Schlusse des Unterrichts zu An
und Ende eines Quartals oder auch Semesters, oder der Reden, mit welchen er im Gymnasium u
der Realschule die Abiturienten entliess, oder seiner Theilnahme an den Schulfesten! Wer dankte
nicht noch heut für die Sorge, die er einst trug für eine angemessene Besoldung der Lehrer un
die Gründung der gemeinsamen Wittwenkasse! Wer erinnerte sich nicht der entgegenkomm
Freundlichkeit, mit der er die Lehrer an seine Person fesselte! Unermüdlich thätig, der Erste
Letzte, fast die ganze Dauer des Unterrichts über bald in dieser, bald in jener Anstalt sichtbar, erle
er in den Zwischenpausen in seiner schnellen Weise tausenderlei Fragen, welche Lehrer oder Sch
an ihn zu richten hatten. Während des Unterrichts sich selten Ruhe gönnend, besuchte er, von
Anstalt zur andern gehend, gern und oft die Unterrichtsstunden der Lehrer und hatte nach dem Be
für einen jeden unter ihnen ein Wort der Anerkennung oder des Tadels. Besonders angelegen
er sich die Anleitung der Probe-Candidaten und neu eintretenden Lehrer sein. Sein Verhältni
den Schülern und Schülerinnen war ein liebevoll freundliches, herzliches. Getragen wurde es
den Geist der Pietät, den er selbst in hohem Grade besass und vornehmlich durch die Religion b
war auch den jugendlichen Gemüthern einzupflanzen. Auf die Erhaltung des Zusammenhangs, in we
die von ihm geleiteten Anstalten zur Dreifaltigkeitskirche standen, legte er einen hohen Werth
keinem Sonntage versäumte er den Morgengottesdienst um 8 Uhr in der genannten Kirche. N
liess er die Feier des Reformationsfestes in derselben hingehen, ohne ihr beizuwohnen und mit L
und Schülern, denen auch die Lehrerinnen und Frauen der Lehrer sich anschlossen, gemeins
Verbindung mit dem Gottesdienste die Feier des heiligen Abendmahls zu begehen. Diese Kirc
der er mit ganzer Seele hing, war es auch, in welcher er bei der Säcularfeier des Todes Joh
Heckers am 24. Juni 1868 selbst von der Kanzel herab, die er in Berlin sonst nicht bestie
einer Schaar von gegen 70 Lehrern und 2350 Schülern und Schülerinnen und hohen Gästen die
rede hielt. Besonders am Herzen lag ihm der Kindergottesdienst, zu welchem er 25 Jahre la
sonntäglich erst in der Aula des Gymnasiums, später, als in dem Saale der Realschule eine
erbaut worden war, auch in diesem die jungen Schüler und Schülerinnen seiner Anstalten versa
Aeltere Schüler unterstützten ihn hierbei, zum Theil auch Lehrer und Lehrerinnen, in der Beau
gung und Unterweisung der Kleinen. Einen hohen Werth legte er auch auf die gemeinsamen And
der Lehrer und Schüler, mit welchen wenigstens im Gymnasium und in der Realschule, die da
Versammlungssaal darboten, alle Montag Morgen der Unterricht eröffnet wurde. Gemeinsamer
Schrifterklärung und Gebet machten die Hauptbestandtheile desselben aus. Auch an den übrigen
wurde in den einzelnen Klassen für sich der Unterricht mit Gesang und wohl auch Gebet be
eine Zeit lang derselbe auch Sonnabends damit geschlossen. Mit Vorliebe gab er den Religionsun
in der obersten Klasse sowohl des Gymnasiums, als der Real- und Elisabethschule, wobei es ih
darauf ankam, den religiösen Sinn der Jugend anzuregen und zu beleben, als in das tiefere Ver
niss der Glaubenswahrheiten einzuführen. Nächst diesem war es die Lectüre des Sophokles
Prima des Gymnasiums, welcher er sich mit Begeisterung hingab. Mitunter ertheilte er auch latei
Unterricht in der Prima der Realschule und deutschen, archäologischen oder geographischen
ersten Klasse der Elisabethschule. All sein Unterricht war anregend und sittlich veredelnd. Die
sittlich zu fördern, ja auch nur in ihrer Mitte zu weilen, war ihm eine Freude. Nirgends a
ihm wohler, als unter den kleinen Schülern der Vorschule. — Auch die körperliche Bildung
anvertrauten Schüler lag ihm am Herzen. Er interessirte sich auf das Lebhafteste für den
schaftlichen Turnunterricht des Gymnasiums und der Realschule; durch begeisterte Reden bei
öffnung und dem Schlusse des Turnens in der Hasenhaide, sowie durch häufige Besuche de
stunden suchte er die Liebe der Jugend zum Turnen anzufeuern.

Trotz seiner vielen Geschäfte behielt Ranke noch Zeit, sich auch über das Gebiet der Schule ausgehenden Bestrebungen zu widmen. Er war lange Zeit Mitglied des Gemeinde-Kirchenraths der ifaltigkeitskirche, gehörte dem Central-Ausschuss für innere Mission, dem Curatorium des Paulinums, e Vorstande der preussischen Hauptbibelgesellschaft, dem Curatorium des Grünen Hauses an. Für ls, was die Förderung des Reiches Gottes anging, hatte er ein lebendiges Interesse. Dabei verlässigte er die anderen Beziehungen nicht. Er war ein eifriges Mitglied der griechischen Gesellft und des Gymnasial- und Realschullehrer-Vereins. Die Conferenzen der Directoren der Berliner mnasien und die jährlichen Versammlungen früherer Schüler des Gymnasiums besuchte er regelmässig. einem Kreise früherer Schülerinnen der Elisabethschule hielt er anregende und mit Begeisterung enommene Vorlesungen über Kunstgeschichte. In dem Kreise seiner Familie nahm er die Beftigung mit dem Italienischen, die er in Halle begonnen hatte, wieder auf, zur Vorbereitung einer e nach den Stätten antiken Lebens, die ihn in den letzten Jahren als ein Lieblingswunsch beschäf. Rein wissenschaftlich war seine 1844 erschienene „dissertatio de Aristophanis nubibus". Die in ein tagende Philologen-Versammlung begrüsste er mit einer „de Xenophontis vita et scriptis" geschrieen Abhandlung. Seinem Collegen und Freunde Meineke setzte er ein Denkmal durch die ssung eines Lebensbildes des Verewigten. Noch kurz vor seinem Tode erschien seine Biographie Sophokles in neuer Auflage.

An Anerkennung seines rastlosen Wirkens für Schule und Wissenschaft, Kirche und Staat he es Ranke wenigstens am Abend seines arbeitsamen Lebens nicht. Schon seit 1845 trug er den ten Adler-Orden 4. Klasse; 11 Jahre später, am 18. Januar 1856, wurde ihm der rothe Adler-Orden lasse mit der Schleife verliehen. Als er im Jahre 1867 unter der Theilnahme seiner vielen Freunde Verehrer das 25jährige Jubiläum seines Berliner Directorats feierte, übersandte ihm die theologische ultät der Universität Göttingen das Ehrendiplom eines Doctors der Theologie, eine Auszeichnung, welche er höchsten Werth legte. In demselben Jahre erhielt er in Anerkennung seiner entgegenmenden Freundlichkeit gegen hospitirende schwedische und norwegische Gelehrte und Schulmänner Ritterkreuz des Nordstern-Ordens. Ueberströmende Dank- und Liebeserweisungen wurden ihm iler Feier seines 50jährigen Lehrer-Jubiläums am 11. April 1875 zu Theil. Bei dieser Gelegenheit e ihm der Adler der Ritter des Königl. Hausordens von Hohenzollern verliehen.

Im Jahre 1874 unternahm Ranke mit den Seinen eine Reise nach Italien. Begeistert und voll rden Eindrücken des Erlebten kehrte er zurück. Aber bald erkrankte er bedenklich an einer enfellentzündung. Seit dieser Zeit war seine Gesundheit und Frische gebrochen. Dennoch liess Gewöhnung an Arbeit und rastlose Thätigkeit, wie seine selbstlose Hingebung an seinen der Erng der Jugend gewidmeten Beruf den Gedanken, den Abend seines Lebens in stiller Zurückzenheit vom Amte im Schoosse der Familie zu leben, nicht aufkommen. Scheinbar genesen und erneutem Eifer seine Directorialgeschäfte wieder aufnehmend, erlitt er im Februar 1876 einen fall der tückischen Krankheit, welche schon am 29. März sein Ende herbeiführte. Die Dankbarkeit Liebe ganzer Generationen, welche ihm von der seinem Herzen so nahe stehenden Dreifaltigkeitse aus das letzte ehrenvolle Geleite gab, folgt ihm weit über das Grab hinaus. Sein Andenken auch unter uns in Ehren und in dankbarer Erinnerung bleiben.

2. Am 10. April geruhten Seine Majestät der Kaiser und König den Unterzeichneten, vorher tor der Luisenstädtischen Gewerbeschule hierselbst, zum Director der vereinigten Anstalten des rich-Wilhelms-Gymnasiums, der Königlichen Realschule und der Vorschule zu ernennen. Am esselben Monats wurde derselbe von dem Königlichen Provinzial-Schulrath Herrn Dr. Klix in gnwart der sämmtlichen Lehrer und Beamten der drei vereinigten Anstalten sowie der Schüler der n Klassen des Gymnasiums und der Realschule feierlich in sein Amt eingeführt.

Die Königliche Elisabethschule erhielt in der Person des Professors Dr. Schönermark einen en Director.

3. In das Lehrer-Collegium des Gymnasiums trat zu Ostern v. J. als neunter ordentLehrer der frühere Hülfslehrer Ignaz Decken ein. — Als Hülfslehrer waren beschäftigt die amts- und Probe-Candidaten Dr. Bernhard Wegener, Dr. Max Schmidt und seit Michaelis Dr. Ludwig Mann. — Bei einigen nothwendig werdenden Vertretungen leisteten der Oberlehrer Buchholtz, der Lehrer an der Luisenstädtischen Realschule Dr. Robel, sowie die Schulamtsdaten Dr. Wegener und Schoenflies Hülfe. — Dr. Wegener nimmt seit Michaelis v. J. an Cursus in der Central-Turnanstalt theil. — Mitglieder des unter der Leitung des Professors llbach stehenden mathematischen Seminars waren im Sommersemester die Schulamts-Candidaten lf Wronsky, Raphael Heyden und Arthur Schoenflies, im Wintersemester die Schulamtsdaten Arthur Schoenflies, Richard Heyne, Paul Gerber und (vom 1. Januar c. ab) rt Böhm. Der Schulamts-Candidat Rath konnte den Uebungen des Seminars nur kurze Zeit hnen.

Während des ganzen Schuljahres musste leider Professor Zumpt aus Gesundheitsrücksich
beurlaubt werden. Er hat während dieser Zeit zu unserm Bedauern sich nicht so weit gekräftigt,
seine Amtsthätigkeit wieder aufnehmen zu können, sondern tritt mit dem 1. April in den erbete
Ruhestand. August Wilhelm Zumpt, der Sohn eines Baurathes, ist im Jahre 1815 zu Königsb
in Preussen geboren. Er besuchte zuerst das Gymnasium zu Elbing, dann, nach der Versetzung sei
Vaters nach Frankfurt a. O., vom 10. bis 17. Lebensjahre das Gymnasium dieser Stadt, das unter
Leitung des gelehrten Directors Poppo sich eines grossen Rufes erfreute. Im Jahre 1833 verliess
mit dem Maturitätszeugniss No. I. diese Anstalt und studirte bis Ostern 1836 in Berlin klassis
Philologie. Während dieser Zeit lebte er im Hause seines Oheims und späteren Schwiegervaters,
berühmten Philologen C. G. Zumpt, durch den er die tiefsten Anregungen für sein ganzes Le
empfing, „cui tantum debeo", sagt er selber in seiner Inauguraldissertation, „quantum praeter pare
nemini". Ausser diesem rühmt er als seine Lehrer vorzüglich Böckh und Lachmann, nächst di
Schleiermacher, Trendelenburg und Ludwig Ideler. Im August des Jahres 1836 ward er
Grund der Dissertation: „Observationes in Rutilii Claudii Namatiani carmen de reditu suo" von
philosophischen Fakultät der Berliner Universität zum Dr. phil. promovirt. Das Probejahr absolv
er an unserm Gymnasium, trat Neujahr 1837 in das damals von Böckh geleitete pädagogi
Seminar ein und ward bald darauf Adjunctus am Königlichen Joachimsthalschen Gymnasium, in wel
Stelle er ein Jahr lang, bis Ostern 1838, verblieb. Von Ostern 1838 bis Ostern 1851 war er Lehrer
Friedrich-Werderschen Gymnasium. Ostern 1851, nach dem Tode des Professors Bötticher,
er an das Königliche Friedrich-Wilhelms-Gymnasium berufen und am 24. April desselben Jahres
Director Ranke in sein neues Amt eingeführt. Seitdem hat er an unserer Anstalt vorzugsweise
lateinischen Unterricht in der Ober- und Unter-Prima ertheilt; mit welchem Erfolge, lebt in den d
baren Herzen der zahlreichen Schüler, die seinen Unterricht genossen haben, in welchem in sel
Weise die Fülle reichen und höheren Wissens mit Klarheit und liebevoller Freundlichkeit sich
einigten. Die grosse Zahl seiner dem römischen Alterthum angehörenden wissenschaftlichen Arb
hier aufzuführen, verbietet der Raum; sie reihen seinen Namen denen der tüchtigsten Philol
unserer Zeit an. Unser Dank und unsere besten Wünsche begleiten ihn.

4. Im Lehrer-Collegium der Realschule ist nur in sofern eine Veränderung eg
treten, als der frühere Hülfslehrer Dr. Victor Schemmel als neunter ordentlicher Lehrer angest
und Lic. Dr. Friedrich Kirchner in die achte Stelle aufgerückt ist. Das Probejahr vollendet d
Schulamts-Candidat Dr. Eugen Weckwarth. Einen zu militärischen Dienstleistungen auf kurz
abberufenen Lehrer der Anstalt vertraten Mitglieder des mathematischen Seminars.

5. Im Lehrer-Collegium der Vorschule ist im Laufe dieses Schuljahres eine Veränd
nicht eingetreten.

6. Schulfeierlichkeiten. Am Sedantage machte das Gymnasium einen Ausflug
Sacrow; in der Realschule fand ein Schulactus statt, bei welchem der ordentliche Lehrer Dr. Ul
Müller die Festrede hielt. Beim Reformationsfeste hielten die Festreden im Gymnasium der ordentl
Lehrer Decken, in der Realschule der ordentliche Lehrer Dr. Stäckel; die vom Magistrat ges
Denkmünzen wurden dort dem Primus omnium Paul Fritze, hier dem Ober-Primaner Ot
Heyroth eingehändigt; ausserdem erhielt in der Realschule der Primus omnium Oscar Ker
Buch aus dem Ritter'schen Legat. Am Geburtstage Sr. Majestät des Kaisers werden im Gymn
der ordentliche Lehrer Dr. Schneider, in der Realschule der ordentliche Lehrer Dr. Stäckel
der Vorschule der Oberlehrer Dr. Schnell die Festrede halten.

7. Die Lehrerwittwen-Kasse des Königlichen Friedrich-Wilhelms-Gymnas
der Königlichen Real-, Elisabeth- und Vorschule besass beim Abschluss des Jahres 18
Hypothek von 21,000 Mark, ausserdem in Werthpapieren 24,900 Mark und einen Baarbestan
1355 Mark 70 Pf., zusammen also 47,255 Mark 70 Pf.; ihr Vermögen hat sich demnach um 1627 Mark
vermehrt. Die Zahl der Wittwen hat sich von 16 auf 17 vermehrt. Die revidirten Statut
Lehrerwittwen-Kasse sind unter dem 25. November 1876 von den Herren Ministern des Innern
geistlichen etc. Angelegenheiten bestätigt worden.

Der Verein der ehemaligen Schüler der Königlichen Realschule hat auch im vergan
Jahre der Wittwenkasse 210 Mark zur Vertheilung an die Wittwen der Realschule überwiesen u
dadurch zu herzlichem Danke verpflichtet.

Auch die abgehenden Zöglinge der Realschule sind der schönen Sitte treu geblieb
Anstalt ihre Dankbarkeit durch Liebesgaben an die Wittwenkasse zu beweisen. In dieser Weise
im Laufe des Jahres 1876 20 Mark: F. Warncke, A. Parrisius; 15 Mark: H. Bargou, M. Bau
10 Mark: O. Unglaube, E. Röding, H. Grundtner, G. Kühn, W. Schultz, H. v. Sanu
M. Polack, A. Matzkowski, E. Winkler; 9 Mark: M. Falk, F. Balkenholl, Levi
6 Mark: P. Limann, M. Hosemann, O. Schultze, M. Bente, H. Levin, W. Grani

tto, F. Wagner; 5 Mark: M. Baltz, M. Denk, R. Dietrich, E. Rohr, P. Böhm; rk: A. Kosbahn, F. Grossmann, O. Standfuss, W. Telschow, C. Valenthien, euber, W. Peters, R. Hohmann, W. Hartung, R. Schubert, G. Burgheim, A. Körber, lmar, M. Derhorst, P. Klette, C. Leitner, P. Meissner, O. Büchtemann, G. Gehricke, reund, F. Mahlo, F. Oertel, O. Altmann, O. Bache, Kinzelmann, Pape, F. v. Heuduck, tto, O. Andrée, H. Urban, R. Sachs, R. Dinglinger, G. Menningen, C. Haase, aurent, R. Steinberg, zusammen 368 Mark.

8. Das Schülerstipendium des Gymnasiums, nach den Statuten dazu bestimmt, dürftige würdige Zöglinge, besonders der oberen Klassen, zu unterstützen, wobei ganz oder halb ver- bei sonst gleichen Verhältnissen jederzeit den Vorzug haben sollen, hat in dem Zeitabschnitt, den wir hier zu berichten haben (vom 1. März 1876 bis zum 20. Januar 1877), sich in erfreulicher weiter entwickelt. Es gingen ein:

A. Aus dem Königlichen Hause: 30 Mark von Sr. Kaiserl. Königl. Hoheit dem Kron- n; 30 Mark von Ihrer Kaiserl. Königl. Hoheit der Frau Kronprinzessin. B. An anderweitigen mässigen Beiträgen: 150 Mark von dem Herrn Geh. Kommerzienrath von Krause; rk von der Frau Wittwe Clara Lange; 30 Mark von den Herren Geh. Kommerzienrath hwartzkopff, Weingrosshändler Abesser; 20 Mark von Frau Stadtrath Deibel; 15 Mark von erren Dr. Fr. Kapp, Kunstmaler von Heyden; 12 Mark von den Herren Stadtrath Dr. Loppe sen, Oberlehrer Dr. Badstübner; 10 Mark von den Herren Dr. med. Jacobi, Apotheken- r von Gusnar; 9 Mark von Frau von Loeper geb. von Holleben; 6 Mark von den Herren ann Solf, Ober-Consistorialrath Hermes, Kaufmann Meyer, Geheimrath Laden, Kaufmann nann, Professor Dr. Imelmann, Hoflieferant Hartung, Geh. Sanitätsrath von Steinrück, ungsrath Feeder, vereideter Makler Fridberg, Ober-Primaner Kahle, Unter-Secundaner Kahle, ungs-Geometer Vielitz; 3 Mark von den Herren Rentier Kleinecke, Geh. Kanzleirath Hufnagel, ngenieur Cohen. C. An ausserordentlichen Beiträgen: 72 Mark aus Schüler-Beiträgen; rk von dem Verein ehemaliger Schüler des Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums; 40 Mark von zwei hen Gymnasiallehrern; 24 Mark von Herrn Apotheker Rathke; 11 Mark 95 Pf. von den rn der UIIIA.; 5 Mark 66 Pf. von den Schülern der UIIIB.; 4 Mark von den Schülern der 25 Pf. für ein Exemplar der von Herrn Professor Böhm im Jahre 1862 gehaltenen Rede; k 50 Pf. bei Gelegenheit der Sedanfeier gesammelt.

Durch diese Gaben, für welche wir unsern besten Dank aussprechen, hatte der Kapitalbesitz ipendiums von neuem eine nicht unbeträchtliche Steigerung erfahren, so dass es möglich war, eräusserung aller Werthpapiere, deren Nominalbetrag auf 19,825 Mark sich gehoben hatte, eine centige erste Hypothek von 21,000 Mark zu erwerben und diese Summe fast ganz aus den der Stiftung zu decken. Es hat dieser Umstand wesentlich dazu beigetragen, den zu Stipendien dbaren Zinsbetrag binnen wenigen Jahren von 600 Mark auf 1050 Mark zu erhöhen.

9. Aus dem Rankefonds, zum Andenken an das 50jährige Lehrer-Jubiläum des Directors gegründet, werden in diesem Jahre zum ersten Male Prämien an Abiturienten des Gymnasiums rtheilung kommen. Das Kapital beläuft sich jetzt auf 2100 Mark. Herr Professor Dr. Als- veranstaltet am 14. März dieses Jahres ein Concert, dessen Ertrag für den Rankefonds be- ist.

10. Ueber die Universitäts-Stipendien des Gymnasiums bemerken wir, dass wir aus nds jährlich neun Stipendien mit je 150 Mark, jedes auf drei Jahre, und ein einmaliges Geschenk enfalls 150 Mark zu vergeben haben, dass aus dem Oelrichs'schen Stipendienfonds 1) einem die Studirenden jährlich ein Viaticum von 60 Mark 75 Pf. und 2) einem Schüler des Gymnasiums, die beste, selbst ausgearbeitete lateinische Rede beim Abgange öffentlich hält, auf zwei Jahre endium von 60 Mark jährlich gewährt wird, und endlich, dass das Nolte'sche Stipendium im en Betrage von 244 Mark 88 Pf. von einem Rathe des Königlichen Provinzial-Schul-Collegiums von ihm zu bestimmende Zeit vergeben wird. Von den erstgenannten neun Stipendien kommen edigung eins am 1. April und eins am 1. October d. J., fünf am 1. April k. J., eins am und eins am 1. October 1879; das Oelrichs'sche Stipendium wird am 1. April 1878 und das he am 1. October 1879 vacant.

11. Das Schülerstipendium der Königlichen Realschule, das bestimmt ist, würdige besonders Primaner, noch auf der Schule zu unterstützen, besass am Ende des Jahres 1876 in apieren 5250 Mark und ausserdem 41 Mark 82 Pf. baar und konnte 215 Mark 99 Pf. für seine verwenden.

12. Der Stipendienfonds der Königlichen Realschule, der abgegangene Zöglinge talt bei ihren Studien auf Akademien und Universitäten unterstützt, besass am Ende des 1876 eine 5½ % tragende erste Hypothek von 42,000 Mark und ausserdem 1852 Mark 51 Pf.

baar. Die Einnahmen desselben setzten uns in den Stand, 2525 Mark (einschliesslich 275 Mark a dem Max Schwabe-Stipendium) zu Stipendien zu verwenden, und zwar zu Gunsten der Studios Max Sprenger, Hermann Schulze, Emil Braasch, Hermann Hentig, Paul Kopp Franz Moewes, Max Polack, Alfred Pippow und des Bau-Akademikers Alexander de Barre. Das Kapital hat sich dabei um 1833 Mark 98 Pf. vermehrt.

Zu diesen Leistungen ist der Fonds theils durch seine ihm treu gebliebenen alten Freun theils auch durch einige neu hinzu getretene befähigt worden. Es wurden nämlich eingezahlt:

I. An jährlichen Beiträgen, welche statutenmässig auch zu Stipendien verwendet wer dürfen: A. Aus dem Königlichen Hause: 216 Mark von Sr. Königlichen Hoheit dem Prin Georg von Preussen. B. Von anderen Wohlthätern: 150 Mark als achte Gabe von He Banquier W. Borchert, Herrn Fabrikbesitzer und Akademiker Dr. W. Siemens und Frau Dr. Sc mann, geb. Pagenstecher, als sechste von Herrn Stadtverordneten Halske; 75 Mark als ac Gabe von Sr. Excellenz Herrn Oberst-Kämmerer Grafen von Redern und dem Director des P gogiums zu Lichterfelde bei Berlin Herrn Dr. Deter, als siebente von Herrn Geh. Kommerzien L. Schwartzkopff; 36 Mark als sechste Gabe von Herrn Fabrikbesitzer Reinhold Wolff, fünfte von Herrn Fabrikbesitzer Ernst Lietzmann und Herrn Kaufmann Rudolf Lietzma 30 Mark als achte Gabe von den Herren Banquiers Henning & König, Apotheker R. F. Dau und Rentier F. W. Jacquier in Wiesbaden, als siebente von Herrn Generalagent Preussner Herrn Geh. Kommerzienrath Dr. L. Kunheim, als fünfte von Herrn Institutsvorsteher Dr. Schnei 18 Mark als siebente Gabe von Herrn Consul Dr. H. Kunheim; 15 Mark als achte Gabe den Herren Banquier Julius Alexander, Fabrikbesitzer Fritz Jaenecke und Hofphotogr Schüler; 12 Mark als sechste Gabe von Herrn Fabrikbesitzer A. Eschwege. — II. An einmal Geschenken: 100 Mark von Herrn Brauereibesitzer Keiler in Guben; 75 Mark als dritte von Herrn Rathsmaurermeister Urban; 40 Mark von Sr. Excellenz Herrn Grafen von Malt Militsch als dritte Gabe; 15 Mark als siebente Gabe von Herrn Professor Dr. H. Gelz Basel; 10 Mark von Herrn Rentier Louis Wolff als dritte Gabe; 9 Mark 37 Pf. von dem Ter Tertianer H. Liebert; 4 Mark 61 Pf. durch Herrn Zeichnenlehrer Krause gesammelt; 3 Mark der Klasse Sexta I; 1 Mark 60 Pf. von dem Unter-Tertianer M. Karlinski. — III. Auss ordentliche Einnahmen. 30 Mark 10 Pf. für verkaufte Cigarrenabschnitte.

Indem wir jedem der oben genannten Geber auch an dieser Stelle aufs herzlichste d und auf ihre fernere freundliche Theilnahme sowie auf Gottes dauernden Segen hoffen, bemerken dass seit dem 24. November 1870, dem ersten Zahltage, bis heute schon 18,476 Mark an Stipendi diesem Fonds gezahlt worden sind.

C. Verfügungen der Behörden.

1. Das Königliche Provinzial-Schul-Collegium theilt unter dem 8. Juli 1876 (S. 5955) d Herrn Minister unter dem 30. Juni 1876 (3114 U II.) in Betreff des Ueberganges einzelner Schül einer Unterrichts-Anstalt auf die andere getroffenen Bestimmungen mit. Wir heben daraus I 1) Die Aufnahme neuer Schüler setzt die Beibringung ordnungsmässiger Abgangszeugnisse d lassenden Schule voraus; 2) in einem Zeugnisse, in dem die Versetzung des Schülers in eine Klasse oder Abtheilung bezeugt wird, ist das Datum des Conferenzbeschlusses, durch den d setzung erfolgt ist, anzuführen; 3) die blosse Erklärung der Reife für eine höhere Klasse, ob die wirklich erfolgte Versetzung constatirt wurde, hat keine Bedeutung; 4) wenn das Abgangszeu in Betreff des sittlichen Verhaltens des Schülers einen erheblichen Tadel ausspricht, so ist der Dir der Schule, in welche die Aufnahme nachgesucht wird, berechtigt, dieselbe von einer Rückfrage der Direction der entlassenden Schule abhängig zu machen und erforderlichen Falles sie nur bedingungsweise zuzugestehen; 5) jedes Abgangszeugniss, auf Grund dessen die Aufnahme in eine andere erfolgt ist, ist von dem Director der aufnehmenden Schule mit dem amtlichen Vermerk über die Aufnahme zu versehen; 6) Schüler, welche von einem als vollberechtigt anerkannten Gymnasi (bzw. Realschule 1. Ordnung) unmittelbar, ohne dass zwischen dem Abgange von der frühe dem Eintritt in die neue Anstalt eine Zwischenzeit von längerer Dauer als 6 Wochen eingetre auf ein anderes Gymnasium (bzw. Realschule 1. Ordnung) übergehen, werden ohne Erforderni Aufnahmeprüfung in diejenige Klasse und Abtheilung gesetzt, welche sie zur Zeit der Aufna der Lehranstalt, von der sie abgegangen sind, angehören würden; 7) wenn bei einem auf Grun

immungen in eine Klasse aufgenommenen Schüler sich innerhalb der ersten vier Wochen zeigt, er nicht die Reife besitzt, um dem Unterrichte in der betreffenden Klasse zu folgen, und wenn Unreife durch einen Conferenzbeschluss anerkannt ist, so hat der Director den Eltern oder deren vertretern davon Kenntniss zu geben und ihnen anheimzustellen, in die Aufnahme des Schülers in nächst niedrigere Klasse einzuwilligen, widrigenfalls die Schule jede Verantwortlichkeit für das ere Fortschreiten des Schülers ablehnen müsse.

2. Durch die Verfügungen des Königlichen Provinzial-Schul-Collegiums vom 15. Januar 1877 68) und vom 20. Februar 1877 (S. 1477) werden die Ferien für das laufende Jahr folgendermassen esetzt: 1) Osterferien: Schluss des Wintersemesters am 24. März, Anfang des Sommersemesters 5. April; 2) Pfingstferien: Schluss der Lectionen am 18. Mai, Wiederbeginn am 24. Mai; ommerferien: Schluss der Lectionen am 7. Juli, Wiederbeginn am 13. August; 4) Michaelis- en: Schluss des Sommersemesters am 3. October, Anfang des Wintersemester am 15. October; Weihnachtsferien: Schluss der Lectionen am 22. December, Wiederbeginn am 7. Januar 1878.

D. Vermehrung des Lehr-Apparates.

1. **Gymnasium.** Lehrer-Bibliothek. An Geschenken erhielt die Lehrer-Bibliothek das Königliche Provinzial-Schul-Collegium: Verhandlungen der 4. Conferenz der Gymnasial- Realschul-Directoren Schlesiens, und Schwedische, Dänische, Schottische, Norwegische Volkslieder Vorzeit, Zwei Lieder der Edda, im Versmasse der Originale übertragen von R. Warrens, 5 Bd.; dem Herrn Herausgeber: Putsche, Lateinische Schulgrammatik, herausgegeben von Dr. Alfred ottmüller; von der Wohlfahrt'schen Buchhandlung: Cornelii Nepotis liber et Curtii Rufi historiae undri Magni ed. Lattmann. — Ausserdem wurden angeschafft: Bestimmungen über den einjährig-frei- gen Dienst, Berlin 1876; Hagenbach, Leitfaden zum christlichen Religions-Unterricht, Encyclopädie Methodologie der theologischen Wissenschaften, Lehrbuch der Dogmengeschichte und Kirchen- ichte, Neue Gesammtausgabe, 7 Bd.; Oncken, Die Staatslehre des Aristoteles, 2. Hälfte; Droysen, zum 1.—4. Theil der Geschichte der Preussischen Politik; Pertz, Monumenta, tomi II. Fasc. I.; tchl, Acta societatis philologae Lipsiensis; Riemann, Gesammelte mathematische Werke ed. r, 1. Bd.; Cobet, Miscellanea critica. Lugd-Batav. 1876; Schmidt, Synonymik der griechischen he 1. Bd.; Muff, Die chorische Technik des Sophokles; Peppmüller, Ueber die Composition Klagelieder im 24. Buche der Ilias, Commentar des 24. Buches der Ilias; Corpus inscriptionum arum Vol. VI. pars I. ed. Bormann et Henzen; Sanders, Wörterbuch der deutschen Sprache, in 3 Bd; Pauly, Realencyclopädie der classischen Alterthumswissenschaft, 6 Bd.; Ritter, raphisch-statistisches Lexicon, 2 Bd.; Sachs, Dictionnaire français-allemand, 1 Bd; Schmid, clopädie des gesammten Erziehungs- und Unterrichtswesens, Bd. 1; Marquardt, Römische Staats- ltung Bd. 2. — Fortgesetzt wurden: Grimm, Deutsches Wörterbuch; Allgemeine deutsche Biogra- Wackernagel, Das deutsche Kirchenlied; Der deutsch-französiche Krieg, redigirt vom grossen alstabe; Poggendorf, Annalen der Physik; Crelle, Journal für die reine und angewandte matik; Fleckeisen und Masius, Neue Jahrbücher für Philologie und Pädagogik; v. Leutsch, ogus und Philologischer Anzeiger; Welcker und Ritschl, Rheinisches Museum; Centralblatt e Unterrichtsverwaltung in Preussen; Rössler, Zeitschrift für die preussische Geschichte und skunde; Hübner, Hermes, Zeitschrift für die klassische Philologie; Zarnke, Literarisches lblatt; Zeitschrift für das Gymnasialwesen.

Schüler-Bibliothek. In den einzelnen Quartalen des verflossenen Schuljahres wurde die r-Bibliothek von 99, resp. 87, 77 und 55 Schülern benutzt. — Neu angeschafft wurden: Freitag, s König; Fritz Reuter, Band 1—5; Geibel, Klassisches Liederbuch; Aeschylus, über- von Droysen; Giesebrecht, Geschichte der deutschen Kaiserzeit, Band 3; Curtius, Alterthum regenwart, Ephesus; Beitzke, Die Alpen; Oserbrüggen, Die Schweizer; Friedländer, geschichte Roms; Welcker, Tagebuch einer griechischen Reise; Noé, Winter und Sommer ol; Hartwig, Briefe über Tirol; Kloeden, Handbuch der Länder- und Staatenkunde von a; Kohl, Naturansichten; Barth, Reisen und Entdeckungen in Afrika; Berghaus, Grund- der physikalischen Erdbeschreibung; Vischer, Erinnerungen aus Griechenland; Schauenburg, in Central-Afrika; Reisen in den südafrikanischen Binnenländern; Die zweite deutsche Nord- t 1869 und 1870 unter Führung von Koldeway; Grimm, Vorlesungen über Goethe. — Bei rtheilung der Bücher waren thätig die Ober-Primaner Hartmann und Marcus, die Unter-

Primaner Goldschmidt, Handloike, Stobwasser, Getschmann und Hoffmann und der C
Secundaner v. Engelmann.

Die Schulbücher-Leihbibliothek verlieh 97 Schulbücher an 27 Schüler versch
ner Klassen.

Die Sammlung physikalischer Apparate wurde vermehrt durch einen Hebel
Bertram, ein kleines Kautschuck-Gebläse und durch mehrere kleine Apparate und Vorrichtungen

Für die naturhistorische Sammlung wurde angeschafft: Leutemann, Zoologi
Atlas, 1. und 2. Lief., und Naturgeschichtliche Wandtafeln, 1. Heft (Wohnungen der Thiere),
A. Henry. Geschenkt wurden vom Unter-Secundaner Rubach 60 Krystallmodelle, nach A. Kenn
Krystallformnetzen selbst gefertigt, und diverse Flussspatkrystalle.

Der historische Apparat erfuhr diesmal seine reichste Vermehrung durch die Ueberwe
der Münzsammlung des Gymnasiums, die 2186 Nummern zählt. Sie ist besonders werthvoll fü
römische Kaisergeschichte, da von Augustus bis Arcadius sämmtliche Imperatoren (mit Ausn
einiger Kaiser aus der Zeit der 30 Tyrannen) durch Silber- und Kupfermünzen vertreten
weniger vollständig ist die republikanische Zeit Roms und Griechenland nur mit wenigen Exemp
betheiligt. — Von noch grösserem Werth für den Unterricht verspricht eine Sammlung von Gypsabg
historisch merkwürdiger Denkmünzen zu werden; an die Katalogisirung derselben ist eben erst
angelegt worden; doch kann schon jetzt constatirt werden, dass sowohl die deutsche Gesc
(Kaiserbildnisse, viele Erzbischöfe und Bischöfe, allerlei Reichsfürsten), wie auch ganz besonde
französische (allein 350 Medaillen aus allen Regierungsepochen Louis XIV.), auch die englische, russ
skandinavische daraus Material für den Anschauungsunterricht gewinnen werden. Bei der vorläu
Ordnung beider Sammlungen haben sich die Schüler Madel, Schendel, Hoburg, Elfert aus
Secunda und Keil, Koch, Zebrowsky und Christiani aus Unter-Secunda A. betheiligt.

Der geographische Apparat wurde mehrfach durch Geschenke bereichert; Specialk
von Grossbritannien nebst Irland, Deutschland, Frankreich sowie einen oro-hydrographischen
sämmtlich von Müller, erhielten wir durch die Güte des Königlichen Provinzial-Schul-Coll
überwiesen; Straube, Plan von Berlin, vom Verfasser; Kiepert's Atlas der alten Welt
Verleger.

Der Zeichen-Apparat wurde vermehrt durch 26 Zeichen-Vorlagen (16 Köpfe von
und Bucollet und 10 Blatt landschaftliche Originale von verschiedenen Meistern), ferner
10 werthvolle, grössere Farbendrucke landschaftlichen Inhalts, welche der Herr Lehrer Plath
Königlichen Elisabeth-Schule dem Gymnasium zum Geschenk machte.

Für die Musikalien-Sammlung wurden angeschafft: „Die Nacht", Chorlied von F. Sch
sowie Stimmen zur Motette „Laudate pueri" und zur „Antigone" von Mendelssohn und zu den Chr
„Jesus, meine Zuversicht" und „Was Gott thut, das ist wohlgethan". Geschenkt wurde von Sr. Exc
dem Herrn Minister Mozarts Werke I. 1. 2. und VII. 1.

2. **Realschule.** Lehrer-Bibliothek. Fortgesetzt wurden: Allgemeine deutsch
graphie; Revue des deux Mondes; The farthnightly Review; Zeitschrift für preussische Ges
und Landeskunde; Droysen, Geschichte der preussischen Politik; Jahrbücher des deutschen
Centralorgan für die Interessen des Realschulwesens; Schulblatt für die Provinz Brandenburg; Gi
Deutsches Wörterbuch; Wiegand, Deutsches Wörterbuch; Schiller und Lübben, Mittel
deutsches Wörterbuch; Leveer, Mittelhochdeutsches Wörterbuch; Der deutsch-französische
Generalstabswerk; Zeitschrift des statistischen Bureaus; Jahrbuch für amtliche Statistik des preu
Staats; Poggendorff, Annalen der Physik und Chemie; Braun, Klassen und Ordnun
Thierreichs; Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie; Crelle, Borchardt, Jour
reine und angewandte Mathematik; Wagner, Bericht über die Fortschritte der chemischen T
gie. — Neu angeschafft wurden: G. Voigt, Wiederbelebung des klassischen Alterthums; J.
Geschichte des deutschen Ritterordens; Diez, Romanische Wortschöpfung; Grüner, Geh
der französischen Causerie; Klein, Geschichte des englischen Dramas; Peschel, Neue
der vergleichenden Erdkunde; Groth, Physikalische Krystallographie; Roepell, Polen
Mitte des 18. Jahrhunderts; Meinecke, Die Inseln des stillen Oceans; Bestimmungen
einjährig-freiwilligen Dienst; B. de Haon, Tables d'intégrales définies; Verhandlungen der
Rechtschreibe-Conferenz nebst Erläuterungen von Raumer; Germania, Zeitschrift für deutsch
thumskunde; Burguy, Grammaire de la langue d'oïl; Wolff, Historischer Atlas; Rim
Mathematische Werke; Oncken, Oesterreich und Preussen im Befreiungskriege; Scheler
formation française des mots latins; Ayrer, Grammaire de la langue française; Grammot,
vers français et leur prosodie; Meyer's Conversations-Lexicon; Wallace, Geographische
der Thiere; Neue Jahrbücher für Philologie und Pädagogik von Fleckeisen und Masius;
Grammatik der romanischen Sprachen; Elze, Shakespeare; Girardin, Lafontaine et les

ehm, Geographisches Jahrbuch. — An Geschenken gingen ein: Pädagogisches Archiv (Forts.); errig, Archiv für das Studium der neueren Sprachen (Forts.); Richter, Der deutsche Unter- ht; Nicolai, Geschichte der neugriechischen Literatur; Menzel, Geschichten der Deutschen d Neuere Geschichte der Deutschen; Raumer, Geschichte der Pädagogik; Strauss, Leben su; Robertson, Works; Rendu, M. A. Rendu et l'université de France, De l'association nérale, De l'enseignement obligatoire, De la loi de l'enseignement, De l'éducation populaire; revallet, Origine et formation de la langue française, von Herrn Pror. Strack; Ciceronis era ed. Orelli, von Herrn Prof. H. L. Strack; Wolf, Deutsche Sagen und Märchen, von Herrn . Freytag; Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (Forts.), von den Herausgebern; tham's Allgemeine Uebersicht der Vögel, von Herren Gebr. Ulfert; Schwalbe, Wetteraberglauben; chs, Encyclopädisches deutsch-französisches Wörterbuch; Bericht über die Fortschritte der Physik rts.), von Herrn Prof. Schwalbe; Bauers Geschichte der Philosophie, bearbeitet von Kirchner; irchner, Leibniz, Sein Leben und Denken, vom Verfasser; Pressler, Deutschlands Schulreform, Herrn Dr. F. Müller; Deutsche Schulgesetzsammlung, von Herrn Dr. Ohrtmann; Rose, Hand- h der analytischen Chemie; Rammelsberg, Handbuch der Mineralchemie; Fischer, Lehrbuch mechanischen Naturlehre; Link, Die Urwelt und das Alterthum; Berzelius, Lehrbuch der emie; Verhandlungen des naturhistorischen Vereins der Rheinlande, 4 Jahrgänge, von Herrn Prof. rgmann.

Die Schüler-Bibliothek wurde in den vier Quartalen des verflossenen Schuljahres von 81, . 69, 73 und 60 Schülern benutzt. Fortgesetzt, resp. neu angeschafft wurden: Delitsch, Aus n Welttheilen; Lohmeyer, Illustrirte Monatshefte für die deutsche Jugend; v. Löher, Kretische tade; Freytag, Marcus König; Schott, Jahrhundert der Entdeckungen; Ebers, Uarda; Volk- r, Waffenschmied von Frankfurt; Pichler, Jugendschriften etc. Bei Ausgabe der Bücher waren reich die Primaner Heyroth, Müller, Wollner und der Ober-Secundaner Streitz.

Die Schulbücher-Leihbibliothek lieh 227 Schulbücher an 51 Schüler aus.

Für die chemisch-physikalische Sammlung wurden die für das Laboratorium nöthigen brauchsgegenstände an Glassachen und Reagenzien angeschafft, ferner eine Quantität Quecksilber, Inductions-Apparat neuerer Construction, ein Flaschenelement, ein Königscher Flammenanalysator Vorrichtung für Pfeifen, eine Partie kleiner Kreisel, ein Bertramscher Apparat zur Demonstration Parallelogramms der Kräfte, mehrere Messflaschen, ein Apparat zur Demonstration der Abplattung Erde, Boppsche Landtafeln.

Die Sammlung von Modellen u. s. w. zur Unterstützung des Unterrichts in der Mathe- ik und mathematischen Geographie wurde vermehrt durch die Himmelskarten von Dr. Pitschner lünchen, durch einen zerlegbaren Kegel, einen ebensolchen Cylinder und einige Modelle und Zeich- gen, die theilweise von Schülern angefertigt waren.

Die naturhistorische Sammlung erhielt von Herrn Stangen ein Exemplar von Uromastix ipes, sowie von Tetrodon Physa nebst einem Kopf von Crocodilus. Der Unter-Secundaner Herpich nkte Schädel von Mustela und Felis, der Ober-Tertianer Stiege eine westindische Baumeidechse, Unter-Tertianer Lappe einige Seethiere.

Der chartographische Apparat wurde vermehrt durch Anschaffung der Sydow'schen dkarten von Nord-Amerika, Süd-Amerika, Afrika, Australien, der Kiepert'schen von Alt-Italien und er historisch-geographischen Karten von Kiepert, der Holle'schen Karte von Alt-Griechenland und Leeder'schen von Palästina.

Für die Musikalien-Sammlung wurden angeschafft: Hauer, Salvum fac regem; Alta trinita , Chor aus dem 15. Jahrhundert; Stimmen zu Mozarts Ave verum corpus.

Dem Zeichen-Apparate wurde von dem Ober-Secundaner Meyer ein Medaillon in Gyps, Director Ranke darstellend, geschenkt; angeschafft wurden 22 Stück Ornamente in Gyps.

3. **Vorschule.** Die Schüler-Bibliothek wurde in den 4 Quartalen des verflossenen Schul- s von 27, resp. 12, 59 und 47 Schülern benutzt. Ausser der Ergänzung von 19 unbrauchbar rdenen Büchern durch neue trat eine Vermehrung der Bände von No. 696 bis 724 ein. — Die rmittel-Sammlung wurde durch zwei russische Rechenmaschinen vermehrt.

Für alle im Vorstehenden erwähnten Geschenke sprechen wir besten Dank aus.

E. Statistische Nachrichten.

Die Schülerzahl der vereinigten Anstalten betrug im Sommersemester 1932, im Winte
semester 1880. Davon kamen auf das Gymnasium im Sommersemester 658 (32 in OI., 41 in UI
47 in OII., 39 in UIIA., 40 in UIIB., 34 in OIIIA., 37 in OIIIB., 44 in UIIIA., 44 in UIIIB., 51 i
IVA., 48 in IVB., 52 in VA., 46 in VB., 51 in VIA., 52 in VIB.), im Wintersemester 636 (32 in OI
38 in UI., 50 in OII., 38 in UIIA., 32 in UIIB., 37 in OIIIA., 39 in OIIIB., 40 in UIIIA., 41 i
UIIIB., 50 in IVA., 44 in IVB., 50 in VA., 45 in VB., 52 in VIA., 48 in VIB.); auf die Rea
schule im Sommersemester 691 (37 in I., 30 in IIA., 42 in IIB1., 46 in IIB2., 51 in IIIA1., 53 in IIIA
55 in IIIB1., 56 in IIIB2., 53 in IV1., 54 in IV2., 53 in V1, 54 in V2., 52 in VI1., 55 in VI2.), i
Wintersemester 681 (34 in I., 33 in IIA, 43 in IIB1., 43 in IIB2., 50 in IIIA1., 53 in IIIA2., 52
IIIB1., 53 in IIIB2., 54 in IV1., 53 in IV2., 52 in V1., 54 in V2., 52 in VI1., 55 in VI2.); auf d
Vorschule im Sommersemester 583 (52 in IA., 52 in IB., 52 in IIA., 52 in IIB., 48 in IIIA., 48
IIIB., 47 in IVA., 47 in IVB., 48 in VA., 48 in VB., 45 in VIA., 44 in VIB.), im Wintersemester 5
(49 in IA., 48 in IB., 50 in IIA., 50 in IIB, 48 in IIIA., 49 in IIIB., 47 in IVA., 47 in IVB., 46
VA., 45 in VB., 42 in VIA., 42 in VIB.

Neu aufgenommen wurden während des Schuljahres 484 Schüler (128 in's Gymnasiu
175 in die Realschule, 181 in die Vorschule); abgegangen sind in diesem Zeitraume bis je
292 Schüler (aus dem Gymnasium 98, aus der Realsschule 80, aus der Vorschule, incl. der in's Gy
nasium oder die Realschule übergegangenen, 114); gestorben sind 4 (1 Gymnasiast und 3 Vorschül

Von den abgegangenen Schülern haben folgende die Abiturienten-Prüfung abgelegt und
Zeugniss der Reife erlangt:

I. Auf dem Gymnasium a) zu Ostern 1876: 1. Paul Wetzel (Sohn eines hiesigen Lehre
18 Jahre alt, evangelisch, 9 Jahre auf dem Gymnasium, 2 Jahre in der Prima, studirt Philolog
2. Wilhelm Schroeder (Sohn eines hiesigen Rentiers, 19 J. alt, evang., 2½ J. auf dem Gy
2 J. in Prima, studirt Philologie), 3. Johann Hermes (Sohn eines hiesigen Ober-Consistorialrath
19 J. alt, evang., 11 J. auf dem Gymn., 2½ J. in Prima, wird Forstmann), 4. Karl Peltzer, S
eines K. Obergärtners in Charlottenburg, 19 J. alt, evang., 7½ J. auf dem Gymn., 2½ J. in Pri
studirt Medicin), 5. Arnold Stechow (Sohn eines hiesigen Kammergerichtsrathes, 20 J. alt, eva
3½ J. auf dem Gymn., 2½ J. in Prima, stud. Jura), 6. Paul Spickendorff (Sohn eines hiesi
Rendanten, 18¾ J. alt, evang., 8½ J. auf dem Gymn., 2½ J. in Prima, stud. Jura), 7. Rich
Friedrich (Sohn eines hies. Obertribunalsrathes, 18 J. alt, evang., 9½ J. auf dem Gymn., 2½ J
Prima, stud. Jura), 8. Fritz Keil (Sohn eines hies. Regierungsrathes, 19 J. alt, evang., 3½ J.
dem Gymn., 2 J. in Prima, stud. Jura), 9. Julius Croil (Sohn eines hies. Registraturvorstel
19 J. alt, evang., 11 J. auf dem Gymn., 2 J. in Prima, wird Militär), 10. Eduard Friedlän
(Sohn eines hies. Rentiers, 18 J. alt, mos.. 2½ J. auf dem Gymn., 2 J. in Prima, wird Kaufma
11. Otto Remin (Sohn eines verstorb. Kaufmanns hierselbst, 20 J. alt, evang., 4½ J. auf dem Gy
2 J. in Prima, stud. Philologie), 12. Ernst von Bärensprung (Sohn eines Rittergutsbesitzers hierse
19 J. alt, evang., 6 J. auf dem Gymn., 2 J. in Prima, wird Militär), 13. Max Fricke (Sohn
hies. Hofopernsängers, 19 J. alt, evang., 11 J. auf dem Gymn., 2 J. in Prima, widmet sich dem
fache); b) zu Michaelis 1876: 1. Johann Butze (Sohn eines hies. Geh. Revisionsrathes, 19 J
evang., 10½ J. auf dem Gymn., 2 J. in Prima, stud. Jura), 2. Albert Senz (Sohn eines vers
Schulvorstehers hierselbst, 18½ J. alt, evang., 10½ J. auf dem Gymn., 3 J. in Prima, stud. J
3. Oscar Hauchecorne (Sohn des Directors der hies. Bergakademie, 19 J. alt, evang., 9½ J
dem Gymn, 2½ J. in Prima, stud. Medicin), 4. Richard Krause (Sohn eine hies Tapezirers, 21
alt, evang., 10½ J. auf dem Gymn., 2½ J. in Prima, stud. Jura), 5. Otto Lewald (Sohn eines
storb. Rechtsanwalts hiers., 19 J. alt, evang., 10 J. auf dem Gymn., 2½ J. in Prima, stud.
6. Franz Wolff (Sohn eines hies. Rentiers, 18 J. alt, mos., 9½ J. auf dem Gymn., 3 J. in P
stud. Jura), 7. Wilhelm Fiege (Sohn eines hies. Realschullehrers, 18¾ J. alt, evang., 10 J. au
Gymn., 2½ J. in Prima, stud. Medicin), 8. Oscar Kahle (Sohn eines hies. Kreisgerichtsrathes,
alt, evang., 6½ J. auf dem Gymn., 2½ J. in Prima, wird Militär), 9. Max Spiess (Sohn eine
storb. Kaufmanns hiers., 20¼ J. alt, evang., 8½ J. auf dem Gymn., 2½ J. in Prima, stud.
10. Julius Teichert (Sohn eines hies. Justizrathes, 20 J. alt, evang., 9 J. auf dem Gymn., 2½
Prima, stud. Jura), 11. Otto Birnbach (Sohn eines verstorb. Kammermusikus hiers., 21¼
kathol, 6 J. auf dem Gymn., 2½ J. in Prima, Studium unbestimmt), 12. Claude du Bois-Rey
(Sohn eines hies. Geh. Regierungsrathes und Professors, 20¾ J. alt, evang., 2¾ J. auf dem Gym

J. in Prima, stud. Naturwissensch.), 13. Johannes Wilsing (Sohn eines hies. Componisten, J. alt, evang., 1½ J. auf dem Friedrich-Wilhelms-Gymn., 2½ J. in Prima, stud. Mathematik), Paul Hoepke (Sohn eines hies. Kaufmannes, 19½ J. alt, evang., 10 J. auf dem Gymn., 2 J. in na, stud. Jura), 15. Ernst Wagner (Sohn eines hies. K. Musikdirectors, 21½ J. alt, evang., 12 J. dem Gymn., 2½ J. in Prima, stud. Mathematik).

II. Auf der Realschule a) zu Ostern 1876: 1. William Schulz (Sohn eines hies. Tischlersters, 19½ J. alt, evang., 10 J. auf der Schule, 2½ J. in Prima, widmet sich dem Baufache, geend bestanden), 2. Hans von Salmuth (Sohn eines Obersten und Brigadecommandeurs zu Magirg, 20½ J. alt, evang., 5¾ J. auf der Schule, 2½ J. in Prima, wird Militär, genügend bestanden), 'ritz Balkenholl (Sohn eines Kaufmannes in Treuenbrietzen, 19 J. alt, evang., 3 J. auf der ule, 2 J. in Prima, stud. Mathematik, genügend bestanden), 4. Max Polack (Sohn eines hies. hanikers, 18¾ J. alt, evang., 5 J. auf der Schule, 2 J. in Prima, widmet sich dem Baufache, geend bestanden); b) zu Michaelis 1876: 1. Richard Dietrich (Sohn eines hies. Rentiers, 20½ J. evang., 3 J. auf der Schule, 2 J. in Prima, stud. Chemie, gut bestanden), 2. Eugen Rohr (Sohn s Gutsbesitzers hiers., 20½ J. alt, evang., 3 J. auf der Schule, 2 J. in Prima, wird Militär, geend bestanden), 3. Alfred Parrisius (Sohn eines hies. Banquiers, fast 20 J. alt, evang., 5 J. auf Schule, 2 J. in Prima, stud. Chemie, genügend bestanden).

F. Oeffentliche Prüfungen.

Eine öffentliche Prüfung findet Freitag, den 23. März, Vormittags von 9 Uhr ab im Gymum und Nachmittags von 2 Uhr ab in der Vorschule, Sonnabend, den 24. März, von 9 Uhr ab in Realschule statt. Im Gymnasium und in der Realschule werden einzelne Klassen, in der Vorschule Klassen geprüft.

G. Benachrichtigungen.

Der Sommercursus beginnt Donnerstag, den 5. April, in der Realschule 8 Uhr, im Gymnasium Uhr, in der Vorschule 11 Uhr.

Zur Aufnahme noch einiger neuen Schüler werden am 5. April Mittags 12 Uhr bereit sein as Gymnasium der Unterzeichnete, Friedrichsstr. 41. 42, für die Realschule Prorector Strack, Kochstr. 66, für die Vorschule Oberlehrer Dr. Schnell, ebendaselbst.

Berlin, den 1. März 1877.

Kern.

154.

Schur.

CARL FRIEDRICH GAUSS.

DE INTEGRATIONE FORMULAE DIFFERENTIALIS

$$(1 + n\cos\varphi)^r \cdot d\varphi$$

HERAUSGEGEBEN VON ERNST SCHERING.

Aus den „Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen“ 1893 Nr. 15.

CARL FRIEDRICH GAUSS.

DE INTEGRATIONE FORMULAE DIFFERENTIALIS

$$(1 + n\cos\varphi)^{\nu} \cdot d\varphi$$

HERAUSGEGEBEN VON ERNST SCHERING.

Aus den „Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen“ 1893 Nr. 15.

Diese von Herrn Prof. WILHELM MEYER in den Acten der Königen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen gefundene Schrift gt nicht den Namen des Verfassers, nicht den Ort und keine t der Abfassung. Die Handschrift ist aber der von GAUSS geuchten so ähnlich, dass über den Schreiber kein Zweifel benen kann. Die am Schlusse genannte Abhandlung von KLÜGEL die dritte unter den fünf, welche die mathematischen Commenones Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis ad a. 1793 et 4 des im Jahre 1796 ausgegebenen Bandes XII ausmachen. rnach ist also die Vermuthung zulässig, daß diese Schrift in ss' Göttinger Studienzeit, von 1795 bis 1798, dem Mitgliede Gesellschaft, KAESTNER, übergeben worden ist. Mit dem in em Aufsatze behandelten Gegenstande findet sich in dem übrihandschriftlichen Nachlasse von GAUSS kein Berührungspunkt.

Prooemium. Maxima pars Calculi, qui Integralis vocatur serierum evolutione et tractatione absolvitur. Unica nimirum methodus, quam in illo praeter tentamina et differentiatione in memoriam revocato, invenies, hoc agit ut, data quantitas differen tialis in seriem expandatur terminorum, quorum singulus quilibe facile ad integrationem perducitur. In serie finita hoc modo a expressionem omnibus numeris absolutam pervenitur; series in nita, licet incognitarum relationem quaesitam minus perfecte e hibeat, modo ita procedat at adproximationi locus detur, et qu plurimis casibus apta tractatione obtinebitur, ad vulgares us sufficere, et aequationi, si qua talis revera inter variabiles prop sitas detur, aequipollere recte censetur. Est autem plerumqu propter terminorum seriem ingredientium prolixitatem et adpare tem anomaliam arduum sane negotium legem istarum expressio generali circumscribere, circumscriptam demonstratione muni utrumque imminens erroris, irrepentis ex sola coniectura produ calculo ad verisimilitatem elata, periculum, et scientia digni postulant. Exemplum eiusmodi disquisitionis sistet dissertatiunc a proposita, quae in formulae $d\varphi(1 + n\cos\varphi)^\nu$, existentibus n e numeris definitis pro lubitu adsumtis, integratione per series o solvenda versatur. Formula haec, cuius eximius est in Astrono ia physica usus, adeo gravis Ill. Eulero visa fuit, ut illi integ m Institutionum Calculi Integralis caput*) dicare nullus dubitav it. Legem ibi, licet non summa generalitate, expressam, signis in cinnioribus circumscribere, et ex genuino fonte rigida demons a tione derivare, operae pretium mihi visum est.

Praemonenda autem ante omnia quaedam, de novo sign i exhibendis serierum terminis generalibus utilissimo, brevibus ex ponam. In seriebus nimirum, inprimis complicatioribus s p accidit, ut aliam termini impares, aliam pares legem sequi vidan tur, et tunc in binas, a se invicem seiunctas dirimi soleat. Cod cum non sine prolixitate fieri possit, et, ut ita dicam, unit er expressionis, qua sola tractabilis redditur series indefinita, t la nisi aliqua ratione medela adferatur, serierum usum arctis cir um scribet limitibus. Sponte autem ex methodo, qua simplicis im quae dari potest inter terminos seriei pares et impares discr an tia, ut nimirum alteri positivi, alteri negativi sint, in ipsum te minum generalem infertur, generalior ista, quam nunc prop er conor, sese offerre videtur. Sit terminus seriei alicuius gen al $m^{\text{tus}} = Q$; si illum positivum velis existente m pari, negativ n

*) Cap. VI T. I.

mpari, hoc praefixo factore $(-1)^m$; sin contrario ordine procedere signa malis, praeposito $(-1)^{m+1}$ exhibeo *). Simili ratione, sit expressio generalis termini m^{ti} existente m pari $= P$, existente impari $= Q$, ita, ut P aliam prorsus, quam Q legem sequatur. Dico fore generatim terminum m^{tum} $\frac{1-(-1)^m}{2}Q + \frac{1-(-1)^{m+1}}{2}P$. Ex hac omnim expressione, si fuerit m numerus par, ob $(-1)^m = 1$, evadente $\frac{1-(-1)^m}{2} = 0$, et ob $(-1)^{m+1} = -1$, evadente $\frac{1-(-1)^{m+1}}{2} = 1$, eliditur pars prima, fitque altera uti fas est $= P$. Sin vero m uerit impar, cum sit $(-1)^{m+1} = 1$, adeoque $\frac{1-(-1)^{m+1}}{2} = 0$, et imul $(-1)^m = -1$ et inde, $\frac{1-(-1)^m}{2} = 1$, evanescente parte posteiore restat prior ut assumta fuit $= Q$. Ut unicum tantum exemlum adferam, ex quo notae utilitas elucescat; sumam, quod infra emonstrabitur, posse potestatem indefinitam cosinus dati cuiusdam nguli v. g. $\cos\varphi^n$ semper in seriem secundum cosinus multiplorum iusdem anguli expandi, ea tamen lege, ut ista, existente n pari, ecundum multipla paria procedat, sitque adeo terminus illius r^{tus}, iisso coefficiente, $\cos 2r\varphi$; existente autem n impari secundum multipla imparia, sitque tunc terminus eiusdem $r^{tus} = \cos(2r+1)\varphi$. unc expressio generalis sic adornari potest: fore seriei in quam os φ^n evolvitur, terminum generalem $r^{tum} = \cos\left(2r + \frac{1-(-1)^n}{2}\right)\varphi$. anifesto enim existente n pari contrahitur haec forma in $\cos 2r\varphi$, istente impari abit in $\cos(2r+1)\varphi$.

In dissertatiuncula ipsa generalem hunc notandi modum nonnisi formula finitima (§ 11) adhibui. Licet enim iam in disquisitionibus quibus ad istam pervenitur cum fructu adplicari possit, abinendum ipso censui, ne propter addenda quaedam de transmutionibus eiusmodi signorum, si in calculos ipsos ingrediantur, ad miam prolixitatem abreptus, dissertatiunculae limites excederem. tius mihi visum est, notarum eiusmodi tractationem, si calculos beant prolixos termini, quos adficiunt, et artificia, quibus ad rvandam in illis concinnitatem opus est, singulari disquisitione mplecti.

---

*) Adsensum huic signo non recusare dignatus est, quem ipsi de illo ponerem, Ill. Kaestnerus. Qua auctoritate fretus saepius iam in disisitionibus analyticis idem illud adhibui.

§ 1. Formulae propositae integratio initio quidem facillime perfici posse videtur. Potest enim quantitas data $(1+n\cos\varphi)^\nu$ secundum theorema binomiale in seriem, per successivas ipsius $\cos\varphi$ potestates integras procedentem converti. Quo facto singuli eius termini, in $d\varphi$ ducti, et ad integrationem revocati, quaesitum exhibebunt. Recte hoc quidem, verum hac via incedendo ad expressiones complicatissimas deducimur; quaelibet enim quaesitae integralis particula serie continebitur haud parum prolixa. Praestat igitur aliam sequi rationem, in ea fundatam, quod ex Trigonometria analyticae praeceptis quaelibet ipsius $\cos\varphi$ potestas exponenti integri positivi possit in seriem valde concinnam, per terminos qui solum modo cosinus multiplorum ipsius φ continent, progredientem evolvi. Ita igitur absolvetur negotium propositum, ut primo quidem $(1+n\cos\varphi)^\nu$ per seriem, secundum potestates ipsius $\cos\varphi$ procedentem, exhibeatur, mox vero, ex lege generali, ante stabilita, quilibet eius terminus in seriem novam, per cosinus multiplorum progredientem mutetur, atque colligantur demum ex omnibus hisce seriebus membra, qui eiusdem anguli cosinum continent. Series nova, eaque rite ordinata, quae, peractis hisce laboribus, exsurgit, in $d\varphi$ ducta statim ad integrationem poterit perduci.

2. Ante omnia igitur lex, qua potestas aliqua cosinus data per angulorum multiplorum cosinus exhibetur, scrutanda erit. Huius disquisitioni fundamento est formula trigonometrica elementaris, esse $\cos a\cos b = \frac{1}{2}\cos(a-b)+\frac{1}{2}\cos(a+b)$.

Sumatur iam $\cos\varphi$, quae, in $\cos\varphi$ ducta, dabit $\cos\varphi\cdot\cos\varphi$, quod productum tum, si revera multiplicemus, per $\cos\varphi^2$, tumsi per formulam modo expositam in summam solvamus, per $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\varphi$ exhibebitur. Est igitur $\cos\varphi^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi$. Simili ratione ad potestates altiores provecti, sensim formulas eruimus sequentes:

$$\cos\varphi^3 = \tfrac{3}{4}\cos\varphi + \tfrac{1}{4}\cos 3\varphi;$$

$$\cos\varphi^4 = \tfrac{3}{8} + \tfrac{4}{8}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{8}\cos 4\varphi;$$

$$\cos\varphi^5 = \tfrac{10}{16}\cos\varphi + \tfrac{5}{16}\cos 3\varphi + \tfrac{1}{16}\cos 5\varphi;$$

$$\cos\varphi^6 = \tfrac{10}{32} + \tfrac{15}{32}\cos 2\varphi + \tfrac{6}{32}\cos 4\varphi + \tfrac{1}{32}\cos 6\varphi;$$

$$\cos\varphi^7 = \tfrac{35}{64}\cos\varphi + \tfrac{21}{64}\cos 3\varphi + \tfrac{7}{64}\cos 5\varphi + \tfrac{1}{64}\cos 7\varphi;$$

$$\cos\varphi^8 = \tfrac{35}{128} + \tfrac{56}{128}\cos 2\varphi + \tfrac{28}{120}\cos 4\varphi + \tfrac{8}{128}\cos 6\varphi + \tfrac{1}{128}\cos 8\varphi.$$

Facile ex his calculis lex generalis eruitur. In potestatibus (sq paribus non nisi parium ipsius φ multiplorum, quorum maxi um

*) Kaestners Astron. Abh. I, I, 10.

ato exponente definitur, cosinus adparent, in imparibus eadem ge multiplorum imparium cosinus. Sed pares non eandem omnino uam impares legem sequuntur.

α. Terminus initialis in paribus, in $\cos 0\varphi = 1$ ductus, coeffiente gaudet cuius denominator, ut ceterorum omnium est ipsius potestas, cuius exponens unitate exceditur ab exponente propotae potestatis. Numerator est fere coefficiens binomialis ad otestatem propositam pertinens, et quidem, si illos suo ordine volutos concipias, mediorum inter illos dimidius. Cetera membra, ultiplum ipsius φ, indicis membri duplum, in coefficiente adiecto ndem quem initiale denominatorem, pro numeratore autem coeffientem binomialem eiusdem potestatis, illo quem initiale gerit t gradibus posteriorum, quot index membri indicat, continent. uae lex ita generatim exponi potest: fore $\cos\varphi^{2m}$ seriem, cuius

rminus initialis *) $$\frac{1}{2^{2m-1}} \cdot \frac{{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m)}}{2},$$

rminus generalis r^{tus} $$= \frac{1}{2^{2m-1}} \, {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cdot \cos 2r\varphi.$$

β. Potestates impares eidem legi subiectae inveniuntur nisi od terminus initialis in numeratore, coefficientium binomialium, potestatem datam pertinentium medium posteriorem (quippe bini exponente impari occurrunt et medii et aequales) totum contineat. x seriei generalis igitur haec erit: esse $\cos\varphi^{2m-1}$ seriem, cuius

minus initialis $$= \frac{1}{2^{2m-2}} \, {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)} \cos\varphi$$

minus generalis r^{tus} $$= \frac{1}{2^{2m-2}} \, {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cos(2r+1)\varphi.$$

3. Sumamus igitur primo loco legem propositam in indefinita ua potestate impari, v. g. $2m-1^{\text{ta}}$ valere, adeoque esse

---

*) Expressio legis huius Euleriana, ad coefficientes binomiales non cata cum proposita si ipsa congruit, sed non aeque concinna videtur. Ceterum coefficientes binomiales a me semper more Hindenburgiano ri, et serierum terminos, duce Ill. Kaestnero, semper in initialem et entes distingui, vix est quod moneam.

[Es ist nemlich ${}^{\nu}\mathfrak{B}^{(\mu)} = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-\mu+1)}{1\cdot 2\cdots\mu}$ gesetzt. Sch.]

$$(\cos\varphi)^{2m-1} = \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\cos\varphi + \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+1)}\cos 3\varphi$$
$$+ \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+2)}\cos 5\varphi \text{ etc.}$$

obtinebitur potestas par unitate maior, utramque aequationis partem per $\cos\varphi$ multiplicando. Quodlibet serie membrum hoc pacto productum binorum cosinuum continet, nec difficulter ex theoremate noto in summam binorum cosinuum solvetur. Sic fiet

$$\cos\varphi^{2m} = \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\cos\varphi\cdot\cos\varphi + \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+1)}\cos 3\varphi\cos\varphi$$
$$+ \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+2)}\cos 5\varphi\cdot\cos\varphi + \cdot$$

Evadet igitur quia

$$\cos\varphi\cos\varphi = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi,$$

terminus initialis

$$= \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\cdot\tfrac{1}{2} + \frac{1}{2^{2m-2}}\cdot{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\frac{\cos 2\varphi}{2},$$

eademque lege terminus primus

$$= \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+1)}\cdot\frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+1)}\frac{\cos 4\varphi}{2}.$$

Initio patet ex solo termino initiali in summam soluto ever turum terminum in $\cos 0\varphi = 1$ ductum, h. e. novae seriei term num initialem; ceteri enim termini in utraque summae ex ill provenientis parte cosinum multipli alicuius paris ipsius φ cont nent. Est igitur novae seriei terminus initialis

$$\frac{1}{2^{2m-2}}\cdot\tfrac{1}{2}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)} = \frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}.$$

Haec vero expressio, quum sit hic coefficiens binomialis inter ce- ros suae potestatis mediorum posterior, adeoque cum altero med- rum, cui aequalis est, addendo iunctus potestatis uno gradu altios coefficientem eiusdem indicis producat, sitque haec ratione

$${}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\cdot 2 = {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m)},$$

sic poterit exhiberi: esse terminum initialem

$$= \frac{1}{2^{2m-1}}\frac{{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m)}}{2}.$$

Ad legem terminorum reliquorum generalem enodandam sum- ur $\cos\varphi^{2m-1}\cdot\cos\varphi$ terminus generalis r^{tus}

$$\frac{1}{2^{2m-2}} {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cos(2r+1)\varphi \cdot \cos\varphi.$$

ic, quum sit

$$\cos(2r+1)\varphi \cdot \cos\varphi = \tfrac{1}{2}\cos 2r\varphi + \tfrac{1}{2}\cos(2r+2)\varphi,$$

olvetur in partes:

$$\frac{1}{2^{2m-2}} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cos 2r\varphi + \frac{1}{2^{2m-2}} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cos(2r+2)\varphi.$$

Ex quo adparet, ex quolibet multiplo impari hac transformaone bina paria, alterum proxime maius, alterum proxime minus ito impari enasci. Sic nonnisi cosinus multiplorum parium in va serie occurrunt, quorum quilibet coefficientem ex binis seriei lsumtae coefficientibus contiguis conflatum obtinebit. Patet enim transformatione in termino r^{to} ipsius

$$\cos\varphi^{2m-1} \cdot \cos\varphi$$

istituta, non solum huius partem primam, quae tam ante inta fuit

$$\frac{1}{2^{2m-1}} {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cos 2r\varphi,$$

l quoque antecedentis $r-1^{\text{ti}}$ posteriorem

$$= \frac{1}{2^{2m-1}} {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r-1)} \cos 2r\varphi,$$

se in $\cos 2r\varphi$ ductam, ex ceteris terminis vero multipla aut mira aut maiora proficisci. Iunctis igitur terminis hisce habebitur vae seriei pro $\cos\varphi^{2m}$ terminus generalis r^{tus}, qui, quum sit

$${}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)} + {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r-1)} = {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)}$$

luet formam

$$\frac{1}{2^{2m-1}} {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cdot \cos 2r\varphi.$$

ec expressio legi infra pro potestatibus paribus adsumtae prorconsentanea est, ex quo sequitur, valituram illam pro potestati i, simulac impari proxime minori demonstrata fuerit.

4. Denuo igitur derivata modo pro $\cos\varphi^{2m}$ series:

$$\cos\varphi^{2m} = \frac{1}{2^{2m-1}} \frac{{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m)}}{2} + \frac{1}{2^{2m-1}} {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+1)} \cos 2\varphi + \frac{1}{2^{2m-1}} {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+2)} \cos 4\varphi \cdots$$

$$+ \frac{1}{2^{2m-1}} {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cos 2r\varphi + \cdots$$

in $\cos\varphi$ ducatur, ut habeatur ex una parte $\cos\varphi^{2m+1}$ ex altera, excepto initiali in quolibet termino binorum cosinuum productum, ut antea in binas partes dirimendum. Dabit sic terminus primus

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+1)}\cos 2\varphi\cos\varphi$$

partes

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+1)}\tfrac{1}{2}\cos\varphi+\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+1)}\tfrac{1}{2}\cos 3\varphi.$$

Pars eius prima, cum unica, quam terminus initialis praebet

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\,\frac{{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m)}}{2}\cos\varphi$$

in summam collecta, dabit novae seriei initialem

$$\frac{1}{2^{2m}}\,{}^{2m+1}\mathfrak{B}^{(m+1)}\cos\varphi.$$

Terminus generalis r^{tus}

$$=\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cos 2r\varphi\cos\varphi,$$

in partes diremtus, dabit

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cdot\tfrac{1}{2}\cos(2r-1)\varphi+\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cdot\tfrac{1}{2}\cos(2r+1)\varphi.$$

Igitur sola multipla imparia hic occurrunt, quorum bina contiga ex quolibet datae seriei termino generantur. Si igitur velim n-vae seriei terminum $(r-1)^{\text{tum}}$, quem in $\cos(2r-1)\varphi$ ductum fe adparet, ex evolutae seriei termino $r-1^{\text{to}}$ partem posteriorem

$$=\frac{1}{2^{2m}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r-1)}\cos(2r-1)\varphi,$$

ex r^{to} autem partem priorem

$$\frac{1}{2^{2m}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cos(2r-1)\varphi$$

iungendo, obtinerem:

$$\frac{1}{2^{2m}}\,{}^{2m+1}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cos(2r-1)\varphi.$$

Sic evadet ipsius $\cos\varphi^{2m+1}$ terminus generalis $r-1^{\text{tus}}$ quali hi propositus est, aut, si malis, pro r substituendo $r+1$, termin r^{u}

$$\frac{1}{2^{2m}}\,{}^{2m+1}\mathfrak{B}^{(m+1+r)}\cos(2r+1)\varphi$$

tque iam adparet hanc legem, ipsius $\cos\varphi^{2m+1}$ terminum r^{tum} si-entem, cum adsumta illa pro $\cos\varphi^{2m-1}$ termino r^{to}

$$= \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cos(2r+1)\varphi,$$

i congruere, ut, simulac in hac, loco m substituatur $m+1$, illa onte prodeat.

Esse igitur legem tam pro paribus quam pro imparibus ipsius sφ potestatibus generalem, hoc progressu indefinito demonstra-ne munito, per se patet.

5. Quamvis ad disquisitionem propositam haud pertineat, li-at hoc loco monere, ex lege, pro cosinuum potestatibus per dati guli multiplos exhibitis similem pro sinuum potestatibus statim surgere, idque sola observatione esse $\cos(90^0-\varphi) = \sin\varphi$.

Quum sit igitur $\cos\varphi^{2m-1}$ series cuius terminus initialis

$$\frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\cos\varphi,$$

t, substituendo $90^0-\varphi$ in locum ipsius φ, $\sin\varphi^{2m-1}$

minus initialis $\quad \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\sin\varphi$

generatim, eadem substitutione $\sin\varphi^{2m-1}$

minus $r^{\text{tus}} \quad = \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cos(2r+1)(90^0-\varphi).$

t autem

$$(2r+1)(90^0-\varphi) = \cos\big((2r+1)90^0-(2r+1)\varphi\big)$$
$$= \cos(2r+1)90^0\cos(2r+1)\varphi + \sin(2r+1)90^0\sin(2r+1)\varphi.$$

n vero, cum sit

$$\sin(2r+1)90^0 = (-1)^r, \quad \cos(2r+1)90^0 = 0$$

haec quantitas

$$= (-1)^r\sin(2r+1)\varphi,$$

terminus ipsius $\sin\varphi^{2m-1}$ generalis r^{tus}

$$= \frac{(-1)^r}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)}\sin(2r+1)\varphi,$$

Si vero in serie $\cos\varphi^{2m}$ exhibente in locum ipsius φ substituas $90^0-\varphi$, terminus initialis non afficitur, generalis r^{tus} qui est

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cos 2r\varphi$$

mutatur ita, ut

$$\begin{aligned}\cos 2r(90^0-\varphi) &= \cos(2r\,90^0-2r\varphi)\\ &= \cos 2r\cdot 90^0\cdot\cos 2r\varphi+\sin 2r\cdot 90^0\cdot\sin 2r\varphi\end{aligned}$$

contineat. Est autem

$$\sin 2r\cdot 90^0 = 0, \quad \cos 2r\cdot 90^0 = (-1)^r,$$

qua re mutatur ista expressio in $(-1)^r\cos 2r\varphi$, fitque ipsius $\sin\varphi^{2r}$ terminus r^{tus}

$$\frac{(-1)^r}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cos 2r\varphi.$$

6. Nunc sine mora ad finem propositum accedere licet. Ni mirum evolvatur per theorema binomiale $(1+n\cos\varphi)^\nu$ in seriem per potestates ipsius $\cos\varphi$ progredientem, solvatur deinde quodl bet huius seriei membrum in novam seriem secundum cosinu multiplorum anguli dati procedentem, seligantur ex his seriebu termini in eiusdem anguli cosinum ducti, hique in unum terminu cogantur. Cognita terminorum sic provenientium lege totum n gotium tantum non perfectum erit. In serie fundamentali

$$\begin{aligned}(1+n\cos\varphi)^\nu = 1 &+ {}^\nu\mathfrak{B}^{(1)}n\cos\varphi+{}^\nu\mathfrak{B}^{(2)}n^2\cos\varphi^2+{}^\nu\mathfrak{B}^{(3)}n^3\cos\varphi^3\cdot\cdot\\ &+{}^\nu\mathfrak{B}^{(q)}n^q\cos\varphi^q\cdot\cdot\end{aligned}$$

omnes ipsius $\cos\varphi$ potestates ex ordine occurrunt, pares et imp res. Ex paribus, si evolvantur nonnisi cosinus multiplorum pariu ex imparibus nonnisi imparium prodeunt, quare ad hos, si de cosi multipli imparis ad illos si de cosinu multipli paris agitur, recurre dum est.

A) Habebitur seriei quaesitae terminus initialis, si ex omnib propositae terminis, illorum, qui evoluti a $\cos 0\varphi = 1$ ordiunt initialia membra ordine suo servato uniantur. Sunt vero so potestates ipsius $\cos\varphi$ pares, quae evolutae eiusmodi membra initiale praebeant. Quaelibet harum partem huc pertinentem pr bet; h^{ta} igitur pars, ex seriei fundamentalis termino $2h^{to}$, qui st ${}^\nu\mathfrak{B}^{(2h)}n^{2h}\cos\varphi^{2h}$ proficiscitur. Est autem $\cos\varphi^{2h}$ terminus initia qui solus huc pertinet

$$= \frac{1}{2^{2h-1}}\frac{{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}}{2} = \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)};$$

adeoque adiecto ipsius $\cos\varphi^{2h}$ coefficiente pars h^{ta} seriei in $\cos 0\varphi = 1$ ductae

$$\frac{1}{2^{2h}}\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)} \cdot {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)} n^{2h}.$$

: inventus est terminus generalis h^{tus} seriei, quae terminum ini-
lem eius constituit, quam $(1+n\cos\varphi)^\nu$ secundum cosinus angu-
um multiplorum evolvendo adipiscimur. Esse terminum eius
tialem $= 1$ per se patet. Quod si ponamus esse

$$(1+n\cos\varphi)^\nu = A + A^{(1)}\cos\varphi + A^{(2)}\cos 2\varphi + \cdots$$

t

$$A = 1 + \frac{1}{2^2}\,{}^{2}\mathfrak{B}^{(1)} \cdot {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2)} n^2 + \frac{1}{2^4}\,{}^{4}\mathfrak{B}^{(2)} \cdot {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(4)} n^4 \cdots + \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)} \cdot {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)} n^{2h} +$$

'e

$$A = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{\nu\cdot\nu-1}{1\cdot 2}\,n^2 + \frac{1}{2^4}\cdot\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{\nu\cdot\nu-1\cdot\nu-2\cdot\nu-3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,n^4 + \text{etc.}$$

B) Quaeramus iam generatim legem coefficientis quam cosinus
ıltipli alicuius imparis v. g. $\cos(2q-1)\varphi$ nanciscitur. Inter ter-
nos seriei $(1+n\cos\varphi)^\nu$ secundum potestates ipsius $\cos\varphi$ proce-
ıtis primus ille, qui $\cos\varphi^{2q-1}$ continet, secundum cosinus multi-
)rum evolutus, in termino suo $q-1^{\text{to}}$ multiplum requisitum continet.
t nimirum ex lege antea $(2,\beta)$ exposita, ipsius $\cos\varphi^{2q-1}$ terminus
.1^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2q-2}}\,{}^{2q-1}\mathfrak{B}^{(2q-1)}\cos(2q-1)\varphi,$$

e, quum sit

$${}^{2q-1}\mathfrak{B}^{(2q-1)} = 1, \quad \frac{1}{2^{2q-2}}\cos(2q-1)\varphi.$$

at autem in serie fundamentali terminus $\cos\varphi^{2q-1}$ continens,
:tus in ${}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q-1)} n^{2q-1}$. Quo factore adiecto habebitur pars prima
fficientis qui ad $\cos(2q-1)\varphi$ pertinet, sive terminus initialis
iei, qua coefficiens ille exhibetur

$$= \frac{1}{2^{2q-2}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q-1)}\, n^{2q-1}.$$

ı vero quaelibet ipsius $\cos\varphi$ potestas impar, cuius exponens
-1 excedit, si per cosinus multiplorum exprimatur, praebebit
minum in $\cos(2q-1)$ ductum; estque horum h^{tus} qui ex h^{ta} post
φ^{2q-1} potestate impari, cuius igitur exponens est $2q+2h-1$,
ginem trahit. Sumitur autem ex quantitate

$${}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q+2h-1)}\, n^{2q+2h-1}\cos\varphi^{2q+2h-1}$$

ındum cosinus multiplorum evoluto terminus $q-1^{\text{tus}}$; fit autem
(cum sit ex lege cognita, ipsius $\cos\varphi^{2q+2h-1}$

$$\text{terminus } q-1^{\text{tus}} = \frac{1}{2^{2q+2h-2}}\, {}^{2q+2h-1}\mathfrak{B}^{(2q+h-1)} \cos(2q-1))$$

$$= \frac{1}{2^{2q+2h-2}}\, {}^{2q+2h-1}\mathfrak{B}^{(2q+h-1)} \,.\, {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q+2h-1)}\, n^{2q+2h-1} \cos(2q-1)\varphi.$$

Huius igitur quantitatis coefficiens est h^{tus} illorum, quos ex suc cessiva partium seriei fundamentalis evolutione adsumta $\cos(2q-1)\varphi$ sortitur. Quare si, uti fas est, in nova seriei condenda istarun partium summam pro uno habeamus coefficiente, fiet ipsius $\cos(2q-1)\varphi$ coefficiens seriei aequalis, cuius terminus initialis

$$= \frac{1}{2^{2q-2}}\, {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q-1)}\, n^{2q-1}$$

et generalis h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2q+2h-2}}\, {}^{2q+2h-1}\mathfrak{B}^{(2q+h-1)} \,.\, {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q+2h-1)}\, n^{2q+2h-1}.$$

C) Eadem ratione lex coefficientis in cosinum multipli alicuiu paris cadentis v. g. in $\cos 2q\varphi$, eruitur. In solis enim potestatibu ipsius $\cos\varphi$ paribus, inde ab illa cuius exponens est $2q$, eiusmo multipli cosinus occurrit. Quare seriei, qua coefficiens ipsi $\cos 2q\varphi$ exprimitur terminus initialis ex eo seriei fundamental membro, quo $\cos\varphi^{2q}$ continetur, i. e. ex ${}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q)}\, n^{2q} \cos\varphi^{2q}$, et quide ex huius termino q^{to} sumetur, fietque (cum sit $\cos\varphi^{2q}$ term. q^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2q-1}}\, {}^{2q}\mathfrak{B}^{(2q-1)} \cos 2q\varphi = \frac{1}{2^{2q-1}} \cos 2q\varphi) = \frac{1}{2^{2q-1}}\, {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q)}\, n^{2q}.$$

Generatim ex h^{to} post hoc primum, seriei fundamentalis memb pari, adeoque ex quantitate ${}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q+2h)}\, n^{2q+2h} \cos\varphi^{2q+2h}$ proveniet coe cientis, ad $\cos 2q\varphi$ pertinentis, pars h^{ta}. Est autem ips $\cos\varphi^{2q+2h}$, si evolvatur, terminus q^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2q+2h-1}}\, {}^{2q+2h}\mathfrak{B}^{(2q+h)} \cos 2q\varphi.$$

Sic igitur provenit coefficientis, ad $\cos 2q\varphi$ pertinentis termi post primum h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2q+2h-1}}\, {}^{2q+2h}\mathfrak{B}^{(2q+h)} \,.\, {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q+2h)}\, n^{2q+2h}.$$

D) Perfectum revera est negotium propositum. Non so m enim seriei ex $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$, dum pro quavis potestate series si- nuum multiplorum substituitur, rite ordinatae terminus initi

cf. A) verum etiam pro utroque genere terminorum, qui in illa ccurre possunt, quorum alteri continent cosinum multipli alicuius nparis, $\cos(2q-1)\varphi$ (cf. B), alteri cosinum multipli alicuius paris os $2q\varphi$, (conf. C) debiti coefficientis terminus initialis et gene- alis rite exhibitus est. Sed haec delineatio legis inventae con- ahitur observatione prorsus eandem esse legem quae in coeffi- entibus cosinuum parium, et quae in imparium valet. Quod sic erspicitur. Erat coefficientis ad $\cos(2q-1)\varphi$ pertinentis terminus itialis

$$\frac{1}{2^{2q-2}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q-1)}\,n^{2q-1},$$

rminus generali h^{tus}

$$\frac{1}{2^{2q+2\lambda-2}}\,{}^{2q+2\lambda-1}\mathfrak{B}^{(2q+\lambda-1)}\,.\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q+2\lambda-1)}\,n^{2q+2\lambda-1}.$$

t in hac expressione $(2q-1) = r$, habebimus hac substitutione sius $\cos r\varphi$ (existente r impari), coefficientem ita constitutum, ut eius terminus initialis

$$= \frac{1}{2^{r-1}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(r)}\,n^{r}$$

minus h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{r+2\lambda-1}}\,{}^{r+2\lambda}\mathfrak{B}^{(r+\lambda)}\,.\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(r+2\lambda)}\,n^{r+2\lambda}.$$

at porro coefficientis ad $\cos 2q\varphi$ pertinentis terminus

tialis $\frac{1}{2^{2q-1}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q)}\,n^{2q}$; $h^{\text{tus}} = \frac{1}{2^{2q+2\lambda-1}}\,{}^{2q+2\lambda}\mathfrak{B}^{(2q+\lambda)}\,.\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q+2\lambda)}\,n^{2q+2\lambda}.$

eadem ratione $2q = r$, veniet hac substitutione pro coefficiente ius $\cos r\varphi$ (existente r pari, expressio ita comparata, ut sit eius minus initialis

$$= \frac{1}{2^{r-1}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(r)}\,n^{r},$$

eralis h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{r+2\lambda-1}}\,{}^{r+2\lambda}\mathfrak{B}^{(r+\lambda)}\,.\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(r+2\lambda)}\,n^{r+2\lambda}.$$

ntitas expressionum quas sive par sit sive impar assumtus r, coefficiente ipsius $\cos r\varphi$ adipiscimur, identitatem legis arguit, m igitur, pro omnibus ipsius $(1 + n\cos\varphi)^\nu$ terminis unam ean- que, concinnius finitima hac formula designabimus.

Est igitur quantitas nostra $(1+n\cos\varphi)^\nu$ seriei aequalis, qua sic procedit, ut sit

$$A + A^{(1)}\cos\varphi + A^{(2)}\cos 2\varphi \cdots + A^{(r)}\cos r\varphi \cdots \text{ etc.}$$

ea coefficientium lege, ut initialis A, aequetur seriei, cuius terminus initialis $= 1$, generalis h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)}\,n^{2h},$$

cuius coefficiens indefinitus r^{tus} $A^{(r)}$ contineatur seriei cuius, terminus initialis

$$= \frac{1}{2^{r-1}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(r)}\,n^{r};$$

coefficiens termini in eadem serie h^{ti}

$$= \frac{1}{2^{r+2h-1}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(r+2h)}\cdot{}^{r+2h}\mathfrak{B}^{(r+h)}\,n^{r+2h}\text{*)}.$$

Sic per coefficientes binomiales brevissime exprimi posse videtur lex complicatissima. Licet enim, evolutis, ut fieri potest, producta his coefficientibus, factores alterius nonnulli, tollantur alterius factoribus, tamen expressio finitima longe prolixior, ac prior fuerat. Sic enim, ut facto rei veritas comprobetur, brevissime exhibetur illa ratione coefficientis indefiniti r^{ti} termini generalis h^{tus}

$$\frac{\nu\cdot(\nu-1)\cdots(\nu-(r+2h-1))}{1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot\cdot\quad h^2}\cdot\frac{1}{h+1\cdot h+2\cdots r+h}\,\frac{1}{2^{r+2h-1}}\,n^{r+2h}\text{*)}$$

Adnotatio. Eiusmodi formulam sortietur, qui ex seriebus pro coefficientibus aliquot initialibus ab Eulero***) propositis legem generalem abstrahere velit. Licet via, quam ad scrutandam legem istam, indicat Auctor Illustris, ad obtinendas series iactan-

---

*) [Diese Formel bildet die zweite Art der Darstellung der ei-

für $$(aa+bb-2ab\cos\varphi)^{-n}$$

in der Abhandlung von Gauss „Disquisitiones generales circa seriem in-

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\cdots$$

act. 6. Gauss' Werke B. III S. 129 . . Sch.].

**) [Die Handschrift hat den Nenner $1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot\cdot r^2$ statt $1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot\cdot$ Sch.]

***) Euler. l. c. Probl. 36.

positas minus directa ac facilis videatur; alio tamen respectu aeclara, et minime negligenda videtur. Omne artificium in eo nsistit, ut ficta pro quantitate $(1+n\cos\varphi)^\nu$ serie

$$A + A^{(1)}\cos\varphi + A^{(2)}\cos 2\varphi + \cdots$$

r differentiationem eruatur scala recursionis, qua istius coeffientes a se invicem pendent. Quae, cum tantummodo tripartita , per binos quosvis antecedentes coefficientem quemvis exhibet, igitur, modo priores bini finiti fuerint, ceteri omnes forma finita hiberi queant. Quae mutua coefficientium relatio, licet ex seriees iamiam inventis erui possit, facilius tamen artificio Euleriano incitur.

7. Sit, ut antea

$$(1+n\cos\varphi)^\nu = A + A^{(1)}\cos\varphi + A^{(2)}\cos 2\varphi \cdots + A^{(h)}\cos h\varphi + \cdots$$

mtis ab utraque parte logarithmorum differentialibus, habebitur, noto divisione ipso $d\varphi$

$$\frac{\nu n\sin\varphi}{+n\cos\varphi} = \frac{A^{(1)}\sin\varphi + 2A^{(2)}\sin 2\varphi + 3A^{(3)}\sin 3\varphi \cdots + hA^{(h)}\cos h\varphi}{A + A^{(2)}\cos\varphi + A^{(2)}\cos 2\varphi \cdots + A^{(h)}\cos h\varphi + \text{etc.}\cdots}$$

α) Sublatis multiplicando utrimque divisoribus habetur ex a parte

$$\sin\varphi\left(A + A^{(1)}\cos\varphi + A^{(2)}\cos 2\varphi \cdots + A^{h}\cos h\varphi + A^{(h+1)}\cos(h+1)\varphi + A^{(h+2)}\cos(h+2)\varphi + \cdot\cdot\right)$$

ae series, ducta in factorem praefixum, ex formula nota, esse

$$\sin\varphi\cos\lambda\varphi = \tfrac{1}{2}\sin(\lambda+1)\varphi - \tfrac{1}{2}\sin(\lambda-1)\varphi,$$

vetur in terminos, secundum sinus multiplorum procedentem. dlibet membrum, praeter initiale et primum in bina sic diriur quorum alterum, multiplum proxime minus, alterum vero tiplum proxime maius, quam illud, cuius cosinum continet, quod mitur, sortietur. Sic v. g. membrum

$$\nu n\cdot\sin\varphi A^{(2)}\cos 2\varphi$$

ebet

$$-\nu\frac{nA^{(2)}}{2}\sin\varphi + \nu\frac{nA^{(2)}}{2}\sin 3\varphi;$$

um primum, adiectum illi quod ex initiali gignitur $nA\sin\varphi$, bet seriei evolutae terminum initialem

$$= \left(\nu nA - \nu\frac{nA^{(2)}}{2}\right)\sin\varphi.$$

Generatim si quaeram, coefficientem, quem in seriei evoluta
nanciscitur $\sin(h+1)\varphi$; soli sunt in data termini $\nu n A^{(h)} \sin\varphi \cos h\varphi$
(eiusque evoluti

pars prior $+\nu \frac{nA^{(h)}}{2} \sin(h+1)\varphi$) ac $\nu n \cdot A^{(h+2)} \sin\varphi \cos(h+2)\varphi$

(huius vero evoluti pars posterior

$$-\nu \frac{nA^{(h+2)}}{2} \sin(h+1)\varphi),$$

ex quibus membra, requisitum continentia ipsius φ multiplum
oriri queant, estque adeo in hac serie ipsius $\sin(h+1)\varphi$ coefficien
completus

$$= \nu \frac{n \cdot A^{(h)}}{2} - \nu \frac{nA^{(h+2)}}{2}.$$

β) Ex altera vero parte habebitur

$$(1 + n\cos\varphi)(A^{(1)} \sin\varphi + 2A^{(2)} \sin 2\varphi \cdots + hA^{(h)} \sin h\varphi \cdots\cdots)$$

ex qua forma, si explicetur duplex series originem trahit. Altera e

$$A^{(1)} \sin\varphi + 2A^{(2)} \sin 2\varphi \cdots\cdots + (h+1) A^{(h+1)} \sin(h+1)\varphi \cdots\cdots$$

nullo negotio prodiens.

Altera vero,

$$n\cos\varphi (A^{(1)} \sin\varphi + 2A^{(2)} \sin 2\varphi \cdots + hA^{(h)} \sin h\varphi + (h+1) A^{(h+1)} \sin(h+1)\varphi + \cdots)$$

ut cum priori in unam summam conflari posset, cum in sing
terminis productum ex $\cos\varphi$ in sinum multipli alicuius ipsiu
contineat, ex nota formula

$$\cos\varphi \sin\lambda\varphi = \tfrac{1}{2}\sin(\lambda+1)\varphi + \tfrac{1}{2}\sin(\lambda-1)\varphi,$$

mutationem subeat necesse est. Sic in ista membrum, quo
contineatur, ex termino

$$n\cos\varphi \cdot 2A^{(2)} \sin 2\varphi$$

procedens, fit $n \cdot A^{(2)} \sin\varphi$. Si generatim ex illa quaesiveris m
bra, quibus $\sin(h+1)\varphi$ contineatur, sumendus terminus

$$hA^{(h)} \sin h\varphi \cdot n\cos\varphi$$

(eiusque pars prior

$$\frac{nhA^{(h)}}{2} \sin(h+1)\varphi)$$

um termino

$$(h+2)A^{(h+2)}\sin(h+2)\varphi \cdot n\cos\varphi$$

ex hoc autem evoluto pars posterior

$$\frac{n(h+2)A^{(h+2)}}{2}\sin(h+1)\varphi);$$

uo facto evadit ipsius $\sin(h+1)\varphi$ in serie quaesita coefficiens

$$\frac{nhA^{(h)}}{2}+\frac{n(h+2)A^{h+2}}{2}$$

γ) Iam vero, cum series ab una parte (α) aequalis sit seriebus altera positis (β), coefficientes homologi, i. e. hoc loco in eius-em anguli sinum ducti aequales sint oportet. Sic est ex una urte ipsius $\sin\varphi$ coefficiens

$$= nA-\frac{nA^{(2)}}{2}$$

altera autem $A^{(1)}+nA^{(2)}$. Quibus aequatis habebitur:

$$\nu nA-\nu\frac{nA^{(2)}}{2} = A^{(1)}+nA^{(2)}, \quad \text{unde} \quad A^{(2)} = \frac{2(\nu nA-A^{(1)})}{(\nu+2)n}.$$

neralibus via etiam hic iam strata est. Si enim ab utraque rte, quae in $\sin(h+1)\varphi$ ducta reperiuntur, aequalia, uti fas t, ponantur, eveniet:

$$\frac{\nu nA^{(h)}}{2}-\frac{\nu n}{2}A^{(h+2)} = (h+1)A^{(h+1)}+\frac{nhA^{(h)}}{2}+\frac{n(h+2)A^{(h+2)}}{2}.$$

luta aequatione habebitur

$$A^{(h+2)} = \frac{n(\nu-h)A^{(h)}-2(h+1)A^{(h+1)}}{n(\nu+h+2)}$$

formula generali, excepto, quod veniret pro $h=0$, $A^{(2)}$, antea singulari disquisitione inventa, continetur lex cuiuslibet coeffi-atis in serie nostra fictitia, quatenus nimirum ille per binos ecedentes facili eruitur calculo. Sic, ut exemplum adsit

$$A^{(2)} = \frac{2(\nu nA-A^{(1)})}{(\nu+2)n}; \quad A^{(3)} = \frac{n(\nu-1)A^{(1)}-4A^{(2)}}{n(\nu+3)};$$

$$A^{(4)} = \frac{n(\nu-2)A^{(2)}-6A^{(3)}}{n(\nu+4)} \quad \text{etc.}$$

δ) Fieri autem potest, existente ν numero aliquo negativo,

ut coefficiens aliquis, evanescente denominatore, non definiatur, tunc ad series infinitas, ante exhibitas recurrendum est. Idem hoc fieri oportet in coefficientibus binis prioribus A et $A^{(1)}$, quos ut cognitos scala recursionis iamiam supponit. Potest vero singulari artificio $A^{(1)}$ per A exhiberi. Erat enim

$$A = 1 + \cdots \cdot \frac{1}{2^{2h}} {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)} \cdot {}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)} n^{2h}$$

$$A^{(1)} = {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(1)} n + \cdots \frac{1}{2^{2h}} {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h+1)} \cdot {}^{2h+1}\mathfrak{B}^{(h+1)} n^{2h+1}$$

Est, si sumamus $2nA + A^{(1)}$ huius seriei terminus initialis

$$= ({}^{\nu}\mathfrak{B}^{(1)} + 2) n = (\nu + 2) n;$$

generalis h^{tus}

$$2n \cdot \frac{1}{2^{2h}} {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)} \cdot {}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)} n^{2h} + \frac{1}{2^{2h}} {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h+1)} \cdot {}^{2h+1}\mathfrak{B}^{(h+1)} n^{2h+1},$$

qui, cum sit

$${}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h+1)} = {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)} \cdot \frac{\nu - 2h}{2h+1}, \text{ et } {}^{2h+1}\mathfrak{B}^{(h+1)} = {}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)} \cdot \frac{2h+1}{h+1},$$

sic contrahitur

$$\frac{1}{2^{2h}} {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)} \cdot {}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)} \left(2 + \frac{\nu - 2h}{2h+1} \cdot \frac{2h+1}{h+1}\right) n^{2h+1}$$

sive brevius

$$= \frac{1}{2^{2h}} {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)} \cdot {}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)} \frac{(\nu+2)}{h+1} n^{2h+1}.$$

Sumatur porro, posita n variabili, $\int An\, dn$, cuius terminus initialis $= \frac{1}{2} nn$; terminus generalis h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2h}} {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)} \cdot {}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)} \frac{1}{2h+2} n^{2h+2}.$$

Quae nova series si per

$$\frac{2(\nu+2)}{n}$$

multiplicetur, dabit initialem $= (\nu+2)n$, generalem h^{tum}

$$= \frac{1}{2^{2h}} {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)} \cdot {}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)} \frac{(\nu+2)}{h+1} n^{2h+1}.$$

Consentientibus igitur ab utraque parte terminis, fit

$$2n \cdot A + A^{(1)} = \frac{2 \cdot (\nu+2)}{n} \int A n \, dn,$$

mto sine addita constante integrali. Fluit inde, esse

$$A^{(1)} = \frac{2 \cdot (\nu+2)}{n} \int A n \, dn - 2n \cdot A.$$

Hac igitur formula $A^{(1)}$ ad inventam A reducitur, atque haec la restat ex genesi seriei ipsius, ut antea factum est, derivanda.

8. Confectis quae in problemate generalissime proposito speri poterant, superest, ut ad casus speciales animum advertamus, illis enim contrahere formulas universales nonnunquam licet. iius rei exemplum praebet casus, quo est ν numerus integer sitivus. Tunc enim quaelibet serierum, antea ad coefficientes sius $(1 + n\cos\varphi)^\nu$ exprimendos inventarum, quum coefficientes nomiales ad exponentem ν pertinentes, suo ordine quilibet, conieant abrumpatur necesse est, et finita evadit pro quavis exssio. Simili ratione eo casu, quo ν est numerus integer negaus ad expressiones finitas singulorum coefficientium pervenire et. Quum ad hunc casum formulae usus plurimum revocetur, re erit in illo enucleando paulum morari. Artificium, quo in disquisitione opus est, duabus absolvitur partibus; prima, ut coefficientibus, existente $\nu = -1$, eruantur expressiones finis; altera, ut via monstretur, qua, concessis ipsius $(1 + n\cos\varphi)^\nu$ efficientibus, potestatis uno gradu inferioris $(1 + n\cos\varphi)^{\nu-1}$ coeffintes derivari queant. Sic enim ab ipsa $(1 + n\cos\varphi)^{-1}$ transire bit ad potestates negativas altiores, vitatis seriebus pro sinlo coefficiente infinitis.

α) Ad scrutandam, cui subiecta est, posito $\nu = -1$, coeffins initialis A, legem, in expressione indefinita termini eiusdem ponamus $\nu = -1$, provenietque, ob

$$^{-1}\mathfrak{B}^{(2\lambda)} = 1, \text{ ille } = \frac{1}{2^{2\lambda}} {}^{2\lambda}\mathfrak{B}^{(\lambda)} n^{2\lambda}.$$

t autem

$$\frac{1}{2^{2\lambda}} {}^{2\lambda}\mathfrak{B}^{(\lambda)} = \frac{1}{2^{2\lambda}} \frac{2h \cdot (2h-1) \cdot \ldots \cdot h+1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot h}$$

$$= \frac{1}{2^{2\lambda}} \cdot \frac{2h \cdot (2h-1) \cdot \ldots \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot h} \cdot \frac{1}{h \cdot (h-1) \cdot \ldots \cdot 1}$$

$$= \frac{1}{2^{2\lambda}} \frac{(2h-1)(2h-3) \cdot \ldots \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots h} \cdot \frac{2h \cdot (2h-2) \cdot \ldots 2}{h \cdot (h-1) \cdot \ldots \cdot 1}$$

$$= \frac{1}{2^\lambda} \cdot \frac{(2h-1)(2h-3) \cdot \ldots 1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot h},$$

fitque his transformationibus terminus ille h^{tus}

$$= \frac{1}{2^h} \frac{(2h-1)\cdot(2h-3)\cdots 1}{1\cdot 2\cdots h} \cdot n^{2h}.$$

Quare, cum haec expressio sit manifesto quantitatis $(1-nn)^{-\frac{1}{2}}$, in seriem evolutae terminus h^{tus}, sequitur, fore ipsam A, casu quo

$$\nu = -1, \quad = (1-nn)^{-\frac{1}{2}}$$

β) Coefficiens post initialem primus $A^{(1)}$ definitur relatione ante demonstrata (7 δ)

$$A^{(1)} = \frac{2\cdot(\nu+2)}{n} \int An\,\mathrm{d}n - 2n\cdot A$$

quae hic, ob $\nu = -1$, mutatur in

$$A^{(1)} = \frac{2}{n}\int An\,\mathrm{d}n - 2nA = \frac{2}{n}\int (1-nn)^{-\frac{1}{2}} n\,\mathrm{d}n - 2n(1-nn)^{-\frac{1}{2}}.$$

Peracta integratione (sic instituenda, ut cum n, et integrale evanescat) habebitur

$$A^{(1)} = -\frac{2}{n}(1-nn)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{n} - 2n(1-nn)^{-\frac{1}{2}},$$

sive brevius

$$A^{(1)} = \frac{2}{n}\left(1-(1-nn)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

γ) His praecognitis facile coefficientium reliquorum expressiones finitae per scalam recursionis ante erutam deducuntur. Erat ja

$$A^{(h+2)} = \frac{n(\nu-h)A^{(h)} - 2(h+1)A^{(h+1)}}{n(\nu+h+2)}$$

adeoque h. l. ob $\nu = -1$,

$$A^{(h+2)} = \frac{-n(h+1)A^{(h)} - 2(h+1)A^{(h+1)}}{n(h+1)}$$

sive

$$A^{(h+2)} = -\left(A^{(h)} + \frac{2}{n}A^{(h+1)}\right)$$

Si per hanc scalam calculos instituas, occurret lex simplicissim*), fore

*) Falsa est, vitio forsan typothetae, legis huius apud Eulerum c. § 275 expressio.

[Auch in dieser Handschrift findet sich ein Fehler, es ist nemli in

$$A^{(\lambda)} = (-1)^\lambda \frac{2}{\sqrt{(1-nn)}} \left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^\lambda$$

illa demonstratione firmetur, sumamus valere ipsam pro coeffi-ntibus usque ad h^{tum}, eritque per scalam recursionis

$$A^{(\lambda+1)} = (-1)^\lambda \frac{2}{\sqrt{(1-nn)}} \left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^{\lambda-1}$$

$$+ (-1)^{\lambda+1} \frac{2}{n} \frac{2}{\sqrt{(1-nn)}} \left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^\lambda$$

re, separato factore communi

$$(-1)^\lambda \frac{2}{\sqrt{(1-nn)}} \left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^{\lambda-1} \left\{1 - \frac{2}{n}\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)\right\}$$

t factor, uncinis inclusus

$$= \frac{nn-2+2\sqrt{(1-nn)}}{nn} = -\frac{(1-nn)-2\sqrt{(1-nn)}+1}{nn}$$

$$= -\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^2$$

adiecto habebitur

$$A^{(\lambda+1)} = (-1)^\lambda \frac{2}{\sqrt{(1-nn)}} \left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^{\lambda-1} \cdot -\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^2$$

$$= (-1)^{\lambda+1} \cdot \frac{2}{\sqrt{(1-nn)}} \left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^{\lambda+1}$$

le legis universalitas perspicitur.

---

er Formel für $A^{(\lambda)}$ und in den beiden folgenden für $A^{(\lambda+1)}$ der hier im cke hinzugefügte Factor $\frac{2}{\sqrt{(1-nn)}}$ ausgelassen, dieser wird aber durch besondere Gleichung

$$A^{(2)} = -2\left(A + \frac{1}{n}A^{(1)}\right)$$

rdert. Die hier gefundene Entwickelung bildet den besonderen Fall Reihe für $(aa + bb - 2ab\cos\varphi)^{-1}$,

der ersten Art der von Gauss in seiner 1812 veröffentlichten andlung: Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \cdots$$

benen Darstellung. Gauss' Werke III Seite 128. Sch.]

Pars prima negotii propositi confecta est, circumscriptis for mula finita ipsius $(1+n\cos\varphi)^{-1}$ coefficientibus. Restat altera, u videamus qua ratione a potestatis alicuius coefficientibus dati transire liceat ad quaesitos potestatis proxime inferioris.

δ) Facillime hoc negotium ita perficitur, ut in expressionibu quibus tum coefficiens seriei indefinitae pro $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ initiali tum generalis exhibentur, in locum ipsius ν, substituatur $\nu-1$, tunc eliciatur resultantium cum anterioribus relatio.

I. Erat (6) ipsius coefficientis initialis A, in seriem evolu terminus initialis 1, qui igitur substitutione non adficitur. Er generalis h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2h}} {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)} \cdot {}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)} n^{2h}$$

qui, substituendo $\nu-1$ loco ν, mutatur in:

$$\frac{1}{2^{2h}} {}^{\nu-1}\mathfrak{B}^{(2h)} \cdot {}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)} n^{2h}.$$

Manifesto igitur nascetur ex priori posterior, si in

$$\frac{\nu-2h}{\nu} = \left(1-\frac{2h}{\nu}\right)$$

ducatur ille; adeoque, cum idem sit, terminum generalem ipsius A, h^{tum} in $\frac{2h}{\nu}$ ducere, ac eundem, secundum n differentiatum, et $\nu\,\mathrm{d}n$ dividere, et per n multiplicare, habebimus, si vocetur B ipsius $(1+n\cos\varphi)^{\nu-1}$ terminus initialis, generatim

$$B = A - \frac{n\,\mathrm{d}A}{\nu\,\mathrm{d}n}.$$

II. Erat coefficientis indefiniti ad $(1+n\cos)^{\nu}$ pertinenti $A^{(r)}$ terminus initialis

$$\frac{1}{2^{r-1}} {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(r)} n^{r},$$

fit itaque, si vocetur $B^{(r)}$ qui, ad $(1+n\cos\varphi)^{\nu-1}$ pertinens elicitur substiendo in istum $\nu-1$ loco ν, huius terminus initialis

$$\frac{1}{2^{r-1}} {}^{\nu-1}\mathfrak{B}^{(r)} n^{r}.$$

Hic vero, cum obtineatur, illum per $\frac{\nu-r}{\nu}$ multiplicando, sive, no idem est, per $\left(1-\frac{r}{\nu}\right)$, et multiplicatio per $\frac{r}{\nu}$ ita confici poss

ille, secundum n differentiatus, denuo in n ducatur, et per $\nu\,dn$ dividatur, relationem sequentem praebet: esse $B^{(r)}$ term. init.

$$= A^{(r)}\text{term.init.} - \frac{n\,{}^{n}dA^{(r)}\text{term.init.}}{\nu\,dn}.$$

Prorsus eadem est relatio, quae in terminis generalibus obtinet. Est nimirum ipsius $A^{(r)}$ terminus h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{r+2h-1}}\,{}^{r+2h}\mathfrak{B}^{(r+h)} . {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(r+2h)}\,n^{r+2h}.$$

Fit igitur, mutato ν in $\nu-1$, ipsius $B^{(r)}$ terminus h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{r+2h-1}}\,{}^{r+2h}\mathfrak{B}^{(r+h)} . {}^{\nu-1}\mathfrak{B}^{(r+2h)}\,n^{r+2h},$$

ui solo factore

$$\frac{\nu-(r+2h)}{\nu} = \left(1-\frac{r+2h}{\nu}\right)$$

d priorem expressionem adiecto, ex ista sponte procedit. Quum utem idem sit, ipsius $A^{(r)}$ terminum h^{tum} per $\frac{r+2h}{\nu}$ multiplicare, e eundem, secundum n differentiatum per $\nu\,dn$ dividere, et in n enuo ducere, habebimus

$$B^{(r)}\text{term.}h = A^{(r)}\text{term.}h - \frac{n\,dA^{(r)}\text{term.}h}{\nu\,dn};$$

uae relatio quum pro omnibus sine discrimine membris obtineat, raebet aequationem

$$B^{(r)} = A^{(r)} - \frac{n\,dA^{(r)}}{\nu\,dn}.$$

ε) Per hanc igitur scalam relationis $(1 + n\cos\varphi)^{\nu-1}$, ad $+n\cos\varphi)^{\nu}$ ita reducitur, ut ex istius coefficientibus, qui in hanc pressionem cadant, differentiatione facillime eliciantur. Licet eo, cum ipsius $(1+n\cos\varphi)^{-1}$ coefficientes, formulis finitis circumripti, in potestate sint, ad exponentes negativos maiores sensim scendere, eoque omnino potestates negativas easque integras efficientibus finitis exhibere.

Non tamen series infinitae, pro coefficientibus hisce ante intae, inutiles sunt. Est iis locus, simulac ν fuerit numerus ctus, quo casu, ex EULERI iudicio, in his speculationibus grasimo, formulae finitae nulla ratione sperari possunt. Tunc igi-

tur necessarium est, ut sit n numerus fractus, isque verus, sin minus series omnes, cum divergant, usu prorsus destituuntur.

9. Hucusque, in sola evolutione seriei $(1+n\cos\varphi)^\nu$ morati, integrationem formulae propositae $\mathrm{d}\varphi(1+n\cos\varphi)^\nu$ negleximus. Illa autem, inventa serie ipsa, nullo absolvitur negotio. Si enim fuerit:

$$(1+n\cos\varphi)^\nu = A + A^{(1)}\cos\varphi + A^{(2)}\cos 2\varphi \cdots + A^{(r)}\cos r\varphi \cdots$$

fiet

$$\int \mathrm{d}\varphi(1+n\cos\varphi)^\nu = A\varphi + A^{(1)}\sin\varphi + \tfrac{1}{2}A^{(2)}\sin 2\varphi \cdots + \tfrac{1}{r}A^{(r)}\sin r\varphi$$

cuius seriei coefficientes ex praecedentibus noti sunt.

10. Subiunxit in fine Cap. VI Eulerus integrationem formulae $\mathrm{d}\varphi\log(1+n\cos\varphi)$, quam, ut priorem ita perficit, ut peculiari artificio $\log(1+n\cos\varphi)$ in seriem secundum cosinus angulorum multiplorum evolvat, antequam integrationem ipsam adgrediatur. Re vera autem haec series, ut casus specialis, iam in illa continetur quam pro $(1+n\cos\varphi)^\nu$ invenimus. Opus est in hoc negotio not propositione: esse

$$\log(1+x) = \frac{(1+x)^0-1}{0}$$

cui consentienter

$$\log(1+n\cos\varphi) = \frac{(1+n\cos\varphi)^0-1}{0}.$$

In expressione igitur generali pro $(1+n\cos\varphi)^\nu$ coefficiens initialis unitate mulctetur, dein in illo et ceteris omnibus ponatur $\nu = 0$, et dividatur quivis per ipsam 0.

α) Est ipsius A, coefficientis initialis ad seriem $(1+n\cos\varphi)^\nu$ pertinentis, et termino suo initiali qui est $= 1$, iamiam mulctati, generalis h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2h}} \cdot {}^{2h}\mathfrak{B}^{h} \cdot {}^{h}\mathfrak{B}^{(2h)}\, n^{2h}.$$

Quodsi in illo ponatur $\nu = 0$, fiet

$$\frac{1}{2^{2h}} \cdot \frac{0\cdot(-1)\cdot(-2)\cdots-(2h-1)}{1\cdot 2\cdots 2h} \cdot {}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\, n^{2h}$$

quo, per 0 diviso restat

$$\frac{1}{2^{2h}}(-1)^{2h-1}\frac{1\cdot 2\cdots 2h-1}{1\cdot 2\cdots 2h}\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\, n^{2h} = (-1)^{2h-1}\frac{1}{2^{2h}}\cdot\frac{1}{2h}\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\, n^{2h}$$

$$= \frac{1}{2^{2h}}(-1)^{2h-1}\cdot\frac{2h-1\cdot 2h-2\cdots h+}{1\cdots h}\, n^{2h}$$

$$= \frac{1}{2^h}(-1)^{2h-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2h-1}{1\cdot 2\cdot\cdot 3\cdot\cdots h\cdot}\frac{n^{2h}}{2h},$$

ve cum $(-1)^{2h-1}$, quidquid fuerit h, sit negativum

$$= -\frac{1}{2^h}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2h-1}{1\cdot\cdots h}\frac{n^{2h}}{2h}.$$

Differentiata hac expressione secundum n, provenit, abiecto dn,

$$\frac{-1}{2^h}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdot 2h-1}{1\cdot\cdots h}n^{2h-1},$$

iae est manifesto quantitatis

$$\frac{-(1-nn)^{-\frac{1}{2}}}{n}$$

rminus h^{tus}. Quasecum hic non adsit, qui in illa terminus initialis $\frac{1}{n}$, illa mulctata formulae nostrae aequalis fiet, adeoque si potur ipsius $\log(1 + n\cos\varphi)$ coefficiens initialis $= C$ habebitur

$$\frac{n\,{}^{n}dC}{dn} = -(1-nn)^{-\frac{1}{2}} + 1.$$

ua aequatione, sic expressa

$${}^{n}dC = \frac{dn}{n}\left(1-(1-nn)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

integrando

$$C = \log n - \log\frac{1-(1-nn)^{+\frac{1}{2}}}{n} + \text{const};$$

t vero cum evanescere debeat posito $n = 0$, expressio, nst. $= \log\frac{1}{2}$. Quare

$$C = \log\left(\frac{nn}{(1-\sqrt{1-nn})\,2}\right),$$

t, si malis,

$$C = -\log\left(\frac{2(1-\sqrt{1-nn})}{nn}\right).$$

β) Coefficiens qui initialem excipit, $C^{(1)}$ socemus, ex scala reionis, antea tradita invenire potest. Est nimirum

$$C^{(1)}\cdot n = -2\int nn\,dC + nn,$$

quo substito, et ad calculos revocato, fit

$$C^{(1)}n = 2(1-(1-nn)^{\frac{1}{2}}),$$

adeoque

$$C^{(1)} = +2\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}.$$

γ) Ceteros coeffientes ex scala relationis ante evicta una formula generali circumscribere licet, quae sic enuntiari potest, fore si ipsius $1(1+n\cos\varphi)$ in seriem evolutae coefficiens $h^{tus} = C^{(h)}$ hui

$$= (-1)^{h+1}\frac{2}{h}\left(\frac{1-\sqrt{1-nn}}{n}\right)^h.$$

Sumamus, legem valere pro h primis, erit tunc ex scala generali, posito $\nu = 0$, (7, γ)

$$C^{(h+1)} = \frac{-n(h-1)C^{(h-1)}-2h\cdot C^{(h)}}{n(h+1)},$$

fit substituendo debitos valores

$$C^{(h+1)} =$$

$$\frac{n\cdot(h-1)(-1)^h\frac{2}{h-1}\left(\frac{1-\sqrt{1-nn}}{n}\right)^{h-1}+2h(-1)^{h+1}\frac{2}{h}\left(\frac{1-\sqrt{1-nn}}{n}\right)^h}{n\cdot(h+1)}$$

sive, separato factore communi

$$C^{(h+1)} = -\frac{(-1)^h 2\left(\frac{1-\sqrt{1-nn}}{n}\right)^{h-1}}{n(h+1)}\left(n-\frac{2(1-\sqrt{1-nn})}{n}\right).$$

Est vero factor uncinis inclusus

$$= \frac{nn-2+2\sqrt{1-nn}}{n} = -\frac{(1-\sqrt{(1-nn)})^2}{n}.$$

Si igitur alter per illum revera multiplicetur, fit

$$C^{(h+1)} = (-1)^{h+2}\frac{2}{h+1}\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^{h+1},$$

unde perspicitur legis generalitas.

δ) Est igitur, si ponatur

$$\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right) = a,$$

$$\log(1+n\cos\varphi) = -\log\frac{2a}{n} + \tfrac{2}{1}a\cos\varphi - \tfrac{2}{2}a^2\cos 2\varphi +$$
$$+ \tfrac{2}{3}a^3\cos 3\varphi + \cdots (-1)^{h+1}\tfrac{2}{h}a^h\cos h\varphi + \cdots$$

Adnotatio. Formula haec, ad functionum trigonometricarum logarithmos obtinendos summi usus est*).

Sit enim $n = 1$, fiet $a = 1$, et habebitur

$$\log(1+\cos\varphi) = -\log 2 + \tfrac{2}{1}\cos\varphi - \tfrac{2}{2}\cos 2\varphi + \tfrac{2}{3}\cos 3\varphi - \tfrac{2}{4}\cos 4\varphi \text{ etc.} \cdots$$

quae series, cum sit $1+\cos\varphi = 2\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2$, dat quoque

$$\log\cos\tfrac{1}{2}\varphi = -\log 2 + \cos\varphi - \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\cos 3\varphi - \tfrac{1}{4}\cos 4\varphi \cdots$$

adeoque, substituendo 2φ in locum ipsius φ

$$\log\cos\varphi = -\log 2 + \cos 2\varphi - \tfrac{1}{2}\cos 4\varphi + \tfrac{1}{3}\cos 6\varphi - \tfrac{1}{4}\cos 8\varphi \cdots$$

Similiter, si ponatur $n = -1$, ut fiat $a = -1$, habebitur

$$\log(1-\cos\varphi) = -\log 2 - \tfrac{2}{1}\cos\varphi - \tfrac{2}{2}\cos 2\varphi - \tfrac{2}{3}\cos 3\varphi - \tfrac{2}{4}\cos 4\varphi \cdots$$

adeoque cum sit $1-\cos\varphi = 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2$

$$\log\sin\tfrac{1}{2}\varphi = -\log 2 - \cos\varphi - \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi - \tfrac{1}{3}\cos 3\varphi - \tfrac{1}{4}\cos 4\varphi \cdots$$

ut, ut antea 2φ in locum ipsius φ substituendo

$$\log\sin\varphi = -\log 2 - \cos 2\varphi - \tfrac{1}{2}\cos 4\varphi - \tfrac{1}{3}\cos 6\varphi - \tfrac{1}{4}\cos 8\varphi \cdots$$

Sequitur ex his, cum sit $\log\operatorname{tang}\varphi = \log\sin\varphi - \log\cos\varphi$

$$\log\operatorname{tang}\varphi = -2(\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\cos 6\varphi + \tfrac{1}{5}\cos 10\varphi + \tfrac{1}{7}\cos 14\varphi \cdots)$$

et ex eodem fonte ceterarum functionum trigonometricarum logarithmi, licet per series non celeriter convergentes, habebuntur.

ε) Cum sit

$$\log(1+n\cos\varphi) = -\log\frac{2a}{m} + \tfrac{2}{1}a\cos\varphi - \tfrac{2}{2}a^2\cos 2\varphi + \tfrac{2}{3}a^3\cos 3\varphi + \cdots$$

integratio formulae $\log(1+n\cos\varphi)\cdot d\varphi$ in aperto est, fitque

$$\int d\varphi \log(1+n\cos\varphi) = -\left(\log\frac{2a}{m}\right)\varphi + \tfrac{2}{1}a\sin\varphi - \tfrac{2}{4}a^2\sin 2\varphi + \tfrac{2}{9}a^3\sin 3\varphi +$$

Confectum est igitur, quatenus per series fieri potuit, negotium propositum.

Cognata est disquisitio quam Ill. Klügel (de functione potentiali $(1-2x\cos\varphi+xx)^{-m}$ in Commentat. Societatis huius Tom. XII)

*) [Die vorstehende Entwickelung setzt $|n| < 1$ voraus. Sch.]

exhibuit. Forma, quam ille contemplatus est, abludit quidem ab illa, quae ducente Eulero in hac dissertatiuncula in censum vocata fuit, verum difficile non foret, alteram ex altera deducere. Ne igitur acta omnino egisse videar, moneam, omnem disquisitionem eum in finem a me institutam, ut serierum infinitarum tractationem per terminos generales nulla difficultate laborare, et facilius saepe, ac artificia singularia ad eruendas leges generales perducere, exemplo aliquo ostenderem. Non igitur in principali dissertatiunculae parte usus sum via, qua VV. Ill. Eulerus et Klügel incessere; in ceteris omnia ad expressiones generales revocare, et demonstratione ubicunque munire conatus.

Carollarium.

11. Occurrere in Analysi altiori series, sive finitas, sive infinitas, quarum termini non unam eandemque legem primo obtutu sequi videntur, imprimis eiusmodi, in quibus termini indicis pari aliter ac imparis constructi sunt, notissimum est. Solent tum singulari lege hi, singulari illi circumscribi. Praeter prolixitatem autem eiusmodi definitionum, inest illis aliquid contra naturam ac vim Analyseos. In eo enim ipso huius consistit dignitas, ut valores unius quantitatis, si eiusmodi fuerint, diversissimos sub una expressione generali comprehendat, et ex hac expressione cunctos derivare doceat. Sic, si in problemate aliquo geometrico solvendo plures una quantitate solutionem praestent, hae omnes in aequatione qua datarum cum quaesita relationem circumscribimus involutae reperiuntur. Simile quid ab expressionibus quibus serierum termini generales sistuntur postulari potest. Si fuerit igitur inter terminos pares et impares aliqua diversitas, ita comparata esse oportet, si perfecta fuerit, termini generalis formula, ut alios valores sumto pro termini indice numero indefinito pari, alios pro impari praebeat. Quod qua ratione praestari possit, iam in praeoemio dissertatiunculae exposui. Est nimirum $(-1)^m$ existente m pari $= +1$, existente impari $= -1$; estque adeo

$\frac{1-(-1)^m}{2}$ existente m pari $= 0$, existente impari $= 1$

$\frac{1-(-1)^{m+1}}{2}$ — — $= 1$, — — $= 0$

et sic per eiusmodi factorem adiectum quaesitum semper praestari poterit.

Luculentum in quo adplicari potuisset hoc notandi genus exemplum dissertatio ipsa praebet. Si nimirum potestates alius

osinus dati per cosinus multiplorum exhibenda sit, notum est liam legem in serie pro potestatibus paribus, aliam pro impari-us servari. Videamus igitur qua ratione haec discrepantia sub ormulam unam generalem cogi queat.

Lex pro potestatibus paribus v. g. $\cos\varphi^{2m}$, ut antea demonstratum est, ita se habet, ut seriei, secundum cosinus multiplorum arium procedentis, terminus initialis, sit

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m)}\,\frac{}{2};$$

erminus generalis h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+h)}\cos 2h\varphi.$$

Lex potestatum imparium, quarum termini solis multiplis nparibus adficiuntur, ita constituta est, ut sit seriei pro $\cos\varphi^{2m-1}$ erminus initialis

$$= \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\cos\varphi;$$

rminus generalis h^{tus}

$$\frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+h)}\cos(2h+1)\varphi.$$

His expressionibus consentietur, si erit seriei pro $\cos\varphi^r$ (ubi sine discrimine numerus par imparve esse potest) terminus itialis

$$\left(1-\frac{1-(-1)^{r+1}}{4}\right)\frac{1}{2^{r-1}}\cdot{}^{r}\mathfrak{B}^{\left(\frac{1}{2}r+\frac{1-(-1)^r}{4}\right)}\cos\frac{1-(-1)^r}{2}\varphi.$$

t enim $r = 2m$, fiet

$$\frac{1}{2^{r-1}} = \frac{1}{2^{2m-1}},$$

que cum sit index coefficientis binomialis

$$\tfrac{1}{2}r+\frac{1-(-1)^r}{4} = m, \qquad {}^{r}\mathfrak{B}^{\left(\frac{1}{2}r+\frac{1-(-1)^r}{4}\right)}\cos\frac{1-(-1)^r}{2}\varphi = {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m)};$$

antea.

Sit $r = 2m-1$; fiet

$$\frac{1}{2^{r-1}} = \frac{1}{2^{2m-2}},$$

ob

$$\frac{1-(-1)^r}{4} = \frac{1-(-1)^{2m-1}}{4} = +\tfrac{1}{2},$$

$${}^{r}\mathfrak{B}^{\left(\frac{1}{2}r+\frac{1-(-1)^r}{4}\right)} = {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{\frac{1}{2}(2m-1)+\frac{1}{2}} = {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)},$$

tandem

$$\cos\frac{1-(-1)^r}{2}\varphi = \cos\frac{1-(-1)^{2m-1}}{2}\varphi = \cos\varphi.$$

Tandem factor praefixus fit, existente r numero impari, $= 1$, existente pari, $= 1-\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ uti fas est.

Similiter, dico fore ipsius $\cos\varphi^r$ terminum indefinitum h^{tum}

$$= \frac{1}{2^{r-1}}\,{}^r\mathfrak{B}^{\left(\frac{1}{2}r+\frac{1-(-1)^r}{4}+h\right)}\cos\left(2h+\frac{1-(-1)^r}{2}\right)\varphi.$$

Existente enim r pari $= 2m$, ob

$$\frac{1-(-1)^r}{2} = 0,$$

fit expressio

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+h)}\cos 2h\varphi;$$

existente impari $= 2m-1$, cum sit tunc

$$\frac{1-(-1)^{2m-1}}{2} = 1,$$

fiet eadem

$$\frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+h)}\cos(2h+1)\varphi,$$

ut oportet.

Ad vitandam in scribendo molestiam pro quantitate simpli

$$\frac{1-(-1)^r}{2}$$

signum unicum v. g. $= \alpha$, ut in analysi solet fieri, usurpa posset. Haberetur tunc, contracta expressione

$$\cos\varphi^r = (1+\alpha)\frac{1}{2^r}\cdot{}^r\mathfrak{B}^{\left(\frac{1}{2}(r+\alpha)\right)}\cos\alpha\varphi + \cdots + \frac{1}{2^{r-1}}\,{}^r\mathfrak{B}^{\left(\frac{1}{2}(r+\alpha)+h\right)}\cos(2h+\alpha)\varphi.$$

atque sic binae series, quae primo adspectu diversissimae videbi-tur, sub una expressione, eaque satis simplici, comprehendi possunt*).

*) [Eine andere für gerade und ungerade r geltende Formel ist

$$2^r\cos\varphi^r = \Sigma\frac{1+(-1)^{r+s}}{2}\,\frac{\Pi(r)}{\Pi\left(\frac{r+s}{2}\right)\Pi\left(\frac{r-s}{2}\right)}\cos s\varphi$$

worin Π die von Euler eingeführte Bedeutung hat, Gauss' Werke Band II Seite 146 und 200, und worin bei der Summation Σ für s die Werthe $0, \pm 1, \pm 2 \cdots \pm\infty$ zu setzen sind. Sch.]

Herrn Hofrath Schell freundschafftl.
D. V.

O. Schlömilch

Schlömilch

Schlömilch

XII. Bestimmung des infinitären Werthes des Integrals $\int_0^1 (u)_n \, ($.

Das sehr specielle Problem gewinnt bedeutend an Interesse, wenn man es in seinem Zusammenhange mit umfassenderen von mir ausgeführten Untersuchungen ins Auge fasst, aus welchen die vorliegend Mittheilung nur ein Bruchstück vorstellt. Ueber die Tendenz und theilweise auch über Resultate der letzteren will ich (in §§ 1 und 2) bei der Gelegenheit mit berichten.

§ 1.

Ich knüpfe an die von Ubbo Meyer* untersuchten Reihenentwickelungen

$$1) \quad \left\{\frac{(1+z)^\mu - 1}{\mu z}\right\}^x = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n^{(x)}(\mu) \cdot z^n, \quad \left(\frac{e^z - 1}{z}\right)^x = \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n^{(x)} \cdot z^n,$$

$$\left\{\frac{log\,(1+z)}{z}\right\}^x = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(x)} \cdot z^n,$$

welche für ein z von hinreichend kleinem Modul zulässig sind und durch welche die Coefficienten A, B, C als Functionen des „Arguments"

* Grunert's Archiv, Bd. 9. Die Literatur über die Coefficienten dieser Entwickelungen ist eine ausserordentlich grosse und zerstreute. Es wird nügen noch auf den zweiten Band des Compendiums der höheren Analysis des Herausgebers dieser Zeitschrift hinzuweisen, durch welchen die Theorie ebendieser Entwickelungscoefficienten bekanntlich sehr gefördert worden ist.

es „Exponenten“ x und des auf das Gebiet der natürlichen Zahlen
st beschränkten „Index“ n erklärt werden.

In erster Linie habe ich nun darnach gestrebt, die Coefficienten von
r letzteren Beschränkung zu befreien, sie als Functionen des Index
as ganze Gebiet der complexen Zahlen zu expliciren. Zu einer sol-
Erweiterung der Definition kann man (abgesehen von der Zuziehung
ser Stetigkeitsbedingungen oder aber Entwickelungsformen) die be-
te, von U. Meyer aufgestellte Functional- oder Differenzengleich-
benutzen, welcher für eine natürliche Indexzahl die Coefficienten A,
B, C ohnehin genügen müssen. Das genannte Ziel zu erreichen,
ir so in der That mittelst convergenter Reihenentwickelungen wenig-
für den Fall gelungen — der allerdings praktisch gerade das ge-
e Interesse besitzt —, wo der Index beliebig negativ ist.

Im einer künftigen Theorie dieser Functionen gründlich vorzuarbei-
habe ich überhaupt die U. Meyer'sche und spätere Arbeiten einer
ion unterzogen — namentlich in Hinsicht auf die Vollständigkeit
wischen den Coefficienten auffindbaren Beziehungen und die Ueber-
ihres gegenseitigen Zusammenhanges. Dies gab den Anlass, die von
Coefficienten schon bekannten Relationensysteme (wie Recursionen
ummenformeln) durch Zufügung mancher neuen zu vermehren, sie
tig zu verallgemeinern und zu ergänzen.

ls Beispiel eines, wie ich glaube, neuen Ergebnisses kann ich mir
versagen, hier die Formel anzuführen

$$A_n^{(x)}(\mu) = \sum_{a=0}^{a=n} \mu^a B_a^{(x)} C_{n-a}^{(x+a)},$$

welche die Anordnung der A-Coefficienten nach Potenzen des
ents geleistet wird.

egen der Schwierigkeit, eine derartige umfang- und formelreiche
, die doch etwa zur Hälfte den Charakter einer Sammelarbeit trägt,
let zum Druck zu bringen — eine Schwierigkeit, die mich zu lange
veranlasst hat, mit einzelnen Untersuchungsergebnissen zurückzu-
—, gedenke ich jetzt wenigstens, in Gestalt von in sich abgerun-
Bruchstücken (dergleichen die nachfolgende Mittheilung von § 3
erstes vorstellt) besonders interessante Partien einstweilen in Zeit-
n zu veröffentlichen.

e Untersuchungen U. Meyer's lassen sich auch von vornher-
rallgemeinern, und zwar indem man, um die „erzeugende
n“ der Coefficienten A, B, C zu bilden, von den Reihenentwicke-
der Functionen $(1+z)^\mu$, resp. e^z und $log(1+z)$ die h ersten Glie-
ieht, durch das erste stehen gebliebene Glied dividirt und die so
nde Reihe auf die x^{te} Potenz erhebt. Zu den bisherigen Argu-
tritt bei den Entwickelungscoefficienten dann noch die „Ord-

nungszahl" h hinzu, welche leicht von der beschränkenden Anforde
dem Gebiet der natürlichen Zahlen anzugehören, zu befreien ist. D
zu potenzirende Reihe in der erzeugenden Function der A-Coeffic
kann alsdann als die allgemeine hypergeometrische Reihe erster Or
bezeichnet werden, und lässt sich noch immer eine Differenzenglei
für die so verallgemeinerten Entwickelungscoefficienten gewinne
gleicher Einfachheit, wie die U. Meyer'sche, welche nur einen
meter mehr enthält. Die Lösung derselben würde zugleich die d
gemeinen Differenzengleichung mit linearen Coefficienten bei zw
abhängigen Variablen

3) $(\alpha\nu+\beta\varkappa+\gamma)\mathsf{A}_\nu^{(\varkappa)}=(\alpha_1\nu+\beta_1\varkappa+\gamma_1)\mathsf{A}_{\nu-1}^{(\varkappa)}+(\alpha_2\nu+\beta_2\varkappa+\gamma_2)\mathsf{A}^{-}$

durch leichte Transformation liefern für den Fall, dass zwische
neun Coefficienten nur zwei Relationen bestehen, deren eine $\alpha_2:0$

und deren andere das Verschwinden der Determinante $\begin{vmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma\\ \alpha_1, & \beta_1, & +\\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2\end{vmatrix}$

ausdrückt.

Gleichwie bekanntlich

4) $$B_n^{(\varkappa)}=\lim_{\mu=\infty}\,.\,\mu^{-n}A_n^{(\varkappa)}(\mu),\quad\text{und}\quad C_n^{(\varkappa)}=A_n^{(\varkappa)}(0)$$

ist, so sind auch die, wie eben geschildert, verallgemeinerten - u
C-Coefficienten nur Grenz- resp. Specialfälle der entsprecheren
Coefficienten.

§ 2.

Zufolge der Beziehungen 4) besteht ein gewisser Dualismus zisch
den B- und den C-Coefficienten; dieselben spielen durchgängig d
von Gegenstücken zu einander.

Manchmal allerdings ist von den beiden einander zugeordn
ziehungen, welche die B- resp. C-Coefficienten einzeln betreff
die eine bis jetzt hervorgehoben oder erkannt worden.

So ist der Zusammenhang bekannt, in welchem die B-Coefcien
zu den höheren Differenzen der Potenzen von 0 stehen, nämlich (in
in England beliebten Schreibweise)

$$\Delta^k.0^n=n!\,B_{n-k}^{(k)}.$$

Diese Beziehung sammt der noch nirgends erwähnten ana
die C und der den beiden übergeordneten Beziehung für di
sich darstellen als eine Folge aus dem Bronwin'schen* Stze
Operationscalculs:

5) $$\Psi(v+\partial_u).\Phi(u)=\Phi(u+\partial_v).\Psi(v),$$

welcher unter der Voraussetzung gilt, dass die Functionen Φ ud Ψ
die vorkommenden Argumentwerthe u, v in gewöhnliche Potenzreen

* *Camb. and Dub. Math. Journal 1848,* vergl. auch Carmichael, Operati
calcul, übers. von Schnuse.

lt werden können, deren Coefficienten von beiden Variabeln un-
gig sind, und dass ausserdem die durch Interpretation des Aus-
s auf einer Seite der Gleichung entstehende Potenzreihe convergire,
orkommenden Symbole also einen Sinn haben. — Nimmt man nämlich
m für $lim\,\varepsilon = 0$ in Anspruch genommenen Specialfalle des Satzes

$$\Psi(\partial_\varepsilon) \,.\, \Phi(\varepsilon) = \Phi(\partial_\varepsilon) \,.\, \Psi(\varepsilon)$$

unction $\Psi(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^n}{n!}$ an und für $\Phi(z)$ die erzeugende Function un-
Coefficienten A, resp. B, C, so erhält man drei Darstellungen für
tzteren, welche zeigen, wie diese Coefficienten gebildet werden
n durch lauter an der Potenz ε^n vorzunehmende Operationen (des
rholten Differenzirens, Multiplicirens mit Constanten und Summi-
wenn schliesslich $\varepsilon = 0$ gesetzt wird.

ür ein positives ganzes $\varkappa = k$ modificiren sich die gedachten Dar-
gen leicht, wie folgt:

$$(n+k)!\,\mu^k A_n^{(k)}(\mu) = \{(1+\partial_\varepsilon)^\mu - 1\}^k \,.\, \varepsilon^{n+k},$$

$$(n+k)!\,B_n^{(k)} = (e^{\partial_\varepsilon} - 1)^k \,.\, \varepsilon^{n+k}, \quad (n+k)!\,C_n^{(k)} = \{log(1+\partial_\varepsilon)\}^k \,.\, \varepsilon^{n+k},$$

$lim\,\varepsilon = 0$ zu denken ist. Die zweite dieser Formeln ist die oben
nte Beziehung in Anbetracht, dass das Operationssymbol $\Delta_x = e^{\partial x} - 1$,
end einer synektischen Function $f(x)$ operirend, die Wirkung
muss, dieselbe in $f(x+1) - f(x)$ zu verwandeln. Das hierzu im
satz stehende Symbol $log\,(1+\partial_x)$ ist unschwer zu deuten.

n die Stellung meines im folgenden Paragraphen in Angriff ge-
nen Specialproblems genau zu kennzeichnen, will ich noch an
der wichtigeren Untersuchungen erinnern, bei denen die A, B, C
esentliche Rolle spielen und die Analogie der B, C besonders
ritt.

kannt ist das Auftreten der A, B, C bei dem Problem der mehr-
Differentiation nach x von $f(x^\mu)$, $f(e^x)$, $f(log\,x)$. Ich erinnere
an den Zusammenhang der B mit den Combinationssummen der
Zahlen, und zwar mit — der C ohne — Wiederholungen; an
le der C als „Facultätencoefficienten“ bei der Anordnung
omialcoefficienten nach Potenzen seines Exponenten nebst deren
ung, welche die Anordnung der natürlichen Potenz einer Zahl
nomialcoefficienten derselben leistet.

alog hierzu ist die Rolle der B- und C-Coefficienten bei den
allerdings unendlichen) Entwickelungen der reciproken Potenz
ciproken Facultäten, und *vice versa*, welche ebenfalls bekannt
n Bezug auf diese erwähne ich, dass ich aus semiconvergenten
welche nach fallenden Potenzen einer Variablen fortschreiten,
ntwickelung nach reciproken Facultäten noch immer convergente

Reihen gewonnen habe, was ich nächstens durch einige Beispiele zu belegen gedenke.

Endlich will ich auf das Auftreten der B, C bei der Entwicklung der Bernoulli'schen Function nach Binomialcoefficienten ihres (ersten) Argumentes, und *vice versa*, aufmerksam machen, welches von Herrn Leopold Schendel* entdeckt und (*l. c.*) unlängst mitgetheilt worden ist und welches ich unabhängig davon ebenfalls wahrgenommen habe.

Durch die Bernoulli'sche Function gewinnen die B mit dem Exponenten -1 ein besonderes Interesse. Bekannt ist der Zusammenhang derselben mit den Bernoulli'schen Zahlen und den harmonischen Reihen.

Die Art ihres Verschwindens für $n=\infty$ ist hiernach durchaus bekannt, indem (während $B_1^{(-1)}=-\frac{1}{2}$ ist) $B_{2n+1}^{(-1)}=0$ ist für $n>0$, und

$$7) \qquad \lim_{n=\infty} B_{2n}^{(-1)} = \frac{(-1)^{n+1}.2}{(2\pi)^{2n}}$$

ist. — Es soll nun das analoge für die $C_n^{(-1)}$ geleistet werden, für welche nur von Martin Ohm** eine nicht sonderlich nahe kommende obere Grenze ermittelt worden ist.

§ 3.

Aus der Gleichung

$$8) \qquad \frac{z}{\log(1+z)} = \int_0^1 (1+z)^u \, du$$

folgt durch Entwickelung nach Potenzen von z und Coefficientenvergleichung

$$9) \qquad C_n^{(-1)} = \int_0^1 (u)_n \, du,$$

wobei wir uns der Schlömilch'schen Bezeichnungsweise für die Binomialcoefficienten bedienen.

Indem man $(u)_n$ auf einen u entgegengesetzt enthaltenden Exponenten transformirt nach dem bekannten Schema

$$10) \qquad (u)_n = (-1)^n (n-u-1)_n,$$

sodann $n-u-1=v$ als neue Integrationsvariable einführt, kann man nebenbei gesagt, der Darstellung 10) auch noch die Form geben

---

* Die Bernoulli'schen Functionen und das Taylor'sche Theorem. Jena 1876.

** Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathemat.

)
$$C_n^{(-1)} = (-1)^n \int_{n-2}^{n-1} (v)_n \, dv .$$

Um nun die Art des Verschwindens dieser Function bei unendlich sendem n zu erfahren, drücken wir in 10) den Binomialcoefficienten durch Factoriellen oder durch Gammafunctionen aus:

)
$$(u)_n = \frac{u!}{n!\,(u-n)!} = \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(u-n+1)}$$

Mit Rücksicht auf einen bekannten Satz der letzteren kann man, ɔr und Nenner mit $\Gamma(n-u)$ multiplicirend und $n>1$ voraussetzend, estalt von

$$(u)_n = \frac{\sin(n-u)\pi}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(u+1)\,\Gamma(n-u)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\sin(n-u)\pi}{\pi} [u+1,\ n-u]$$

auf ein Euler'sches Integral erster Gattung $[u+1,\ n-u]$ zurückn.

Unter Benutzung der gewöhnlichen und auch der Richelot'schen des letzteren, welche bekanntlich den Vorzug besitzt, die Symmetrie unction bezüglich ihrer beiden Argumente auch äusserlich erkennen ısen, nämlich

$$[u+1,\ n-u] = \int_0^1 y^u (1-y)^{n-u-1} \, dy = \int_0^1 \frac{x^u + x^{n-u-1}}{(1+x)^{n+1}} \, dx$$

man dann für $C_n^{(-1)}$ zweierlei Doppelintegrale, für deren letzteres ɔdingung der Umkehrbarkeit der Integrationsfolge sich ganz unɔar als erfüllt zeigt; für das erstere werden wir die Berechtigung mkehrung *a posteriori* nachweisen.

erlegt man noch $\sin(n-u)\pi$ nach dem Additionstheorem des *sinus*, ɜen hernach die Integrationen nach u sich ausführen gemäss den ata

$$\int_0^1 e^{\alpha u} \cos u\pi \, du = -\frac{\alpha(1+e^{\alpha})}{\pi^2+\alpha^2}, \qquad \int_0^1 e^{\alpha u} \sin u\pi \, du = \frac{\pi(1+e^{\alpha})}{\pi^2+\alpha^2}$$

ɣar selbst bei beliebig complexem Werthe von n — eine Annahme, ɔ indess hier nicht weiter verfolgen wollen. Für eine natürliche erhalten wir die einfachen Ergebnisse

$$(-1)^{n-1} C_n^{(-1)} = \int_0^1 \frac{(1-y)^{n-2}\,dy}{\pi^2 + \left(\log\frac{y}{1-y}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1+x^{n-2}}{(1+x)^n} \cdot \frac{dx}{\pi^2 + (\log x)^2},$$

deren ersteres noch durch die Substitution $\frac{y}{1-y}=x$ dem zweiten ebe
genähert werden möge, wodurch es übergehen wird in:

17) $$(-1)^{n-1}\,C_n^{(-1)}=\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^n}\cdot\frac{dx}{\pi^2+(\log x)^2}.$$

Zerlegte man hier das Integral $\int_0^\infty$ in $\int_0^1+\int_1^\infty$ und führte im zweite
Theile $\frac{1}{x}$ statt x als Integrationsvariable ein, so würde man die zwei
Formel 16) erhalten, und da man diese Ableitung auch umgekehrt au
führen kann, so ist die Gleichung 17) ebensogut wie die zweite Form
16) bewiesen und der oben versprochene Nachweis jener Umkehrung
berechtigung geleistet.

Setzt man in 16) noch $x=e^{-\vartheta}$, in 17) lieber $x=e^{\vartheta}$, so ergeb
sich die Ausdrücke:

18) $$(-1)^{n-1}\,C_n^{(-1)}=\int_0^\infty \frac{e^{-\vartheta}+e^{-(n-1)\vartheta}}{(1+e^{-\vartheta})^n}\cdot\frac{d\vartheta}{\pi^2+\vartheta^2}=\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\vartheta}}{(1+e^{\vartheta})^n}\cdot\frac{d\vartheta}{\pi^2+\vartheta^2}$$

deren erster (und folglich auch zweiter) sich sogar für $n=$ ne
als giltig erweist, da hier direct ersichtlich ist, dass

$$C_1^{(-1)}=\int_0^1 (u)_1\,du=\tfrac{1}{2}=\int_0^\infty \frac{d\vartheta}{\pi^2+\vartheta^2}=\frac{1}{\pi}\,arctg\,\infty.$$

§ 4.

Wir wollen die bisherigen Ergebnisse beiläufig zur Ableitun einig
merkwürdiger Integralwerthe benutzen.

Setzt man die beiden Darstellungen 18) in die um ihr Anfangsg
$C_0^{(-1)}$ verminderte Reihenentwickelung der erzeugenden Function er
ein, welche Entwickelung zu ihrer Giltigkeit *mod.* $z<1$ voraussetzt,
lassen sich die unter das Integralzeichen tretenden Reihen al geo
trische summiren und man erhält, wenn durch z dividirt und nach
für z geschrieben wird:

19) $$\frac{1}{\log z}+\frac{1}{1-z}=2\int_0^\infty \frac{d\vartheta}{\pi^2+\vartheta^2}\cdot\frac{1+z\cos i\vartheta}{1+2z\cos i\vartheta+z^2},$$

sowie

20) $$\frac{1}{\log z}+\frac{1}{1-z}=\int_{-\infty}^\infty \frac{d\vartheta}{\pi^2+\vartheta^2}\cdot\frac{1}{1+ze^{\vartheta}}.$$

Von der der Herleitung anhaftenden Bedingung *mod.* $(z-1)<1$
diese beiden Formeln schliesslich leicht zu befreien und ist ihre
keit auf das ganze Gebiet der complexen Zahlen z mit Ausnahme
negativen Theiles der reellen Zahlenlinie auszudehnen durch die
rkung, dass die Integrale rechter Hand eindeutige, endliche und
e Functionen von z sein müssen, sofern nur der Nenner unter dem
alzeichen niemals 0 wird, d. h. z nicht gerade eine negative Zahl
Die Aenderung des Integrals stellt sich nämlich dar als Product
enderung von z in ein anderes Integral, welches dann *a fortiori*
rgiren muss; sie verschwindet daher zugleich mit dieser.

Da nun eine Function nur auf eine Art stetig über ein Gebiet
„fortgesetzt" werden kann, so muss die Gleichung 19) resp. 20)
über jenen Convergenzkreis der erzeugenden Function hinaus in
ig bleiben, wenn man die Definition der Function linker Hand bis
Ausnahmelinie heran stetig fortsetzt, d. h. wenn man unter *log z*
iglich „Principalwerth" zu nennenden Werth der Logarithmus-
on versteht, dessen imaginärer Theil zwischen $-\pi i$ (etwa excl.)
$-\pi i$ (incl.) liegt, so dass also die Function ihren Verzweigungs-
der Axe der negativen Zahlen entlang besitzt.

Die hiermit gewonnenen Formeln 19), 20) scheinen neu zu sein,
sich wenigstens nicht in der Bierens de Haan'schen Sammlung.
weite leistet gewissermassen die Partialbruchzerlegung der
Hand stehenden Function, zerlegt dieselbe nämlich in lauter Brüche
endlich kleinem) von z unabhängigem Zähler und bezüglich dieses
ntes linearem Nenner.

Anstatt des letzten Bruches könnte in 20) auch $\frac{e^{\vartheta}}{e^{\vartheta}+z}$ geschrieben
, wie man durch Einführung von $-\vartheta$ für ϑ erkennt.

Ich für die Euler (Mascheroni)'sche Constante $C(-1)=0{,}577215$ *,
che die Darstellung durch eine nach den Functionen $C_n^{(-1)}$ fort-
nde Reihe bekannt ist:

$$C(-1)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,C_n^{(-1)}$$

sich auf demselben Wege neue Integralformeln, da die unter
gralzeichen tretenden Reihen hier als logarithmische summirbar
Diese lauten:

$$)=\int_0^{\infty}\frac{d\vartheta}{\pi^2+\vartheta^2}\{e^{-\vartheta}\log(1+e^{\vartheta})+e^{\vartheta}\log(1+e^{-\vartheta})\}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\vartheta}\log(1+e^{\vartheta})}{\pi^2+\vartheta^2}\,d\vartheta,$$

---

* Das Motiv zur Bezeichnung $C(-1)$ entlehne ich Kinkelin's Allgemeiner
ler harmonischen Reihen, Basel 1862.

wo im letzten Ausdruck auch e^{ϑ} mit $e^{-\vartheta}$ vertauscht werden kann; im ersten kann man auch die Form geben:

$$C(-1)=\int_0^\infty \frac{d\vartheta}{\pi^2+\vartheta^2}\left\{(e^{\vartheta}+e^{-\vartheta})\log\left(\frac{\vartheta}{e^{\frac{\vartheta}{2}}+e^{\frac{-\vartheta}{2}}}\right)-\vartheta\cdot\frac{e^{\vartheta}-e^{-\vartheta}}{2}\right\}.$$

§ 5.

In 17) substituire ich $x=\frac{y}{n}$, zerlege das nach y zu nehmende $\int_0^\infty$ in $\int_0^\omega+\int_\omega^\infty$, wobei ich in Anwendung von Dirichlet's Princip der doppelten Unendlichkeit ω selbst, jedoch so, unendlich annehme, dass bei unendlich wachsendem n noch

$$23)\qquad \lim_{n=\infty}\cdot\frac{\omega^2}{n}=0$$

wird. Es empfiehlt sich hierzu besonders die Annahme $\omega=\log n$. Multipliciren wir noch mit $n\,(\log n)^2$, so kommt

$$24)\qquad (-1)^{n-1}\,C_n^{(-1)}\cdot n\,(\log n)^2=J_1+J_2,$$

wo

$$J_1=\int_0^\omega \frac{dy}{\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}\cdot\frac{(\log n)^2}{\pi^2+(\log y-\log n)^2},\qquad J_2=(\log n)^2\int_\omega^\infty \frac{dy}{\left(1+\frac{y}{n}\right)^n\left\{\pi^2+\left(l\right.\right.}$$

bedeutet. Ich werde nun zeigen, dass, wenn man n unendlich anwachsen lässt, $J_1=1$ und $J_2=0$ wird.

Aus Ampère's bekannter Restform der Mac-Laurin'schen Reihe in ihrer Anwendung auf die Function $\log(1+y)$ — wenn schon bei ersten Gliede abgebrochen wird — ist leicht abzuleiten, dass $\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n=e^y$ ist auch für solche unendliche y, für welche nur $\lim_{n=\infty}\frac{y}{n}=0$ bleibt.* Der zweite Factor unter dem Integralzeichen in J_1 hat den Grenzwerth 1, wie man schon für den grössten vorkommende Werth $\omega=\log n$ von y, um so mehr also für alle kleineren Werthe einsieht. Folglich ist in der Grenze

$$\lim J_1=\lim\int_0^{\log n} e^{-y}\,dy=\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)=1.$$

Die Elemente des Integrals in J_2 sind ferner sämmtlich positiv, und zwar wachsen beide Factoren des Nenners, welche für sich ebenfalls

* Vergl. auch Dirichlet-Meyer's Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale. Leipzig, Teubner, 1871, S. 98.

v sind, mit zunehmendem y. Setzen wir daher statt des zweiten rs im Nenner dessen Minimum, welches an der untern Grenze $y=\omega$ ndet, so erhalten wir etwas zu grosses, also ist

$$J_2 < \frac{(\log n)^2}{\pi^2+\left(\log\frac{\omega}{n}\right)^2}\int_{\omega}^{\infty}\frac{dy}{\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}.$$

wir zur Grenze über, wobei, wie wir oben gesehen haben, der vor dem Integralzeichen sich der Einheit nähert, und führen wir ch erübrigende Integration aus, so muss also für hinreichend grosse

$$J_2 < \frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\omega}{n}\right)^{n-1}} \text{ oder } < \left(1+\frac{\omega}{n}\right)e^{-\omega}$$

lglich ist $lim\, J_2 = 0$.

iermit ist der Satz gefunden:

$$\lim_{n=\infty}\cdot(-1)^{n-1}\, n\,(\log n)^2\, C_n^{(-1)} = 1,$$

uss also für ein sehr grosses n approximativ sein

$$C_n^{(-1)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(\log n)^2}.$$

es lässt sich als das Anfangsglied einer für hinreichend grosse n aren Reihenentwickelung betrachten; doch ist es mir bis jetzt elungen, die folgenden Glieder dieser Entwickelung zu finden.

§ 6.

lässlich der vorstehenden Mittheilung hat mich Herr Lüroth aufmerksam gemacht, dass dasselbe Ergebniss 25) sich auch aus n Weierstrass* aufgestellten und der Definition der Facto- ler reciproken Gammafunction mit zu Grunde gelegten Grenzwerthe

$$\lim_{n=\infty}\cdot\frac{n^{-u}\,Fc\,(n)}{Fc\,(u+n)} = 1$$

lasse, was ich — ausgehend von dem bekannten Stirling'schen rthe für $\lim_{n=\infty} \Gamma(n)$ — früher ebenfalls versucht, jedoch nicht führt hatte. Und zwar wie folgt:

h bekannter Transformation ist

$$(-1)^n(n-u-1)_n = (-1)^n\frac{Fc(n+1)\,Fc(-u)}{Fc(n-u)} = \frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{Fc(n)\,Fc(-u)}{Fc(n-u)};$$

nn man nach 26) setzen

$$(u)_n = (-1)^n\,Fc(-u)\,n^{-u-1}\cdot(1+\delta_n),$$

elle's Journal, Bd. 51 S. 1 figg.

wo δ_n eine übrigens auch von u abhängige Grösse bedeutet, die bei unendlich wachsendem n sicher verschwindet. Da aber

$$n^{-u} Fc(-u) = \frac{1}{n^u \Gamma(-u)} = \frac{-u}{n^u \Gamma(1-u)}$$

stets von einerlei Zeichen (negativ) bleibt, wenn u von 0 bis 1 wächst, während δ_n in diesem Intervall jedenfalls stetig mit u sich ändert sobald $n > 1$ gedacht wird), so ist der „erste Mittelwerthsatz" übe bestimmte Integrale anwendbar, und hat man, unter ε_n einen Mittelwerth der δ_n zwischen $u = 0$ und $u = 1$ verstehend,

$$28) \qquad (-1)^n \int_0^1 (u)_n \, du = \frac{1+\varepsilon_n}{n} \int_0^1 e^{-u \log n} Fc(-u) \, du,$$

wo dann also auch $\lim_{n=\infty} . \varepsilon_n = 0$ sein muss.

Man zerlege nun das Integral $\int_0^1$ rechts in $\int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^1$, unter der Annahme

$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{ln}}$, wo l bequemer für den natürlichen Logarithmus steht.

Wiederum aus dem Grunde, weil $Fc(-u)$ sein Zeichen nicht wechselt, muss alsdann, wenn der absolute Betrag einer Grösse durch Einschliessung derselben zwischen zwei Verticalstrichen ausgedrückt wird,

$$\left| \int_\varepsilon^1 e^{-u \ln} Fc(-u) \, du \right| < e^{-\varepsilon \ln} \int_\varepsilon^1 |Fc(-u)| \, du < e^{-\varepsilon \ln} \int_0^1 |Fc(-u)| \, du$$

sein, in Anbetracht, dass das Maximum des ersten Factors an der unteren Grenze $u = \varepsilon$ stattfindet. Man kann daher setzen

$$29) \qquad \int_\varepsilon^1 e^{-u \ln} Fc(-u) \, du = -\eta_n \, e^{-\sqrt{ln}} \int_0^1 |Fc(-u)| \, du,$$

wo $0 < \eta_n < 1$ ist; das Minuszeichen ist dadurch gerechtfertigt, dass sämmtliche Elemente des Integrals linker Hand negativ, diejenige rechter Hand positiv sind.

Setzt man ferner $Fc(-u) = -u \, Fc(1-u)$ ein, so ist abermals nach jenem Mittelwerthsatze (weil auch $e^{-u \ln}$ sein Zeichen nicht wechselt)

$$30) \qquad \int_0^\varepsilon e^{-u \ln} Fc(-u) \, du = -Fc(1-\vartheta_n \varepsilon) \int_0^\varepsilon e^{-u \ln} . u \, du$$

$$= Fc\left(1 - \frac{\vartheta_n}{\sqrt{ln}}\right) \cdot \frac{e^{-\sqrt{ln}}\left(\sqrt{ln}+1\right) - 1}{(ln)^2}$$

wo auch ϑ_n einen echten Bruch bedeutet.

Durch Einsetzung dieser Ergebnisse entsteht

$$(-1)^n n\,(ln)^2 \int_0^1 (u)_n\,du = -(1+\varepsilon_n)\,Fc\left(1-\frac{\vartheta_n}{\sqrt{ln}}\right)+e^{-\sqrt{ln}}\cdot X_n,$$

$$_n=(1+\varepsilon_n)\left[\left(\sqrt{ln}+1\right)Fc\left(1-\frac{\vartheta_n}{\sqrt{ln}}\right)-(ln)^2\,\eta_n\cdot\int_0^1 |Fc(-u)|\,du\right].$$

Wegen des Exponentialfactors verschwindet aber trotz der unend-erdenden Factoren $\sqrt{ln}$ und $(ln)^2$ der letzte Term rechter Hand in Anbetracht, dass die übrigen vorkommenden Factoren endliche n sind, und da $Fc(1)$ bekanntlich $=1$ ist, wird der Grenzwerth ken Seite $=-1$, wie zu zeigen gewesen.

Carlsruhe, im August 1879. Ernst Schröder.

Nachschrift des Herausgebers.

er von Herrn Prof. Schröder am Ende von § 7 gefundene Satz, ei grossen n näherungsweise

$$\int_0^1 (u)_n\,du = \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(ln)^2}$$

nd die vom Verfasser daran geknüpfte Bemerkung haben mich zu lüchtigen Untersuchung desselben Integrales veranlasst, deren Re-ich zur Ergänzung des vorigen Aufsatzes mittheile.

as Nächstliegende würde sein, $n=m+1$,

$$(u)_{m+1}=\frac{(-1)^m u}{m+1}\left(1-\frac{u}{1}\right)\left(1-\frac{u}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{u}{m}\right)$$

en und das Product der m binomischen Factoren nach Potenzen zu entwickeln. Hierbei tritt aber der Uebelstand ein, dass der ient von u, nämlich

$$-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}\right),$$

itig mit m ins Unendliche wächst, wodurch die Entwickelung un-ar wird. Man muss sich daher nach einer andern Reihe umsehen, jenen Coefficienten nicht enthält. Dies gelingt auf folgende ein-Weise.

r alle a und u besteht eine Gleichung von der Form

$$\left(1-\frac{u}{1}\right)\left(1-\frac{u}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{u}{m}\right)=b_0+b_1u+b_2u^2+b_3u^3+\ldots,$$

worin $b_0=1$ ist. Um die übrigen Coefficienten zu bestimmen, ne... man die Logarithmen, differenzire in Beziehung auf u und entwi... linker Hand Alles nach Potenzen von u, wobei zur Abkürzung

$$s_p=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{m^p}$$

sein möge; es ist dann

$$a-s_1-s_2u-s_3u^2-s_4u^3-\ldots=\frac{1\,b_1+2\,b_2u+3\,b_3u^2+\ldots}{b_0+b_1u+b_2u^2+b_3u^3+\ldots}.$$

Setzt man die noch disponible Constante $a=s_1$ und schafft den ... weg, so erhält man durch Coefficientenvergleichung

$$3)\quad \left\{\begin{array}{l} b_1=0,\quad b_2=-\frac{1}{2}s_2,\quad b_3=-\frac{1}{3}s_3, \\ b_4=\frac{1}{3}s_2{}^2-\frac{1}{4}s_4,\quad b_5=\frac{1}{6}s_2s_3-\frac{1}{5}s_5,\ \ldots \end{array}\right.$$

und überhaupt für $k>1$

$$4)\quad b_k=-\frac{1}{k}\left[b_0s_k+b_1s_{k-1}+\ldots+b_{k-2}s_2\right].$$

Wegen Nr. 2) und Nr. 1) ist nun

$$(u)_{m+1}=\frac{(-1)^m}{m+1}ue^{-au}(b_0+b_1u+b_2u^2+\ldots)$$

und hier bedarf es nur der Multiplication mit du und der nach... Integration zwischen den Grenzen $u=0$ und $u=1$, um das gesuchte I... tegral zu erhalten. Die rechts vorkommenden Einzelintegrale find... leicht recurirend; wird nämlich zur Abkürzung

$$J_k=\int_0^1 u^ke^{-au}\,du$$

gesetzt, so ist

$$5)\quad J_0=\frac{1-e^{-a}}{a}$$

und durch theilweise Integration

$$6)\quad J_k=\frac{k\,J_{k-1}-e^{-a}}{a}.$$

Das Endresultat lautet nach diesen Bemerkungen:

$$7)\quad \int_0^1 (u)_{m+1}\,du=\frac{(-1)^m}{m+1}(b_0J_1+b_1J_2+b_2J_3+\ldots).$$

Schon bei mässigen m gewähren die Formeln 3) bis 7) ein... lei... Rechnung. Bezeichnet man nämlich mit C die Constante des ...nteg... logarithmus, mit B_1, B_3, B_5 etc. die Bernoulli'schen Zahlen und ... S_p die Summe der unendlichen, für $p>1$ convergirenden Reih...

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots,$$

so findet man s_1, s_2, s_3 etc. mittelst der bekannten halbcon...ergen... Reihen

$$a = s_1 = C + lm + \frac{1}{2m} - \frac{B_1}{2m^2} + \frac{B_3}{4m^4} - \ldots,$$

$$= S_p - \frac{1}{(p-1)m^{p-1}} + \frac{1}{2m^p} - \frac{B_1 p}{1.2m^{p+1}} + \frac{B_3 p(p+1)(p+2)}{1.2.3.4m^{p+3}} - \ldots$$

hieraus nach Nr. 3) die Coefficienten b_2, b_3 etc. Noch einfacher die Sache, wenn m so gross ist, dass für die verlangte Genauigkeit s $\frac{1}{2m}$ vernachlässigt werden darf; es ist dann

$$a = C + lm, \quad e^{-a} = \frac{1}{m} e^{-C} = 0,$$

(für $p > 1$) $s_p = S_p$,

$$J_0 = \frac{1}{a}, \quad J_k = \frac{1.2 \ldots k}{a^{k+1}},$$

unter Rücksicht auf die Beziehung $2S_2^2 = 5S_4$

$$\int_0^1 (u)_{m+1}\, du = \frac{(-1)^m}{m+1} \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{3S_2}{a^4} - \frac{8S_3}{a^5} + \frac{5S_4}{2a^6} + \ldots \right\}.$$

Beispielsweise erhält man für $m = 1000000$

$= 14{,}392727$; $S_2 = 1{,}644934$; $S_3 = 1{,}202057$; $S_4 = 1{,}082323$

ls Summe der in Nr. 8) eingeklammerten Reihe

$$0{,}004814.$$

asselbe m giebt Herrn Prof. Schröder's Formel

$$\frac{1}{(l\,1000001)^2} = 0{,}005239.$$

eringe Uebereinstimmung beider Resultate erklärt sich leicht. Aus leichung 8) folgt nämlich die Schröder'sche Formel, wenn man eihe auf ihr erstes Glied reducirt und in diesem $a = C + lm$ durch $-1)$ ersetzt, d. h. $C = l\left(1 + \frac{1}{m}\right)$ nimmt; wegen $C = 0{,}577..$ ist dies ine etwas starke Vernachlässigung, und daher kann die Schröder-'ormel nur als eine erste Annäherung gelten.

Schlömilch.

PROGRAMM

zu den

am Schlusse des Unterrichtscursus 1854—1855

mit den Schülern der

Königlichen polytechnischen Schule

und der

Königlichen Baugewerkenschule

zu Dresden

zu haltenden Prüfungen.

INHALT.

Theorie der Kettenbrückenlinien von Prof. Dr. Oskar Schlömilch.

Nachrichten über die beiden Anstalten vom Director Prof. Dr. Hülsse.

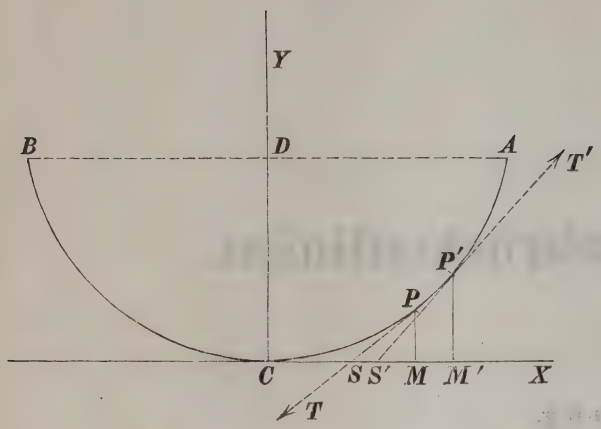
Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Theorie der Kettenbrückenlinien.

Einleitung.

eine an zwei festen Punkten aufgehangene Kette als Trägerin einer horizontal und gleichförmig ver-
Last benutzt wird, so krümmt sie sich nach einer bestimmten Linie, die im Allgemeinen Ketten-
nlinie heissen mag, in so fern die Tragkette einer Hängebrücke nahezu dieselbe Gestalt zeigt. Dass
reinstimmung keine vollständige sein kann, hat mehrere Ursachen; so ist z. B. die Last an einer
ücke in der That nicht gleichförmig vertheilt, da ausser der Fahrbahn auch die ihrer Grösse nach
lenen Tragstangen in die Last einzurechnen sind, ferner bildet die Tragkette vermöge ihrer Construk-
t eine Curve, sondern ein Polygon, dessen einzelne Seiten immer noch von namhafter Grösse sind etc.
hl darf eine theoretische Untersuchung über die Gestalt der Tragkette einer Hängebrücke jene Um-
isser Acht lassen; denn, was das Erste betrifft, so ist namentlich bei scharf gespannten Ketten die
differenz zwischen den längsten und kürzesten Tragstangen eine so geringe, dass sie gegen die be-
Summe von dem Gewichte der Fahrbahn und der zufälligen Belastung als verschwindend erscheinen
nsichtlich des zweiten Umstandes aber ist zu erinnern, dass jede Theorie nur ideale Fälle betrachten
t dass es bei ihrer Anwendung auf die Praxis sich nur darum handelt, die Stabilität des betreffenden
s für die extremsten in Wirklichkeit selten oder gar nicht eintretenden Fälle zu sichern. Eben des-
zieht sich auch die ganze Theorie der Kettenbrücken nur auf den fast ausser den Grenzen der Mög-
iegenden Fall der vorausgesetzten Maximalbelastung und es hat offenbar keinen Werth, für diesen die
es einzelnen Kettengliedes mit äusserster Genauigkeit zu bestimmen; wollte man dies aber einmal, so
m nicht allein auf die polygonale Form der Kette, sondern auch auf die ungleiche Vertheilung der
gen und der Unterzüge, auf die möglicherweise verschiedene Festigkeit der einzelnen Kettenglieder,
eibung an den Bolzen etc. Rücksicht nehmen müssen, weil man sonst Gefahr liefe, durch die Nicht-
g der letzteren Umstände an Genauigkeit zu verlieren, was man durch Einrechnung des ersten ge-
u haben glaubte. Uebrigens zeigen auch die nach beiden Annahmen ausgeführten Theorien eine für
s völlig genügende Uebereinstimmung in den Resultaten und unterscheiden sich nur darin von ein-
ss die nach der polygonalen Hypothese fortlaufende Zahlenrechnung einen weit grösseren Zeitauf-
rdert.

Allgemeine Gleichungen des Gleichgewichtes einer belasteten Kette.



Durch den tiefsten Punkt C der Kette AC wir die Abscissenachse in horizontaler, die Or achse in vertikaler Richtung und bezeichnen die CM eines Curvenpunktes P mit x, seine Ordin mit y, den von C nach P gerechneten Bogen C und den spitzen Winkel MSP, welchen die Tan P mit der Abscissenachse bildet, durch τ; fern der Querschnitt der Kette im Punkte P, die a Stelle auf den Querschnitt q wirkende Spannu das Gewicht der Volumeneinheit des Kettenmater endlich bedeute G das Gewicht der Längeneir Brückenbahn sammt deren Maximalbelastung i schluss des auf die Längeneinheit reducirten Gewichtes der Tragstangen.

Lassen wir den Bogen s um sein Differential $PP' = ds$ zunehmen, so wachsen auch x, y, um ihre Differentiale und es entsteht ein Kettenelement, auf welches vier Kräfte wirken, nämlich d in tangentialen Richtungen an den Endpunkten P und P' angreifenden Spannungen T und $T + dT$ das eigene Gewicht des Kettenelementes, endlich das Gewicht von demjenigen Theile der Brückenbahn w das genannte Element tragen muss. Hinsichtlich jener zwei Spannungen ist zu bemerken, dass sie in t gesetzten Richtungen wirken, dass folglich T mit der Abscissenachse den Winkel $\tau + 180^0$ und $T + d$ derselben Achse den Winkel $\tau + d\tau$ einschliesst; zerlegt man jede dieser Kräfte in zwei den Cordinat parallele Componenten, so sind die Seitenkräfte von T

$$T\cos(180^0 + \tau) = -T\cos\tau \text{ und } T\sin(180^0 + \tau) = -T\sin\tau,$$

dagegen die von $T + dT$:

$$(T + dT)\cos(\tau + d\tau) \text{ und } (T + dT)\sin(\tau + d\tau).$$

Ferner ist qds das Volumen des Kettenelementes PP', mithin γqds sein Gewicht, endlic von dem Kettenelemente getragene Stück der Fahrbahn die Horizontalprojektion von ds, nämlich d Länge mithin Gdx zum Gewicht; letztere zwei Kräfte wirken vertikal abwärts, d. h. ihre Richtung mit der Abscissenachse den Winkel 270^0 und demnach sind die Componenten dieser Kräfte

$$0 \text{ und } -\gamma qds, \quad 0 \text{ und } -Gdx.$$

Zum Gleichgewichte des Elementes ist es nun im vorliegende Falle nothwendig und hinreic die Summe aller horizontalen und ebenso die Summe aller vertikalen Kräfte der Null gleich sei. Dara gen die beiden Bedingungsgleichungen

$$(T + dT)\cos(\tau + d\tau) - T\cos\tau = 0$$
$$(T + dT)\sin(\tau + d\tau) - T\sin\tau - \gamma qds - Gdx = 0$$

denen man auch die folgende compendiösere Gestalt ertheilen kann:

$$1) \quad d(T\cos\tau) = 0 \text{ und } d(T\sin\tau) = \gamma qds + Gdx.$$

Die erste dieser Gleichungen ist unmittelbar integrabel und liefert

$$T\cos\tau = \text{Const.};$$

die Bedeutung der Integrationsconstanten ergiebt sich aus der Specialisirung $x = 0$, wodurch τ zu ull gleich der im Scheitel C vorhandenen Spannung wird; bezeichnen wir letztere mit T_0, so folgt mithin

$$2) \quad T\cos\tau = T_0$$

in liegt der bekannte Satz, dass bei jeder Kettenbrückenlinie die Horizontalcomponente der Spannung nämlich der Scheitelspannung gleich ist.

Aus der Gleichung 2) folgt durch Reduktion auf T

$$3) \quad T = \frac{T_0}{\cos \tau} = T_0 \sec \tau$$

n man von den bekannten Formeln

$$\cos \tau = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \tau = \frac{dy}{ds}, \quad \tan \tau = \frac{dy}{dx}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

macht, so wird weiter

$$4) \quad T = T_0 \frac{ds}{dx} = T_0 \, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Den vorstehenden Werth von T nebst dem Werthe von $\sin \tau$ substituiren wir in die zweite der unter rzeichneten Gleichgewichtsbedingungen und erhalten unter Rücksicht auf den Umstand, dass T_0 unver- ist,

$$T_0 \, d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \gamma q \, ds + G \, dx$$

n wir wie üblich $\frac{dy}{dx}$ mit y' bezeichnen und ds durch dx und y' ausdrücken

$$5) \quad T_0 \, dy' = (\gamma q \sqrt{1 + y'^2} + G) \, dx.$$

Die weitere Behandlung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung hängt nun wesentlich davon ab, uerschnitt q constant oder variabel genommen wird; es trennt sich daher die Untersuchung von selbst heile.

Die Form der Kette von gleichem Querschnitt.

Durch Sonderung der Variabelen und nachherige Integration ergiebt sich aus Nr. 5) die Gleichung

$$6) \quad T_0 \int \frac{dy'}{G + \gamma q \sqrt{1 + y'^2}} = \int dx = x + \text{Const.};$$

bezügliche Integration kann hier ohne Schwierigkeit ausgeführt werden, gleichwohl ist mit dem nicht viel anzufangen; die gefundene Gleichung zwischen y' und x, welche im Allgemeinen die Form besitzt, muss nämlich auf y' reducirt werden und in der neuen unter der Form $y' = \varphi(x)$ enthalte- iung wäre dann für y' sein Werth $\frac{dy}{dx}$ zu substituiren und durch eine nochmalige Integration nach na

$$y = \int \varphi(x) \, dx = \psi(x) + \text{Const.}$$

ne Gleichung der Kettenbrückenlinie abzuleiten. Von diesen Operationen ist schon die erste (die auf y') in endlicher Form unausführbar, weil das nach y' genommene Integral (in Nr. 6) gleich- arithmen und Potenzen von y' enthält, wodurch die aufzulösende Gleichung eine transcendente Form e sich von selbst versteht, wird dann auch die spätere Integration etwas zu complicirter Natur, als in wesentlicher praktischer Gebrauch von den resultirenden Endformeln machen liesse. Unter diesen n bleibt nichts übrig, als die Anwendung von Näherungsmethoden, die sich hier sehr ungesucht

rste Annäherung. Bei scharf gespannter Kette ist die Kettenbrückenlinie ACB eine sehr flache selbst der grösste unter den verschiedenen Tangentenwinkeln τ verhältnissmässig klein; dasselbe n $\tau = y'$ und man kann demnach den kleinen Bruch y'^2 gegen die Einheit vernachlässigen; dies der Gleichung 6) die folgende:

$$7) \quad \frac{T_0}{G+\gamma q} y' = x + \text{Const.}$$

Für $x = 0$ wird $\tau = 0$ mithin auch $y' = \tan\tau = 0$, woraus Const. $= 0$ folgt; setzt man für Werth $\frac{dy}{dx}$ und integrirt nochmals, so ergiebt sich als Gleichung der Kettenbrückenlinie

$$8) \quad y = \frac{G+\gamma q}{2\,T_0} x^2$$

wobei die Integrationsconstante weggelassen wurde, weil x und y gleichzeitig verschwinden müss
Gleichung 8) spricht das bekannte Resultat aus, dass die Kette einer scharf gespannten Hängebrück
parabolisch gekrümmt ist; die Achse der betreffenden Parabel fällt mit der Ordinatenachse, ihr Sc
dem tiefsten Punkte der Kette zusammen und ihr Halbparameter ist $\frac{T_0}{G+\gamma q}$. Die Gleichung 8) bes
Grösse der einzelnen Ordinaten, die Formel 7) giebt (wegen Const. $= 0$ und $y' = \tan\tau$)

$$9) \quad \tan\tau = \frac{G+\gamma q}{T_0} x$$

und damit die Lage der einzelnen Kettenglieder, die Gleichung 3) endlich, oder was Dasselbe ist,

$$10) \quad T = T_0 \sqrt{1+\tan^2\tau} = T_0 \sqrt{\left[1+\left(\frac{G+\gamma q}{T_0} x\right)^2\right]}$$

lehrt die Spannung in jedem einzelnen Punkte kennen, so bald die Scheitelspannung T_0 bekannt ist

Wenn es darauf ankommt, zwei ihrer Entfernung nach bekannte Punkte durch eine Kettenr
verbinden, so kennt man unmittelbar die Spannweite, welche $2a$ heissen möge, ferner kann der Pfeil e
welcher mit b bezeichnet werden soll, willkürlich gewählt werden (er beträgt in der Regel $\frac{1}{14}$ bis $\frac{1}{12}$ cr
weite), bekannt sind ausserdem die Gewichte G und γ, unbekannt dagegen die Grössen q und T_0.
bestimmen, erinnern wir zunächst daran, dass die Kettenbrückenlinie durch die Aufhängepunkte ge
also für $x = a$, $y = b$ werden muss; dies giebt

$$11) \quad b = \frac{G+\gamma q}{2\,T_0} a^2 \text{ oder } \frac{G+\gamma q}{T_0} a = \frac{2b}{a}.$$

Weil ferner eine bestimmte Sicherheit der Construktion vorauszusetzen ist, muss die auf di
einheit des Kettenquerschnittes fallende grösste Spannung ein aliquoter Theil der absoluten Fesgk
Kettenmateriales sein. Nun findet die grösste Spannung, welche T_a heissen möge, an den Aufhäng
statt, sie ist nach Nr. 10)

$$T_a = T_0 \sqrt{\left[1+\left(\frac{G+\gamma q}{T_0} a\right)^2\right]} = T_0 \sqrt{\left[1+\left(\frac{2b}{a}\right)^2\right]}$$

auf die Flächeneinheit des Querschnittes kommt demnach die Spannung

$$\frac{T_a}{q} = \frac{T_0 \sqrt{a^2+4b^2}}{qa}$$

und wenn dieselbe mit $n$facher Sicherheit ertragen werden soll, so muss die Gleichung $\frac{T_a}{q} = \frac{F}{n}$ tat
worin F die absolute Festigkeit des Kettenmateriales für die Flächeneinheit bezeichnet und selbstv
auf das nämliche Mass, wie a, b und q zu beziehen ist. Nennen wir zur Abkürzung f den Quotie
haben wir als zweite Bedingung

$$12) \quad f = \frac{T_0 \sqrt{a^2+4b^2}}{aq};$$

durch Multiplikation der Gleichungen 11) und 12) fällt die Unbekannte T_0 heraus, die übrig bleibend Gl

$$bf = \frac{(G+\gamma q)\, a \sqrt{a^2+4b^2}}{2q}$$

dient zur Bestimmung von q und giebt

13) $$q = \frac{aG\sqrt{a^2+4b^2}}{2bf - a\gamma\sqrt{a^2+4b^2}} = \frac{G}{\frac{2bf}{a\sqrt{a^2+4b^2}} - \gamma},$$

weite Form für die praktische Rechnung etwas bequemer ist. Aus Nr. 11) ergiebt sich nun für die ; im Scheitel

14) $$T_0 = \frac{a^2(G+\gamma q)}{2b},$$

aten, Tangenten und übrigen Spannungen sind durch die Formeln bestimmt:

15) $$y = \frac{bx^2}{a^2}, \quad \tan\tau = \frac{2bx}{a^2}, \quad T = T_0 \sec\tau.$$

Um endlich die ganze Kettenlänge S und ihr Gewicht Γ zu ermitteln, bedarf es noch der Ausführung r Formel

$$\tfrac{1}{2}S = \int_0^a dx\sqrt{1+y'^2} = \int_0^a dx\sqrt{\left(1+\frac{4b^2}{a^4}x^2\right)}$$

n Integration; setzt man zur Abkürzung

$$c = \frac{a^2}{2b}$$

Halbparameter der Parabel ist, so ergiebt sich

$$S = a\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c} + cl\left(\frac{a+\sqrt{a^2+c^2}}{c}\right)$$

das Gewicht

16) $$\Gamma = \gamma q\left\{\frac{a\sqrt{a^2+c^2}}{c} + cl\left(\frac{a+\sqrt{a^2+c^2}}{c}\right)\right\}.$$

ls Beispiel diene eine Kettenbrücke von 420′ Spannweite und 30′ Pfeil, deren Kette eine Maximal-400 Centnern (excl. das eigene Gewicht der Kette) mit dreifacher Sicherheit tragen soll. Hier ist $b = 30'$, $G = 20$ Centner, $n = 3$, die Festigkeit pro Quadratfuss $F = 144.500$ Centner, mithin 48.500, endlich $\gamma = 5$ Centner. Die Formel 13) liefert

$$q = \frac{20}{\frac{2.30.48.500}{210.\sqrt{47700}} - 5} = \frac{4}{5{,}279} = 0{,}7577\,\square' = 109\,\square'' \text{ circa},$$

lspannung ergiebt sich aus Nr. 14)

$$T_0 = \frac{44100\,(20+3{,}7886)}{60} = 17485 \text{ Centner}.$$

e übrigen Verhältnisse gelten die Gleichungen

$$y = \frac{x^2}{1470}, \quad \tan\tau = \frac{x}{735}, \quad T = 17485.\sec\tau,$$

$$c = 735', \quad S = 425',6 \quad \Gamma = 1612{,}4 \text{ Centner}.$$

weite Annäherung. Bei der vorigen Betrachtung wurde y' als so klein angenommen, dass gegen die Einheit vernachlässigt werden durfte; will man aber genauer verfahren, so wird man erst vierte etc. Potenz von y' weglassen und demgemäss $\sqrt{1+y'^2} = 1 + \frac{1}{2}y'^2$ setzen. Die Funda-hung 6) geht unter diesen Umständen in die folgende über

$$T_0 \int \frac{dy'}{G + \gamma q + \frac{1}{2}\gamma q y'^2} = x + \text{Const.}$$

usführung der Integration

$$\frac{T_0\sqrt{2}}{\sqrt{(G+\gamma q)\gamma q}}\,\text{Arctan}\,\frac{y'\sqrt{\gamma q}}{\sqrt{2(G+\gamma q)}} = x + \text{Const.}$$

Versteht man wie üblich unter Arctan den spitzen Bogen, welcher eine gegebene Tangent
so ist Arctan $0 = 0$, mithin für $x = 0$ und $y' = 0$ auch Const. $= 0$; durch Reduktion auf y' wird fe

$$17)\quad y' = \sqrt{\frac{2(G+\gamma q)}{\gamma q}}\tan\frac{x\sqrt{2\gamma q(G+\gamma q)}}{2T_0},$$

endlich, wenn man mit dx multiplicirt, unter Benutzung der Formel $\int \tan mx\,dx = \frac{1}{m} l \sec mx$ integ
berücksichtigt, dass x und y gleichzeitig verschwinden müssen,

$$18)\quad y = \frac{T_0}{\gamma q} l \sec\frac{x\sqrt{2\gamma q(G+\gamma q)}}{2T_0}.$$

Die Aufgabe, aus den gegebenen Grössen a, b, G, γ und f, die beiden Unbekannten q und
alle Verhältnisse der Kette zu bestimmen, gestattet jetzt keine so einfache Lösung; man hätte nämli
die Gleichungen

$$b = \frac{T_0}{\gamma q} l \sec\frac{a\sqrt{2\gamma q(G+\gamma q)}}{2T_0}.$$

$$f = \frac{T_a}{q} = \frac{T_0}{q}\sqrt{\left[1+\frac{2(G+\gamma q)}{\gamma q}\tan^2\frac{a\sqrt{2\gamma q(G+\gamma q)}}{2T_0}\right]},$$

deren Auflösung in endlicher Form desswegen nicht möglich ist, weil sie die beiden Unbekannten q u
algebraischer und transcendenter Gestalt zugleich enthalten. Es würde daher nichts Anderes übri
als eine Auflösung durch successive Approximation, wobei man die in Nr. 13) und 14) angegeben
von q und T als erste Näherungswerthe anzusehen hat.

Die vortheilhafteste Form der Kette.

Aus der Gleichung $T = T_0 \sec\tau$ geht unmittelbar hervor, dass die auf die Flächeneinheit d
querschnittes fallende Spannung

$$\frac{T}{q} = \frac{T_0}{q}\sec\tau$$

vom Scheitel nach den Aufhängepunkten zu beständig wächst, wenn der Querschnitt der Kette üb
selbe ist; diese Ungleichheit jener Spannung hat eine ungleiche Sicherheit der ganzen Construktion u
denn so bald an den Aufhängepunkten schon die nöthige Sicherheit vorhanden ist, so findet im Sc
noch grössere Sicherheit statt, die nicht nur überflüssig, sondern sogar schädlich ist, weil das eige
der Kette kleiner ausgefallen wäre, wenn man ihren Querschnitt im Scheitel geringer und zwar e
so gross genommen hätte, als zur Erlangung derselben Sicherheit, wie an den Aufhängepunkten, öth
würde. Soll nun an allen Stellen die gleiche $n$fache Sicherheit vorhanden sein, so gehört dazu die ed
dass der Quotient $\frac{T}{q}$ constant und zwar $= \frac{F}{n} = f$ sei; es ist folglich, wenn q_0 den Querschnitt a
bezeichnet

$$\frac{T}{q} = \frac{T_0}{q_0}\ \text{woraus}\ q = \frac{q_0}{T_0}T$$

oder wegen des Werthes von T

$$19)\quad q = q_0\sec\tau = q_0\sqrt{1+y'^2}.$$

Die Gleichung 6) erhält jetzt die Form

$$T_0\int\frac{dy'}{G+\gamma q_0(1+y'^2)} = x + \text{Const.}$$

welche wegen des rationalen Nenners leicht weiter zu behandeln ist. Die Integration giebt

$$\frac{T_0}{\sqrt{(G+\gamma q_0)\gamma q_0}} \operatorname{Arctan} \frac{y'\sqrt{\gamma q_0}}{\sqrt{G+\gamma q_0}} = x + \text{Const.}$$

ir $x=0$ auch $y'=0$ wird, so folgt Const. $=0$. Ferner ist durch Reduktion auf y'

$$20)\quad y' = \sqrt{\frac{G+\gamma q_0}{\gamma q_0}} \tan \frac{x\sqrt{\gamma q_0 (G+\gamma q_0)}}{T_0}$$

Multiplikation mit dx und nochmaliger Integration

$$21)\quad y = \frac{T_0}{\gamma q_0} l \sec \frac{x\sqrt{\gamma q_0 (G+\gamma q_0)}}{T_0},$$

ne Integrationsconstante hinzuzufügen ist, weil x und y gleichzeitig verschwinden müssen.
ind die halbe Spannweite a, der Pfeil b und die Sicherheit n gegeben, so gelten die Gleichungen

$$b = \frac{T_0}{\gamma q_0} l \sec \frac{a\sqrt{\gamma q_0 (G+\gamma q_0)}}{T_0} \text{ und } \frac{T_0}{q_0} = \frac{F}{n} = f;$$

veiten Gleichung folgt $T_0 = q_0 f$ und durch Substitution dieses Werthes in die erste Gleichung wird
er

$$b = \frac{f}{\gamma} l \sec \frac{a\sqrt{\gamma q_0 (G+\gamma q_0)}}{q_0 f},$$

e hier vorkommende Unbekannte q_0 findet man dadurch, dass man erst

$$\frac{a\sqrt{\gamma q_0 (G+\gamma q_0)}}{q_0 f} = \Theta$$

Hilfswinkel Θ nach der Formel

$$22)\quad l \sec \Theta = \frac{b\gamma}{f}$$

q_0 aus der vorigen Gleichung berechnet; für q_0 und nachher für T_0 ergeben sich so die Formeln

$$23)\quad q_0 = \frac{\frac{G}{\gamma}}{\left(\frac{\Theta f}{a\gamma}\right)^2 - 1} \text{ und } T_0 = q_0 f,$$

stverständlich Θ in Bogenmass auszudrücken ist. Hat man q_0 und T_0 nach diesen Formeln bestimmt,
an die in den Gleichungen 20) und 21) vorkommenden constanten Faktoren ein für alle Mal be-
ndem man etwa setzt

$$24)\quad h = \frac{T_0}{\sqrt{\gamma q_0 (G+\gamma q_0)}}, \quad k = \sqrt{\frac{G+\gamma q_0}{\gamma q_0}} = \frac{T_0}{\gamma q_0 h} = \frac{f}{\gamma h};$$

Rechnung geht dann nach den Formeln

$$25)\quad y = \frac{f}{\gamma} l \sec \frac{x}{h}, \quad \tan \tau = k \tan \frac{x}{h}, \quad q = q_0 \sec \tau, \quad T = qf,$$

erst einfach, wenn man Tafeln der natürlichen Logarithmen der trigonometrischen Verhältnisse zur
).

n endlich das Gewicht der Kette zu bestimmen, braucht man sich nur zu erinnern, dass $\gamma q ds$ das Ge-
Kettenelementes bedeutet, dass mithin die von $x=0$ bis $x=a$ genommene Summe aller Elementar-
is Gewicht der halben Kette angiebt. Nennen wir letzteres wieder Γ, so ist

$$\Gamma = 2\gamma \int_{x=0}^{x=a} q\, ds = 2\int_0^a q_0 (1+y'^2)\, dx$$

ge des Werthes von $y' = \tan \tau$

Man findet eine solche Tafel u. A. in J. C. Schulze's Sammlung logarithmischer, trigonometrischer und anderer
er Tafeln, Berlin 1778. bei Mylius, 2 Bde.

$$\Gamma = 2\gamma q_0 \int_0^a \left(1 + k^2 \tan^2 \frac{x}{h}\right) dx;$$

das unbestimmt genommene Integral hat den Werth

$$x + k^2 \left(h \tan \frac{x}{h} - x\right)$$

man erhält daher durch Einführung der Grenzen $x = a$ und $x = 0$

$$\Gamma = 2\gamma q_0 \left[a + k^2 \left(h \tan \frac{a}{h} - a\right)\right].$$

Die Formel vereinfacht sich durch die Bemerkung, dass $\frac{a}{h}$ einerlei mit dem vorhin benutzt winkel Θ, mithin $h = \frac{a}{\Theta}$ ist; man findet so

$$26) \quad \Gamma = 2a\gamma q_0 \left[1 + k^2 \left(\frac{\tan \Theta}{\Theta} - 1\right)\right].$$

Beispielsweise wenden wir diese Formeln wieder auf den schon früher betrachteten Fall an chem $a = 210'$, $b = 30'$, $G = 20$ Centner, $n = 3$, $f = 48.500$ Centner und $\gamma = 5$ Centner gesetzt ist dann nach Formel 22)

$$l \sec \Theta = \frac{5.30}{48.500} = 0{,}00625 \text{ mithin } \Theta = 6^0 24' = 0{,}1117;$$

ferner nach Formel 23)

$$q_0 = \frac{4}{\left(\frac{48.500 \cdot 0{,}1117}{210.5}\right)^2 - 1} = \frac{4}{5{,}5178} = 0{,}7249 \,\square' = 100 \,\square'' \text{ circa}$$

$$T_0 = \frac{4}{5{,}5178} \cdot 48.500 = 17438 \text{ Centner.}$$

Die beiden Constanten h und k sind im vorliegenden Falle

$$h = \frac{17438}{\sqrt{3{,}6246 \cdot 23{,}6246}} = 1884{,}5; \quad k = \frac{48.500}{5.1884{,}5} = 2{,}547,$$

mithin die Gleichungen für die Ordinaten, Tangentenwinkel, Querschnitte und Spannungen

$$y = 4800 \cdot l \sec \frac{x}{1884{,}5}, \quad \tan \tau = 2{,}547 \cdot \tan \frac{x}{1884{,}5},$$

$$q = 0{,}7249 \cdot \sec \tau, \quad T = 24000 \cdot q;$$

hiernach beträgt z. B. an den Aufhängepunkten der Tangentenwinkel $15^0 57'$, der Querschnitt $= 108{,}57 \,\square''$ und die Spannung 18095 Centner; für das Gewicht der ganzen Kette ergiebt sich 1567 Der Vergleich mit den Dimensionen der früher berechneten parabolischen Tragkette zeigt eine Mar niss von 48,7 Centner.

Schlömilc

Schulnachrichten.

---

r des Geburtsfestes des höchstseligen Königs Friedrich August wurde am 18. Mai 1854
m Schulactus begangen, dem der K. Commissar der Anstalt, Herr Geheimer Rath Dr. Weinlig
, und in welchem Herr Prof. Schubert durch die Festrede den Staatsorganismus mit einem grösse-
rke verglich, überall Gelegenheit nehmend, die Schüler auf ihre Stellung im Staatsleben überhaupt
re Pflichten dem hochverehrten Staatsoberhaupte gegenüber aufmerksam zu machen. Der Unter-
rachte hierauf die Wohlthaten zur Veröffentlichung, welche im nunmehr beendeten Cursus theils als
, theils als Schulgeldbefreiungen einzelnen Schülern durch die wohlwollende Fürsorge der vorge-
atsbehörde zu Theil werden sollten.

Wer hätte da wohl ahnen mögen, dass der unerforschliche Rathschluss des höchsten Lenkers der
en Schicksale dem segenvollen Wirken des allgeliebten Landesvaters sobald das Ziel bestimmen und
mten Vaterlande so tiefe Trauer bereiten würde!

er Director der Anstalt lenkte daher bei dem am 12. December 1854 gehaltenen feierlichen Schul-
Geburtstagsfeier Sr. Majestät des Königs Johann die Blicke der versammelten Schüler
hnischen und der Baugewerkenschule zuförderst zurück auf das erhabene Bild des höchstseligen
l schilderte sein dem Wohle des Landes, der Kunst und Wissenschaft gewidmetes Leben in kurzen
ierauf beleuchtete Herr Prof. Schlömilch die Frage: „wie haben sich die Zöglinge der beiden
auf ihr künftiges bürgerliches Leben würdig vorzubereiten?“ und hob als wesentliche Momente her-
nschaftliche Bildung, Kenntniss der Zwecke und Organisation des Staates, sowie rege Theilnahme
gelegenheiten des öffentlichen Lebens, gepaart mit dem Vertrauen, welches der Regierung von Sei-
gierten gebührt. Zum Schlusse wiess derselbe mit Begeisterung auf das erhabene Vorbild Sr. Ma-
es allverehrten Königs hin, zur Nacheiferung kräftig anmahnend. Der Gesangverein der Schüler
eier mit einem Choral eröffnet und schloss dieselbe mit dem Sachsenliede.

dem am 21. Mai 1854 dahingeschiedenen früheren Staatsminister Bernhard von Lindenau ver-
olytechnische Schule einen ihrer grössten Wohlthäter. Nicht nur die Fürsorge, welche derselbe in
eren amtlichen Stellung dem Entwickelungsgange der Anstalt widmete, sondern namentlich auch die
m Namen bis zu seinem Tode bestehende Stiftung eines Reisestipendiums, als eines Theiles des von
senschaftlichen und wohlthätigen Zwecken bestimmten Pensionsbetrags, auf welchen er im Jahre
htete, bleiben mit unverlöschlichen Zügen in das Geschichtsbuch der polytechnischen Schule ein-
Wie gross der Nutzen ist, den diese Stiftung für Fortbildung der Zöglinge bewirkt hat, ergiebt
erer, welche derselben theilhaftig geworden sind; es haben nehmlich das Reisestipendium bereits

Carl Böhmer,
Carl Louis Galle,
August Hermann Nauwerk,
Carl Heinrich Stier,
Oswald Adolph Aster,
Gustav Werther,
Rudolph Döhnert,
Gustav Lehmann;

ausserdem ist dasselbe noch bewilligt an:

Friedrich Hermann Fritzsche,
Heinrich Adolph Ballenberger,
Carl Gottfried Uhmann.

Aus dem Lehrercollegium der polytechnischen Schule entriss der Tod am 20. A den Lehrer der französischen Sprache Friedrich Schumann-Leclercq, dem der Ruhm einer sein ga sen durchdringenden Humanität, aufopfernde Pflichttreue und ächter Collegialität in das Grab folgt wurde der frühere Prof. der Chemie Jähkel, welcher von 1833 bis 1848 der Anstalt seine Kraft und sein reiches Wissen nutzbar gemacht hatte, am 17. Januar 1855 von der ihn seit letzterem Jah drückenden Krankheit erlöst.

In das Lehrercollegium traten neu ein:

Herr Gymnasiallehrer Immanuel Ferdinand Schöne zur Uebernahme des deutschen Sp richts in der III. Classe unterer Abtheilung von Ostern 1854 an, nachdem Herr Pr. auf seinen Wunsch von diesem Unterrichte entbunden worden war;

Herr Prof. Louis Florentin Hessèle, geb. zu Estavayer-le-lac im Canton Freiburg, der französischen Sprache vom 1. Juni 1854 an;

Herr Prof. Johann Bernhard Schneider, früher Professor am Collegium Carolinum u bahndirector in Braunschweig, als Prof. der Maschinenlehre von Michaelis 1854 an.

Durch den Eintritt des Letzteren ist der Plan, welcher der neueren Aus- und Fortbildung de nischen Schule zu Grunde lag, nehmlich getrennte Fachcurse für die Hauptrichtungen der Technik d schinenbau, das Ingenieurfach im engeren Sinne und die technische Chemie herzustellen, erst als vöig geführt zu erachten, da bei dem stets wachsenden Umfange der betreffenden Zweige und der sich ei Anforderungen an die technischen Lehranstalten die bisher stattgehabte Vereinigung der Hauptprofsu die beiden zuerst genannten Fächer die Kräfte eines Mannes völlig überstieg. Es hat von nun an e nenbauschule in dem Herrn Prof. Schneider einen besondern Hauptvertreter erhalten, wie diess ie Proff. Schubert und Stein für die Ingenieurschule und technisch-chemische Schule auch fernerh si

Durch Verordnung vom 31. März 1854 wurde dem Lehrer Herrn Osmar Fort das Prädic a fessor ertheilt. — Der Unterzeichnete wurde zum Mitgliede der für die Münchener Ausstellung niedrge Commission und nebst Herrn Prof. Schubert und Herrn Prof. Stein zu Mitgliedern der Beurth lu mission für diese Ausstellung ernannt, deshalb aber und weil gleichzeitig die Herren Prof. Scl ö Lehrer Wentzel, Erler und Kuschel eine Unterstützung zu einer Instructionsreise nach ve ch technischen Bildungsanstalten und zur Münchener Ausstellung erhalten hatten, die Sommerferien m verlängert. Ausserdem erhielt auch Herr Prof. Geinitz eine weitere Unterstützung zur Fortsetzung Untersuchung der im Inlande vorkommenden Grauwacken- und Steinkohlenformation. — Dem Unterzei wurde die Annahme des ihm von Sr. Maj. dem Könige von Bayern verliehenen Ritterkreuzes les lichen Verdienstordens vom heiligen Michael gestattet. — Die Fürstlich Jablonowski'sche Gesellsc Leipzig erachtete die von dem Herrn Prof. Geinitz eingesendete Schrift auf die für 1853 aufgestellte

: „eine möglichst vollständige schriftliche und bildliche Darstellung der Flora des Hainichen-Ebers- nd der Flöhaer Kohlenbassins, sowie eine Vergleichung beider mit der Flora des Zwickauer Stein- assins zu liefern“ des ausgesetzten Preises für vollkommen würdig.

Der zeitherige Unterrichtsplan wurde im nunmehr beendeten Cursus mit geringen Störungen, n der Hauptsache theils durch den erst mit dem Monat Juni erfolgten Eintritt des Herrn Prof. Hessèle, rch die Münchener Ausstellung, theils durch einen an Herrn Prof. Schlömilch und Herrn Prof. rtheilten Urlaub und eine nicht lang andauernde Krankheit des Herrn Lehrer Wentzel verursacht sind, regelmässig durchgeführt. Hierbei übernahm während des Sommers Herr Lehrer Erler gemein- h mit Herrn Lehrer Nagel die Leitung der praktisch geometrischen Arbeiten, und Herr Prof. Schnei- . Michaelis an den Vortrag über Maschinenlehre in den 3 oberen Classen und die Leitung des Maschi- erfens in der oberen Abtheilung. Durch Zulassung von Schülern letzterer Abtheilung in technische ments zur Kenntnissnahme von den praktischen Betriebsbedingungen während des Monats September e Directionen der Sächsischen Staatseisenbahnen und der Leipzig-Dresdener Eisenbahn, der königl einkohlenwerke zu Zaukerode und des Hänichener Steinkohlenwerks, sowie die Wasserbaudirection sich m die polytechnische Schule zu dem aufrichtigsten Danke verpflichtet.

Theils um die Einrichtung von Fachschulen in der oberen Abtheilung zu vollständigerer Entwickelung en, theils um eine etwas gleichförmigere Vertheilung des Unterrichtsstoffes in der unteren Abtheilung en, wurde durch Verordnung vom 7. Februar ein mehrfach verbesserter Unterrichtsplan ge- welcher im Folgenden seinen Hauptzügen nach aufgestellt ist:

Untere Abtheilung.

iche ahl inter.		
		Cl. III.
11.		Mathematik (Trigonometrie, Stereometrie, Algebra).
4.		Experimentalphysik.
—		Repetition der Naturgeschichte.
4.		Theoretische Chemie (Anorganischer Theil).
3.		Deutsche Sprache.
2.		Französische Sprache.
6.		Projectionslehre.
2.		Planzeichnen.
4.		Ornamentenzeichnen.
		Cl. II.
4.		Analytische Geometrie der Ebene, sphärische Trigonometrie.
4.		Praktische Geometrie (Vortrag).
6.		Mechanik.
—		Theoretische Chemie (Organischer Theil).
4.		Technische Chemie (Erster Theil).
2.		Mineralogie.
2.		Allgemeine Baukunde.
2.		Deutsche Sprache.

Wöchentliche Stundenzahl im Sommer.	Winter.	
2.	2.	Französische Sprache.
6.	4.	Projectionslehre (Schattenconstruction, Perspective).
4.	—	Feldmessen.
—	2.	Planzeichnen.
		Cl. I.
5.	—	Analytische Geometrie des Raumes.
—	5.	Elemente der höheren Mathematik.
4.	4.	Maschinenlehre (Elemente d. Maschinen).
—	2.	„ „ (Beschreibung der Motoren).
3.	4.	Mechanische Technologie (Metalle, Holz).
2.	2.	Technische Chemie (Zweiter Theil).
2.	2.	Deutsche Sprache und Denklehre.
2—3.	2—3.	Englische Sprache.
2.	2.	Französische Sprache.
2.	2.	Maschinenzeichnen (nach Aufnahmen).
2—4.	2—4.	Architectonisches Zeichnen.
4.	4.	Praktisch chemische Arbeiten.
		Ausserdem für Section A.:
8.	4.	Maschinenentwerfen.

Wöchentliche Stundenzahl im Sommer.	Winter.	
		Für Section B.:
—	2.	Praktische Geometrie (Vortrag).
4.	—	Feldmessen.
—	2.	Planzeichnen.
2.	2.	Steinschnitt.
		Für Section C.:
4.	4.	Praktisch chemische Arbeiten.

Obere Abtheilung.

Cl. II.

5.	5.	Höhere Mathematik.
2.	2.	Deutsche Sprache und Denklehre.
2.	2.	Englische Sprache.
—	4.	Buchhalten.
		Ausserdem für Section A.:
4.	4.	Maschinenlehre (Motoren).
3.	3.	Mechanische Technologie (Faserstoffe).
20.	18.	Maschinenentwerfen.
		Für Section B.:
4.	4.	Strassen- und Wasserbaukunde.
3.	3.	Höhere Geodäsie (Vortrag).
12.	8.	Entwerfen v. Strassen- u. Wasserbauen.
4.	4.	Situationszeichnen.

Wöchentliche Stundenzahl im Sommer.	Winter.	
		Für Section B. u. C.:
2.	4.	Geognosie.
4.	—	Geognostische Excursion.
		Für Section C.:
2.	2.	Vortrag über Chemie.
16.	12.	Praktisch chemische Arbeiten.

Cl. I.

4.	4.	Höhere Physik.
2.	2.	Volkswirthschaftslehre.
2.	2.	Deutsche Sprache und Denklel
2.	2.	Englische Sprache.
		Ausserdem für Section A.:
2.	2.	Maschinenlehre (technische An
20.	18.	Maschinenentwerfen.
		Für Section A. u. B.:
4.	4.	Höhere Mechanik.
		Für Section B.:
3.	3.	Brückenbaukunde.
2.	2.	Astronomie.
16.	12.	Entwerfen von Brückenbauten
4.	4.	Situationszeichen.
		Für Section C.:
2.	2.	Vortrag über Chemie.
16.	18.	Praktisch chemische Arbeiten

Wegen der Beschäftigung im Monat September verbleibt es bei der zeitherigen Einrichtung v welcher die Schüler der Section A. längere Zeit praktische Etablissements besuchen, die der Section B g geodätische Aufnahmen ausführen und die der Section C. im Laboratorium arbeiten.

Es ist natürlich keinem Schüler einer Section verwehrt, ausser den oben angegebenen obligato Unterrichtsgegenständen auch noch Vorträgen anderer Sectionen beizuwohnen; namentlich wird de der Section A. empfohlen, die Einleitungen in den Strassen- und Wasserbau, sowie in den Brücken besuchen.

Endlich ist nicht ausgeschlossen und wird als zweckmässig erachtet, dass die Schüler noc ei länger auf der Anstalt verbleiben, um sich ausschliesslich mit mehr selbständigen Arbeiten unter Anleit betreffenden Fachlehrer zu beschäftigen.

Die vollständige Einführung dieses Unterrichtsplanes wird in dem Maasse erfolgen, wie d dem jetzt geltenden eingeleitete Vorbereitung der Schüler gestattet.

Zur Anfertigung der für den Cursus in Maschinenlehre erforderlichen Zeichnungen wurde d A eines Zeichners bewilligt.

Der Vortrag über Elemente der Chemie, welcher auch in diesem Winter des Sonntags gehalten soll vom nächsten Winter an Wochentags in Abendstunden gehalten werden. — Auch hat die hoh verfügt, dass der des Sonntags gehaltene Zeichnenunterricht von Ostern an in Wegfall komme.

Für den Unterricht in den praktisch chemischen Arbeiten wurde ein Specialregulativ entworfen und
gt.

Bezüglich der Maturitätsprüfung wurde angeordnet, dass die in §. 18 der Verordnung vom 17.
852 gestattete beschränkte Oeffentlichkeit ganz in Wegfall komme und dass von dem Bestehen der
en Prüfung alle Schüler in denjenigen Fächern befreit sein sollen, in welchen sie bei den beiden
egelmässigen Censurenertheilungen und bei der schriftlichen Maturitätsprüfungsarbeit mindestens die
erhalten haben.

Die populären Vorträge zum Besten des von dem Lehrercollegium begründeten Reisestipendien-
reuten sich im laufenden Winter einer erhöhten Theilnahme; es wurden vom 30. October 1854 bis zum
ıar 1855 überhaupt 15 gehalten und zwar:

m Unterzeichneten: über das Technische der Weberei; über die Lebensversicherungs- und Renten-
stalten;

rrn Prof. Schubert: über den Mond, seine Lichtphasen, seine Topographie; über die industriellen
d technischen Leistungen der Alten;

rrn Prof. Schlömilch: über die Philosophie Kants und seiner Nachfolger;

rrn Prof. Stein: über den Verbrennungsprocess und die verschiedenen Arten der Feuerzeuge, so wie
er die Natur der Flamme und die verschiedenen Arten der künstlichen Beleuchtung;

rrn Prof. Geinitz: über die Kohlenformation Sachsens.

rrn Prof. Lösche: über Licht und Farben; über die neueren Entdeckungen bezüglich des electri-
schen Lichtes;

rrn Prof. Fort: über die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Bedeutung für die
turwissenschaften, sowie über die Erscheinungen der Ebbe und Fluth;

rrn Lehrer Schöne: über Lessings Verdienste um das deutsche Drama.

Durch die Einnahme für diese Vorträge, welche diessmal 391 Thlr. betrug und dem Fond unge-
zuging, da das K. hohe Ministerium des Innern genehmigte, dass die Kosten für diese Vorträge aus
kasse bestritten werden konnten, durch Geschenke und namentlich

50 Thlr. von dem Herrn Fabrikant Hauschild in Hohenfichte,
75 „ von dem Herrn Fabrikant Gessner in Aue,
100 „ von den Herren Fabrikanten Lister und Warburton in Addingham,

ch die übrigen Einnahmequellen des Fonds hat sich derselbe einschliesslich 50 Thlr. 5 Ngr. an ein-
en Zinsen zur Zeit auf 1827 Thlr. 19 Ngr. 8 erhöht.

ei dem v. Lindenau'schen Reisestipendienfond wurde die letzte auf 8 Monate sich be-
Rate dem Ostern 1854 abgegangenen Schüler und Eisenbahneleven Carl Gottfried Uhmann aus
ewilligt. An Reiseberichten gingen der des Mechanikers Aster über Drahtstiftfabrikation und die
g der Mittheilungen über die *Ecole des Ponts et Chaussées* von Gustav Werther ein.

ei der in London im vorigen Jahre veranstalteten Ausstellung von Gegenständen, welche sich auf
schul- und gewerblichen Unterricht beziehen, hat die polytechnische Schule sich auf erhaltene Auf-
durch Einsendung der Zeichnung und Beschreibung ihres Gebäudes und seiner Einrichtung, so wie
lie Anstalt erschienenen Schriften betheiligt.

it dem *Smithsonian-Institution* zu Washington ist wegen Austausches von Schriften eine Verbindung
nordamerikanischen Consul Herrn Dr. Flügel in Leipzig eingeleitet worden.

n Geschenken gingen der polytechnischen Schule folgende Gegenstände zu:

ir die Bibliothek:

ajestät dem König: *Brown's Trichologia Mammalium;* die Auer'schen Schriften über die K. K.
xerei und den Naturselbstdruck; und *de Caumont's Architecture religieuse;* — von dem K. hohen

Ministerium des Innern: Herrmann's Pilzjäger, Weise's Handbuch für Weber, Dr. J. Ph. Kul
fangsgründe der höheren Mechanik, neue Multiplicationstafeln, Tafeln der hyperbolischen Sectoren un
der Quadrat- und Cubikzahlen; — von dem statistischen Bureau: die dritte Lieferung der Mitthe
— von der Direction der K. K. geologischen Reichsanstalt in Wien: das Jahrbuch derselben
1854. Heft 2.; — von der K. Akademie d. Wissenschaften zu München: Schafhäutl's geog
Untersuchungen, Lamont's magnetische Ortsbestimmungen, und O. Sendtner's Vegetationsverhältni
bayerns; — von dem Herrn Ingenieur Hachette, dessen Broschüre über schiefe Brückenbogen; —
Gewerbeverein zu Dresden: dessen 8ter Hauptbericht und der Katalog der im Februar gehalte
stellung; — von den verschiedenen Anstalten, mit denen ein Schriftenaustausch stattfindet, die re
erscheinenden Programme etc.

für die Zeichnungsvorlagen:

von dem früheren Schüler Herrn Hacke eine perspectivische Zeichnung des Anstaltsgebäudes; —
früheren Schüler Herrn Henrici: Aquarelle über einzelne Theile des Domes zu Meissen nebst D
nungen; — von dem Unterzeichneten: eine Anzahl verschiedener Skizzen und Copien
mechanischer Vorrichtungen.

für die geologische Sammlung:

von Herrn Graf Wilhelm v. Schlieffen: 1 Exemplar von *Polypterus bicher;* — von Herrn Gen
Sturz: geognostische Karten von Amerika; — von Herrn Prof. Geinitz: Abbildungen zu desse
wähnter Preisschrift.

für die astronomischen Apparate:

von dem K. hohen Ministerium des Innern: das Uranorama von Seyfert in Hohenstein.

für die Maschinenmodellsammlung:

von Sr. Majestät dem König: eine Modellwage von Pintus in Brandenburg.

für die mechanisch-technologische Sammlung:

von dem K. hohen Ministerium des Innern: Zeichnung und Beschreibung der von Meyer
verbesserten Fadenmühle, Schnurmaschine und Flechtmaschine nebst Fabrikationsproben; Muster bunte
Gardinen, so wie eingelegter Holzarbeiten; — von den Herren Götz u. Comp. in Chemnitz, die Zeich
Baumwollenflyers; — von Herrn Dr. Corssen in Berlin: eine Fabrikationssuite von Haken und
von Herrn Prof. Jähkel: verschiedene Proben von Rohstoffen und Fabrikaten; — von Herrn Buch
director Ackermann: eine Fabrikationssuite für Stereotypirung von Holzschnitten; — von en
Schulze und Niemann in Eutritzsch ein Musterbuch gepresster Callicos; — von dem Herrn F
Thiele in Freiberg: eine Fabrikationssuite für ächte und unächte Golddrahtwaaren; — von Her
in Heidenheim: Proben von Papieren aus Holz und Stroh; — von Herrn D. Fruwirth in Tobersik:
von Gelenkketten und Röhren; — von den Herren Stalling u. Ziem aus Sagan: Proben von Da
Steinpappe; — von den Herren Zimmermann u. Leinbrock in Glashütte: Fabrikationsproben von
Trieben und Schrauben; — von Herrn Eisenwerksfactor Schott in Ilsenburg: Proben eines fe
gusses; — von den Schülern Mehner u. Peupelmann: Proben ausgezeichneter Drehspähne;
Herrn Ingenieur Roschig: ein Stück einer alten verschüttet gewesenen Eichenholzschwelle; —
Oberinspector Hallbauer: Proben imprägnirter Hölzer; — von Herrn Fabrikant Schott in Chemnitz:
von Meubeldamasten und zwei grosse Deckenmuster auf Quadratpapier gezeichnet; — von den Herr
villier u. Comp. in Wien: 3 Musterkarten von Schrauben und kleinen Gusseisentheilen; — von den
Felten u. Guillaume in Cölln: Proben von Telegraphenseilen und Schiffsseilen; — von Herrn Fo
Ministerialrath Paur in München: mehrere grosse Baumquerschnitte verschiedener in Bayern wac
Hölzer; — von Herrn Baron von Burgk: eine Musterschraubenspindel mit verschiedenen Gewinden;

brikant R. Hartmann in Chemnitz: mehrere Maschinenzeichnungen; — von Herrn J. D. Weickert
g: Fabrikationssuite für Pianofortefilze.

für die chemisch-technische Sammlung:

n J. v. Schwarz in Nürnberg: Proben von Lavagasbrennern; — von Herrn Jordan u. Timäus:
ene Cacaosorten; — von Herrn Eisenbahndirector v. Weber: Proben von Niederschlägen in Feuer-
d von frischen und gebrauchten Locomotivröhren; — von Herrn Schöller in Brünn: Proben von
und von Kobalt- und Nickelerzen; — von Herrn Fabrikant Fickentscher in Zwickau: eine Fabri-
te für Tafelglas; — von Herrn Braumeister Vogel: Hopfenproben; — von Herrn Weinhändler
ck: Proben ächter Spirituosen; — von Herrn Maschinendirector Hänel in Magdeburg: Proben von
n.

ür alle diese Geschenke bringt die polytechnische Schule hierdurch nochmals den aufrichtigsten
.

er Werth der Bibliothek und Sammlungen ist nunmehr so hoch gestiegen, dass dieselben nebst dem
nit 20,000 Thlr. versichert wurden.

u der Prüfung der Feldmesser zweiter Classe hatte sich im Laufe des Jahres nur ein Candidat, nehmlich

Herr Theodor Wilhelm Wolf aus Niederneuschönberg

t, welcher auch für genügend befähigt gefunden wurde.

ezüglich des mit Ostern 1854 beendeten Unterrichtscursus ist noch anzuführen, dass den
ichneten Schülern Auszeichnungen verliehen wurden, und zwar erhielt:

smedaille in Silber:

Carl Gottfried Uhmann aus Reudnitz;

zene Preismedaille:

Clemens Bernhard Pöschmann aus Elsterberg,
Hermann Bernhard Hofmann aus Borna,
Carl Eduard Zetzsche aus Altenburg;

bungsdecret:

Carl Detlev Specht aus Dresden,
Johann Carl Bernhard Lehmann aus Bautzen,
Franz Moritz Strehle aus Kemmlitz,
Carl Wilhelm Herrmann aus Dresden.

rner erhielten auf Beschluss des Lehrercollegiums

Gotthold Friedrich Freitag aus Raschau,
Bernhard Theodor Peupelmann aus Dresden,
Heinrich Louis Löser aus Mildenau

xemplar von Kohls Elementen der Maschinen als Prämien.

den Maturitätsprüfungen hatten sich zu Ostern 1854 für die obere Abtheilung 10 Schüler der
hen Schule und für die untere Abtheilung 34 Schüler der polytechnischen Schule und 1 Gewerb-
Chemnitz gemeldet; von diesen erhielten ein Zeugniss der Reife:

a) in der oberen Abtheilung:

für Section A:

Anton Emil Hofmann aus Dresden
Otto Alfred Meyer aus Dresden
Otto Volckamer aus Bautzen
} gingen zum praktischen Maschinenbau,

Ernst Moritz Böhme aus Sebnitz, bezog die Universität Leipzig;

für Section B:

Heinrich Emil Kiesling aus Tharand
Alfred Edmund Woldemar Hottenroth aus Loschwitz } widmeten sich dem Eisenbah
Carl Gottfried Uhmann aus Reudnitz

Moritz Hermann Vogel aus Dresden (wurde Wasserbaueleve),
Johann Gottfried Eduard Fritzsche aus Dresden (wurde Strassenbaueleve);

ausserdem:

Gustav Theodor Anton aus Dresden, erhielt ein Maturitätszeugniss bezüglich der Wisse
welche bei der Staatsprüfung der Architekter
werden.

b) in der unteren Abtheilung:

für Section A:

Arthur Merz aus Lauterbach
Eduard Arno Kuntze aus Grimma
Gustav Adolph Jäckel aus Somsdorf
Johann Carl Bernhard Lehmann aus Bautzen
Hermann Ludwig Oertel aus Radeberg
Franz Moritz Strehle aus Kemmlitz
Carl Heinrich Gruner aus Mutzschen
Carl Theodor Kästner aus Crimmitzschau
Carl Ernst Hartig aus Stein (Schüler der Chemnitzer Gewerbschule) } (traten in die obere Abtheilung te

Georg Constantin Hermann aus Leipzig (ging zum Maschinenbau über),

für Section B:

Emil Stanislaus Carl Lessel aus Dresden
Otto Munz aus Dresden
Johannes Andreas von Wagner aus Freiberg
Hans Paul Alexius Borkmann aus Dresden
Friedrich Rudolph Claus aus Dresden
Julius Hermann Garten aus Dresden
Hermann Theodor Hohlfeld aus Neugersdorf
Adolph Hermann Kunze aus Dresden
Carl Ferdinand Bruno Voigt aus Dresden } (traten in die obere Abtheilung über

Adolph Albin Schubert aus Crandorf (widmete sich der praktischen Geodäsie).

für Section C:

Christian August Ferdinand Olivier aus München
Paul Julius Bach aus Pirna
August Moritz Niegolewski aus Lommatzsch
Carl Wilhelm Richter aus Dresden
Gustav Theodor Schwartze aus Leipzig } (traten in die obere Abtheilun üb

Uebrigens verliessen die Anstalt mit Schluss des Cursus:

aus der zweiten Classe oberer Abtheilung:

Heinrich Bruno Kässner aus Leipzig (um sich der Spinnerei zu widmen),

ustav Adolph Walde aus Bautzen
ermann Bernhard Hofmann aus Borna } (um zum Maschinenbau überzugehen);
erdinand Zinkeisen aus Altenburg

r ersten Classe unterer Abtheilung:

arl Eugen Theodor Kollmann aus Leipzig
oritz Meisel aus Dresden } (um sich dem Maschinenbau zu widmen),

rnst Vetter aus Weinböhla (um Baugewerke zu werden),
lfred Ludwig Dittmarsch aus Dresden (um auf die Bergakademie nach Freiberg zu gehen),
urt von Leipziger aus Schneeberg (um sich dem Fabrikbetriebe zu widmen),
oritz Rudolph Casimir Becker aus Dresden (unbekannt),
einrich Albert Theodor Geissel aus Bylow (um auf einem Gymnasium einzutreten).

Für den neuen Cursus hatten sich zur Aufnahmeprüfung 63 angemeldet, von denen 60 als Schüler
men und in der aus nachstehender Uebersicht zu entnehmenden Art in die einzelnen Classen einge-
erden konnten; drei mussten wegen nicht genügender Vorbereitung abgewiesen werden. Der Besuch
alt im Unterrichtscursus 1854—55 wird durch die nachfolgende Uebersicht dargestellt, in welcher
die Schüler ihrer Zahl nach angegeben sind, die dem vollen Classencursus beiwohnten, unter E. die-
welche nur einzelne Unterrichtsgegenstände besuchten.

	Obere Abtheilung.						Untere Abtheilung.								Abtheilung f. Zeichnen u. Modelliren.		Ueberhaupt.		
	Cl. I.		Cl. II.		Hospitanten.		Cl. I.		Cl. II.		C. III.		Hospitanten.				V.	E. und Hosp.	Zusammen.
	V.	E.	V.	E.			V.	E.	V.	E.	V.	E.			V.	E.			
des Cursus 1854 ver-																			
die Schule: . . .	8	4	3	2	2		7	3	10	4	3	5	1		3	—	34	21	55
verblieben auf derselben:	14	—	22	4	5		31	10	41	5	5	2	2		13	2	126	30	156
ng des Cursus traten ein:	—	—	1	5	2		1	1	7	3	36	2	—		4	—	49	13	62
e des Cursus traten ein:	—	—	—	2	1		—	—	—	2	1	3	1		—	1	1	10	11
trägt die Gesammtfrequenz:	14	—	23	11	8		32	11	48	10	42	7	3		17	3	176	53	229
			56						153						20				
des Cursus gingen ab:	1	—	1	3	3		2	6	7	2	—	—	1		4	—	15	15	30
trägt die Frequenz am des Cursus:	13	—	22	8	5		30	5	41	8	42	7	2		13	3	161	38	199
			48						135						16				

Von den Schülern der drei oberen Classen für den vollen Unterrichtscursus gehörten

zur Section A.	B.	C.
7	3	4 in Cl. I. O.
9	9	5 „ „ II. O.
20	7	5 „ „ I. O.
36	19	14 überhaupt.

Schulgelderlass wurde 62 ertheilt, und zwar erhielten:

halben,	ganzen	Schulgelderlass:	
3	16	in der oberen Abtheilung im Betrage von . . .	510 Thlr.
10	22	„ „ unteren „	645 „
1	8	„ „ Modellirabtheilung	97 „
—	2	Hospitanten	29 „
14	48	zusammen im Betrage	1281 Thlr.

Stipendien wurden ausserdem auf Vorschlag des Lehrercollegiums an 8 Schüler der obere unteren und 2 der Modellirabtheilung, und im Gesammtbetrage von 540 Thlrn. bewilligt. Unter erste befanden sich 2 Schüler, welche das Stipendium nur ½ Jahr erhielten, und zwar wurde dasselbe von an dem einen Schüler wegen nicht befriedigender Censur entzogen und auf den zweiten übertragen. dies bewilligte die hohe Behörde dem abgegangenen Schüler Kässner eine Unterstützung von 90 T seiner weiteren Ausbildung im Spinnereifache.

Im Laufe des Cursus gingen aus der oberen Abtheilung ab:

Carl Adolph Benno Pfeilschmidt aus Dresden,
Hermann Ludwig Oertel aus Radeberg,
} um sich dem Maschinenbau zu wid

und nach vollständig beendeter Ausbildung aus der Abtheilung für Zeichnen und Modelliren:

Albert Gustav Könitz aus Torgau, um als Musterzeichner einzutreten.

Durch den Tod wurde der Anstalt der brave Schüler

Christian Richard Fichtner aus Dresden

entrissen.

Den Sonntagsunterricht im Ornamentenzeichnen besuchten

während des Sommers: 41, darunter 3 Freischüler,
„ „ Winters: 32, „ 5 „

dagegen während des Winters die von dem Assistenten Herrn Fleck gehaltenen Vorträge in den Fe der Chemie: 37.

In der Baugewerkenschule wurden am Ende des Unterrichtscursus $18\frac{5}{54}$ folgenden sch Auszeichnungen bewilligt, nämlich

die Preismedaille in Silber für:

Uhlmann, Carl Albin, aus Pirna,
Beeger, Wilhelm Ferdinand Eduard, aus Grossgrabe,
Zink, Carl August, aus Grimma;

die bronzene Preismedaille für:

Melzer, Franz, aus Lauenstein,
Nauck, Carl Hugo, aus Oschatz,
Eberhardt, Carl Gottlob, aus Osling,
Schwarze, Gustav Friedrich Eduard, aus Dresden;

ein Belobungsdecret für:

Köhler, Carl Heinrich, aus Freiberg,
Hofmann, Ernst Wilhelm, aus Stürza,
Richter, Friedrich Wilhelm, aus Reichenau,
Härtel, Gustav Conrad, aus Lichtenstein,

Schmidt, Friedrich Louis, aus St. Michaelis,
Adam, August Heinrich, aus Dresden,
Hötzsch, David Wilhelm, aus Strehla,
Tschoppe, Johann Georg Ottomar, aus Bautzen.

Für den Unterrichtscursus $18\frac{54}{55}$ hatten sich zur Aufnahmeprüfung 40 eingefunden, von denen 8 (dar- Ausländer) zurückgewiesen werden mussten, und 1 in die Repetentenclasse, 4 in die obere Classe, 25 ntere Classe aufgenommen und 2 zum Besuche einzelner Unterrichtsgegenstände zugelassen werden

Die Gesammtfrequenz betrug

zu Anfang	zu Ende des Cursus	
22	21	in der Repetentenclasse,
30	30	„ „ oberen Classe,
32	32	„ „ unteren Classe.
84	83	

Von diesen erhielten 18 Schulgelderlass im Gesammtbetrage von 90 Thlrn., nämlich 8 aus der Repetenten-, r oberen und 3 aus der unteren Classe, und unter den letzteren 4 aus der Repetenten- und 3 aus der Classe Stipendien im Gesammtbetrage von 102 Thlrn.

Bei dem ohne Störung durchgeführten Unterrichtsplan trat gegen früher die Aenderung ein, dass an s Herrn Lehrers Erler der Herr Assistent Häckel den Unterricht in Projectionslehre für die untere re Classe übernahm und ersterer der Repetentenclasse ausser der Perspective auch 2 Stunden Unter- Steinschnitt ertheilte.

Lehrer an der polytechnischen Schule:

r Dr. Hülsse, Julius Ambrosius, Director und Lehrer für Volkswirthschaftslehre und mechanische Technologie.

r Schubert, Johann Andreas, für Strassen-, Eisenbahn-, Wasser- und Brückenbau, Astronomie und Entwerfen in Section B.

r Dr. Schlömilch, Oscar, für analytische Geometrie, Differential- und Integralrechnung, höhere Mechanik.

r Stein, Wilhelm, für technische Chemie und praktisch-chemische Arbeiten.

r Schneider, Johann Bernhard, für Maschinenlehre und Maschinenentwerfen in Section A.

r Heine, Gustav, für Baukunde und architektonisches Zeichnen.

r Dr. Geinitz, Hanns Bruno, für Mineralogie, Geognosie und Naturgeschichte im Allgemeinen.

r Dr. Lösche, Eduard, für Experimentalphysik und theoretische Chemie.

r Fort, Osmar, für Mathematik und Mechanik.

Puschner, Franz August, für freies Hand- und Ornamentenzeichnen.

Ventzel, Michael, für Thonmodelliren, Ornamentencomponiren und freies Hand- und Ornamentenzeichnen.

Kuschel, Carl, für Mathematik (zugleich Bibliothekar).

Erler, Carl, für Projectionslehre, Perspective, Maschinenzeichnen und Steinschnitt.

Nagel, August, für praktische Geometrie, höhere Geodäsie, praktisch-geodätische Arbeiten und Situationszeichnen.

Professor Dr. Löwe, Max. Leopold, für deutsche Sprache und Denklehre.
Professor Hughes, Georg, für englische Sprache.
Conducteur Tröger, Johann Friedrich, stellvertretender Lehrer für praktische Geometrie.
Lehrer Schöne, Immanuel Ferdinand, für deutsche Sprache.
Professor Hessèle, Louis Florentin, für französische Sprache.
Kaufmann Fort, Carl David, für Buchhalten und kaufmännische Geschäftskunde.
Assistent Häckel, Friedrich, für Entwerfen in Section B. und Feldmessen.
Assistent Fleck, Wilhelm Hugo, für die praktisch-chemischen Arbeiten.
Modelltischler Röder, Johann Friedrich, für Holzmodelliren.

In der Sonntagsschule ertheilten Unterricht:

Lehrer Puschner, Franz August, im freien Hand- und Ornamentenzeichnen.
Assistent Fleck, Wilhelm Hugo, in den Elementen der Chemie.

Lehrer an der Baugewerkenschule:

Professor Dr. Hülsse, Julius Ambrosius, Director.
Baucommissar Arndt, Ernst Hermann, für Baukunst, Baupolizei, Entwerfen von Bauplänen, Bauanl
Lehrer Kuschel, Carl, für Mathematik, Statik und Mechanik (zugleich Bibliothekar).
Lehrer Puschner, Franz August, für Ornamentenzeichnen.
Lehrer Dr. Wahoda, Jan, für deutsche Sprache.
Lehrer Erler, Carl, für Perspective und Steinschnitt.
Lehrer Hobjan, Johann Traugott, für architektonisches Zeichnen und Entwerfen von Bauplänen.
Assistent Häckel, Friedrich, für Naturkunde und Projectionslehre.

Verzeichniss der Schüler

der

polytechnischen Schule im Lehrcursus $18\frac{54}{55}$.

Obere Abtheilung.

Erste Classe.

Section A. für Maschinenbau und mechanische Technik:

1. Pfeilschmidt, Carl Adolph Benno, aus Dresden (abgegangen).
2. Werner, August Bruno, aus Dresden.
3. Richter, Oscar Emil, aus Dresden.
4. Roschig, Friedrich Albert, aus Grossenhain.
5. Steinmann, Ernst Ferdin. Ludwig, aus Dresden.
6. Specht, Carl Detlev, aus Dresden.
7. Pöschmann, Clemens Bernhard, aus Elsterberg.

Section B. für Strassen-, Wasser-, Brücken- und Eisenb

8. Gerhardt, Franz Rudolph, aus Gera.
9. Bergmann, Alwill Woldemar, aus Dres
10. Neumann, Max. Ludwig Otto, aus Dre

Section C. für chemische Technik:

11. Krause, Carl Friedrich August, aus Wurz
12. Lichtenberger, Georg Eugen, aus Dres
13. Wetzig, Franz Emil, aus Wermsdorf.
14. Zetzsche, Carl Eduard, aus Altenburg

Für einzelne Unterrichtsgegenstände:

15—17. 3 Hospitanten (von denen 1 abgegangen

Zweite Classe.

A. für Maschinenbau und mechanische Technik:

:, Arthur, aus Lauterbach.
ze, Eduard Arno, aus Grimma.
el, Gustav Adolph, aus Somsdorf.
ıann, Johann Carl Bernhard, aus Bautzen.
el, Hermann Ludwig, aus Radeberg (abge-
n).
ıle, Franz Moritz, aus Kemmlitz.
ner, Carl Theodor, aus Crimmitzschau.
er, Carl Heinrich, aus Mutzschen.

Zu Ostern trat ein:

g, Carl Ernst, aus Stein.

ir Strassen-, Wasser-, Brücken- und Eisenbahnbau:

, Otto, aus Dresden.
l, Emil Stanislaus Carl, aus Dresden.
gner, Johannes Andreas, aus Freiberg.
nann, Hans Paul Alexius, aus Dresden.
, Friedrich Rudolph, aus Dresden.
n, Julius Hermann, aus Dresden.
eld, Hermann Theodor, aus Neugersdorf.
, Adolph Hermann, aus Dresden.
, Carl Ferdinand Bruno, aus Dresden.

Section C. für chemische Technik:

Paul Julius, aus Pirna.
lewski, August Moritz, aus Lommatzsch.
:r, Carl Wilhelm, aus Dresden.
r, Christian Aug. Ferdinand, aus München.
rtze, Gustav Theodor, aus Leipzig.

einzelne Unterrichtsgegenstände:

ıetz, Paul Oscar, aus Leipzig.
ch, Eduard Friedrich Albert, aus Al-
ıayn.
ɔn, Johann Hermann, aus Hoheneck (abge-
.
r, Friedrich Eugen, aus Altenburg (abge-
.

Zu Ostern traten ein:

ch, Otto, aus Wurzen.
Friedrich Wilhelm, aus Lommatzsch.
Wilhelm August, aus Lommatzsch.
an, Hermann, aus Bad Liebenstein (abge-

Robert, aus Pegau.

Im Laufe des Cursus traten ein:

33. Thenius, Georg, aus Dresden.
34. Brescius, Carl Emil, aus Dresden.

Ausserdem:

35—39. 5 Hospitanten (von denen 2 abgegangen sind).

Untere Abtheilung.

Erste Classe.

Section A. für mechanische Technik:

1. Petzoldt, Johann Carl Adolph, aus Dresden.
2. Schwalbe, Richard, aus Oelsnitz (abgegangen).
3. Philipp, Johann Ernst Theodor, aus Wilsdruff.
4. Schützhold, Franz Eduard Robert, aus Hochhermsdorf.
5. Mehner, Volkmar Reinhardt, aus Plauen.
6. Fichtner, Christian Richard, aus Neustadt-Dresden (gestorben).
7. Fischer, Curt Wilhelm, aus Freiberg.
8. Lehmann, Carl August Gustav, aus Leipzig.
9. Mey, Georg, aus Spansberg.
10. Peupelmann, Bernhard Theodor, aus Dresden.
11. Rosenberg, Friedrich Ferdinand, aus Dresden.
12. Sauermann, Richard Moritz Gotth., aus Dresden.
13. Weise, Wilhelm Robert, aus Dresden.
14. Wustlich, Carl Hermann, aus Hartha.
15. Lempe, Friedrich Theodor, aus Dresden.
16. Löser, Heinrich Louis, aus Mildenau.
17. Brunner, Georg Philipp, aus Torgau.
18. Voss, Anton Georg, aus Chemnitz.
19. Wehrmann, Christian Friedrich, aus Sosa.

Zu Ostern trat ein:

20. Gruhl, Friedrich Theodor Moritz, aus Ziegra.

Section B. für Strassen-, Wasser-, Brücken- und Eisenbahnbau:

21. Richter, Ernst August, aus Schandau.
22. Freitag, Gotthold Friedrich, aus Raschau.
23. v. Klüchtzner, Otto Benedict Eugen, aus Leipzig.
24. Schmidt, Otto Alexander, aus Dresden.
25. Ehrhardt, Julius Bruno, aus Oberrossau.
26. Schöller, Philipp Johann, aus Brünn.
27. Sturz, John, aus London.

Section C. für chemische Technik:

28. Päz, Alexander Emil, aus St. Petersburg.
29. Tietze, George, aus Lorenzkirch.
30. Löbe, Maximilian Bernhard, aus Altenburg.
31. Winkler, Eugen Theodor, aus Dresden.
32. Mühlig, Maximilian Eugen, aus Leipzig.

Für einzelne Unterrichtsgegenstände:

33. Barth, Carl Emil Oscar, aus Meissen.
34. Müller, Heinrich Hermann, aus Kleinrügeln.
35. Neumann, Carl Bernhard, aus Dresden (abgegangen).
36. Sendler, Friedrich Paul Felix, aus Parey (abgegangen).
37. Hager, Gustav Rudolph, aus Altenburg (abgegangen).
38. Hammer, Friedrich Woldemar, aus Oschatz.
39. v. Witte, Hermann Carl Simon, aus Budzislaw.
40. Hacke, Carl August, aus Meissen (abgegangen).
41. Henzold, Carl Wilhelm Oscar, aus Jena.
42. v. Bohus, Stephan, aus Vilagos (abgegangen).

Zu Ostern trat ein:

43. Mannhardt, Johann, aus München (abgegangen).

Ausserdem:

44—46. 3 Hospitanten (von denen 1 abgegangen und 1 im Laufe des Cursus eingetreten ist).

Zweite Classe.

Für den ganzen Classencursus:

1. Hering, Walther Carl Gotthold, aus Liebstadt.
2. Schubert, Friedrich Hermann, aus Dahlen.
3. Helbig, Friedrich August, aus Wurzen (abgegangen).
4. Lincke, Ernst Franz, aus Dresden.
5. Lommatzsch, Friedrich Oswald, aus Kobitzsch.
6. Rentsch, Carl Friedrich Adolph, aus Dresden.
7. Richter, Ernst Gottlieb Otto Wilh., aus Dresden.
8. Schneider, Gustav Adolph, aus Mohorn.
9. Weidauer, Martin, aus Buchholz.
10. Herrmann, Gustav Emil, aus Dresden (abgegangen).
11. v. Bünau, Heinrich, aus Dippoldiswalde (abgegangen).
12. Dietze, Ernst Wilhelm, aus Kleinzschocher.
13. Haage, Georg Richard, aus Dresden.
14. Hertel, Carl Heinrich, aus Auerbach.
15. Helbig, Franz Wilhelm, aus Wurzen.
16. Henckel, August, aus Stadtilm.
17. Hubold, Heinrich Theodor, aus Frankenberg.
18. Keit, Eduard Hermann, aus Dresden.
19. Kirsten, Friedrich August, aus Dresden.
20. Klunker, Carl Ferdinand Alfred, aus Dresden.
21. Krug, Paul Gerhard, aus Zwickau.
22. Lehmann, Ernst Bernhard, aus Boxdo
23. Leideritz, Robert Emil, aus Leipzig.
24. Lindig, Carl Theodor, aus Neustadt-I
25. Lohse, Carl Gustav, aus Dresden.
26. Manck, Carl Friedrich August, aus D
27. Marhold, Heinrich Emil, aus Dresden
28. Mirus, Carl Adalbert, aus Leisnig.
29. Peters, Friedrich Theodor, aus Hohen
30. Reiche, Theodor, aus Dresden.
31. Ritter, Julius Otto, aus Wilsdruff (ab
32. Schrader, Carl Johann, aus Memel (ab
33. Simon, Georg Paul, aus Leipzig.
34. Temper, Julius Eduard, aus Ruppert
35. Türk, Eduard Adolph, aus Dahlen.
36. Weber, Ernst Moritz, aus Dresden.
37. Wolff, Franz Theodor, aus Weissenfe
38. Zimmermann, Ernst Friedr. Louis, a
39. De la Trobe, John Henry, aus Do
gangen).
40. v. Metzsch, Hans Hugo, aus Zschop
41. Prölss, Ferdinand Hugo, aus Dresd

Zu Ostern wurden aufgenommen:

42. Drescher, Carl Heinrich, aus Gotha.
43. Holtzhausen, Franz, aus Zerbst.
44. Krause, Friedrich Theodor Ludwig
Jena.
45. Lochner, Moritz, aus Leipzig.
46. Oette, Fdmund Ottomar, aus Hirsch
gangen).
47. Rödel, Robert Ernst Edmund, aus
48. Winkler, Emil Oscar, aus Falkenbe

Für einzelne Unterrichtsgegenst

49. Uhmann, Julius Friedrich August,
50. Richter v. Lieska, Curt, aus Neust
(abgegangen).
51. Spiess, Christian Otto, aus Dresden
52. Wilsdorff, Oscar Heinrich, aus Dr
53. Noack, Julius, aus Dresden.

Zu Ostern traten ein:

54. König, Carl Theodor, aus Dresden.
55. Liebert, Oscar Bruno, aus Dresden (
56. Zeissler, Richard Alexander, aus

Im Laufe des Cursus traten ein:

57. Hertel, Alfred Siegfried, aus Knob
58. Poll, Moritz, aus Dessau.

Dritte Classe.

Für den ganzen Classencursus (in Abtheilung *a* und *b* getheilt):

ming, Heinrich Otto, aus Dresden.
sch, Ludwig Julius, aus Dresden.
t, Friedrich Theodor, aus Störmthal.
, Friedrich Oscar, aus Burgstädt.
ız, Max. Augustin, aus Leipzig.

Zu Ostern wurden aufgenommen:

rs, Alexander Herm., aus Neusellerhausen.
ıewitz, Wilhelm Eduard, aus Dresden.
lt, Rudolph, aus Seifhennersdorf.
browicz, Felix Oscar, aus Leipzig.
ze, Eugen, aus Dresden.
ıdi, Heinrich, aus Dresden.
ır, Georg Ferdinand, aus Schandau.
ger, Oscar Rudolph, aus Dresden.
rt, Carl Louis, aus Dresden.
, Carl Anton, aus Kitscher.
ıann, Johann Wilh. Richard, aus Chemnitz.
ng, Albin Edmund Anton, aus Lobenstein.
ann, Julius, aus Nieder-Rossau.
ır, Jul. Eduard Johannes, aus Düsseldorf.
i, Heinrich Gustav Osmar, aus Dresden.
, Carl Hermann, aus Hermsdorf.
ing, Gustav Hermann, aus Eibau.
, Eduard Robert, aus Störmthal.
ig, Theodosius, aus Salzwedel.
, Adolph Otto, aus Dresden.
Emil Gustav, aus Oelsnitz.
Emil Ottomar Immanuel, aus Dresden.
, Gottlob Carl Richard, aus Dresden.
Julius Wilhelm, aus Dresden.
, Gustav Leopold, aus Wilsdruff.
nn, Carl Paul, aus Dresden.
fius, Alex. Ghika Octavius, aus Heidelberg.
Carl Rudolph, aus Burghammer.
er, Theodor Clemens, aus Gohlis.
er, Eduard Wilhelm, aus Oschatz.
ıhauer, Joh. Georg Eduard, aus Dahlen.
, Gustav Julius, aus Grossschönau.
Heinrich Emil, aus Niedergräfenhain.
Franz Heinrich Theodor, aus Dresden.
40. Wohlgebohren, Carl Anton Richard, aus Hoym.
41. Zill, August Ferdinand, aus Memmendorf.

Im Laufe des Cursus wurde aufgenommen:

42. Piorkowski, Arthur Emil Heinrich, aus Leipzig.

Für einzelne Unterrichtsgegenstände:

43. Lehnert, Ernst Albert, aus Dresden.
44. Käuffer, Paul Ernst, aus Dresden.

Zu Ostern traten ein:

45. Mann, Friedrich Wilh. Gottlob, aus Grossenhain.
46. Schmid, Eduard, aus Vogelsang.

Im Laufe des Cursus traten ein:

47. Haacke, Julius Friedrich Heinrich Richard, aus Dresden.
48. Nauck, Carl Hugo, aus Oschatz.
49. Kötzsche, Carl Friedrich August, aus Leipzig.

Abtheilung für Zeichnen und Thonmodelliren.

1. Hermann, Carl Wilhelm, aus Dresden.
2. Christofani, Johann Joseph, aus Dresden.
3. Pierschel, Heinrich Wilhelm, aus Heidelberg.
4. Jähne, Otto Hermann, aus Berthelsdorf.
5. Könitz, Albert Gustav, aus Torgau (abgegangen).
6. Niese, Theodor Leopold Gustav, aus Dresden (abgegangen).
7. Richter, Carl Friedrich Wilhelm, aus Copitz (abgegangen).
8. Keller, Gustav Alexander, aus Burgk.
9. Moses, Carl August, aus Gross-Burgk.
10. Hulzsch, Gotthelf Benjamin, aus Dresden (abgegangen).
11. Fischer, Christian Gottlieb, aus Neuwelt.
12. Bartsch, Moritz Hermann, aus Dresden.
13. Stöckhardt, Carl Robert, aus St. Petersburg.
14. Scharffenberg, August Bruno, aus Dresden.
15. Scharffenberg, Carl Wilhelm, aus Dresden.

Zu Ostern wurden aufgenommen:

16. Voss, Georg Anton Theodor, aus Johanngeorgenstadt.
17. Weck, Friedrich Julius, aus Dresden.
18. Staudinger, Otto Heinr. Friedrich, aus Dresden.
19. Piehler, Christian Gottlob, aus Fraureuth.

Im Laufe des Cursus wurde aufgenommen:

20. Lindig, Otto Moritz, aus Dresden.

Verzeichniss der Schüler

der

Baugewerkenschule im Lehrcursus $18\frac{54}{55}$.

Repetentenclasse.

1. Köhler, Carl Heinrich, aus Freiberg, Zimmergesell.
2. Schleinitz, Carl Arno, aus Drehbach, Maurergesell.
3. Beeg, Carl Louis, aus Radeburg, Zimmergesell.
4. Beeger, Wilhelm Ferdinand Eduard, aus Gross-Grabe, Maurergesell.
5. Klemm, Otto Heinrich, aus Leipzig, Maurergesell.
6. Nauck, Carl Hugo, aus Oschatz, Maurergesell.
7. Richter, Friedrich Wilhelm, aus Reichenau, Zimmergesell.
8. Venus, Friedrich Richard Alfred, aus Dresden, Maurergesell.
9. Canzler, Julius Richard, aus Colditz, Zimmerlehrling.
10. Demme, Arthur Oscar, aus Altenburg, Maurergesell.
11. Eberhardt, Carl Gottlob, aus Osling, Maurergesell.
12. Fischer, Carl Ernst, aus Dresden, Maurergesell.
13. Gebler, Friedrich Julius, aus Dresden, Zimmerlehrling.
14. Hauffe, Albert, aus Lobstädt, Zimmergesell.
15. Kirchner, Carl Eduard, aus Birkenhayn, Maurergesell.
16. Lobeck, August Emil, aus Dresden, Maurerlehrling.
17. Rossberg, Carl Wilhelm Theodor, aus Lommatzsch, Zimmerlehrling.
18. Schwarze, Gustav Friedrich Eduard, aus Dresden, Maurergesell.
19. Voigt, Friedrich Wilhelm, vom weissen Hirsch bei Dresden, Zimmergesell.
20. Schmidt, Friedrich Louis, aus St. Michaelis bei Freiberg, Zimmerlehrling.
21. Finster, Heinrich Erdmann Leopold, aus Lüben, Zimmergesell.
22. Meiling, Carl August, aus Oeder[illegible] gesell (abgegangen).

Obere Classe.

1. Adam, Johann Christoph, aus Meiss[illegible] lehrling.
2. Anger, Johann Georg Theodor, a[illegible] Maurerlehrling.
3. Fichtner, Immanuel Ferdinand H[illegible] Obergorbitz, Maurergesell.
4. Hottenroth, Anton Hermann Aloy[illegible] den, Zimmerlehrling.
5. Noack, Johann Emil, aus Dresden, [illegible]
6. Scheibe, Johann Friedrich Max., [illegible] Zimmerlehrling.
7. Storz, Wilhelm Eduard Hermann, [illegible] hayn, Maurerlehrling.
8. Vogel, Ferdinand Oscar, aus Ober[illegible] rergesell.
9. Adam, August Heinrich, aus Dres[illegible] lehrling.
10. Gäbler, Ernst Franz, aus Riesa, Ma[illegible]
11. Hartmann, Friedrich August, au[illegible] Maurerlehrling.
12. Höhne, Carl Gottlieb, aus Schönbr[illegible] gesell.
13. Hötzsch, David Wilhelm, aus Str[illegible] lehrling.
14. Jeschke, Carl Eduard, aus Mehlth[illegible] gesell.
15. Kluge, Edmund Louis, aus Cämme[illegible] rerlehrling.
16. Knäbich, Carl Hermann, aus Mei[illegible] lehrling.
17. Köhler, Carl Wilhelm, aus Copitz, [illegible]
18. Müller, Carl Gustav Emil, aus Ca[illegible] lehrling.

se, Richard Adolph, aus Dresden, Zimmer-
ng.
sche, Friedrich Bernhard, aus Dresden,
erlehrling.
z, Ernst Emil Theodor, aus Dresden, Zim-
rling.
e, Wilhelm Rudolph, aus Saalhain, Zimmer-
ng.
r, Robert Bruno, aus Rochlitz, Zimmerlehrl.
oppe, Johann Georg Ottomar, aus Bautzen,
rlehrling.
l, Carl Friedr. Adolph, aus Elstra, Maurer-
ier, Emil Theodor, aus Dresden, Maurer-
g.
Carl Wilh., aus Teichwolframsdorf, Maurer-
ler, Franz Hermann, aus Freiberg, Mau-
elle.
r, Ernst, aus Weinböhle, Maurerlehrling.
r, Otto Constantin, aus Reichenbach, Mau-
g.

Untere Classe.

Gustav Adolph, aus Meissen, Maurer-
.
er, Georg Wilhelm Albert, aus Obergor-
aurerlehrling.
Eduard, aus Kohren, Maurerlehrling.
er, Heinrich Wilhelm, aus Lohmen, Zim-
ll.
e, Carl August, aus Mügeln, Zimmer-
.
ann, Carl Ferdinand Adolph, aus Dres-
urerlehrling.
r, Carl Bruno Heinrich, aus Dresden,
hrling.
r, Ernst Julius, aus Lohsdorf, Müller-
el, Armin, aus Marienberg, Maurer-

10. Grüneiss, Carl Wilhelm, aus Dresden, Maurerlehrling.
11. Haller, Friedrich Oscar, aus Dresden, Maurerlehrling.
12. Hanefeld, Heinrich Gustav, aus Dresden, Zimmerlehrling.
13. Hassler, Johann Carl Eduard, aus Pillnitz, Maurerlehrling.
14. Heym, Carl Gottlieb, aus Augustusburg, Maurerlehrling.
15. Hoyer, Ernst Heinrich Moritz, aus Wilsdruf, Maurergesell.
16. Hübner, Christian Friedrich Moritz, aus Dresden, Steinmetzlehrling.
17. Johne, Carl Traugott, aus Stenz, Zimmergesell.
18. Knäbel, Carl Otto, aus Mohorn, Zimmerlehrling.
19. Leonhardt, Gottlob Hermann, aus Meissen, Zimmergesell.
20. Löwe, Friedrich August, aus Rausslitz, Zimmerlehrling.
21. Lüttich, Carl Gustav, aus Mittelndorf, Maurerlehrling.
22. Müller, Carl Ernst Robert, aus Dresden, Zimmerlehrling.
23. Päz, Friedrich Joseph, aus St. Petersburg, Maurerlehrling.
24. Partzsch, Friedrich Hermann Ferdinand, aus Hintergersdorf, Zimmerlehrling.
25. Richter, Friedrich Traugott, aus Ottowalde, Zimmergesell.
26. Rüger, Otto Conrad Franz, aus Elstra, Zimmerlehrling.
27. Schleissing, Friedrich Ehregott, aus Börtewitz, Zimmerlehrling.
28. Seelig, Friedrich Rudolph, aus Annaberg, Maurerlehrling.
29. Wigand, Raimund, aus Leipzig, Zimmerlehrling.
30. Zimmermann, Gustav Raimund, aus Dresden, Maurerlehrling.
31. Leuthier, Bernhard August, aus Leipzig, Maurergesell.
32. Hertel, Ernst Bruno, aus Elsterberg.

Ordnung der Prüfungen.

a) In der Baugewerkenschule.

Montag, am 26. März, Vormittags 8—12 Uhr, Unt. Cl.: Mathematik (Lehrer Kuschel.)
Allgemeine Baukunde (Baucommissar A
Naturlehre (Assistent Häckel).
Ob. Cl.: Statik und Mechanik (Lehrer Kuschel)
Deutsche Sprache (Dr. Wahoda).
Nachm. 2—4 Uhr, Ob. u. Rep. Cl.: Baukunde (Baucommissar Arndt).
Austheilung der Censuren.

Die Arbeiten der Schüler sind in den Classenzimmern Nr. 25 und 31 ausgestellt.

b) In der polytechnischen Schule.

Donnerstag, am 29. März, Nachm. 2—5 Uhr, unt. Abtheil. Cl. III^a: Mathematik (Lehrer Kuschel).
Cl. III^b: Mathematik (Prof. Fort).
Cl. III^a u. III^b: Physik (Prof. Dr. Lösch
Freitag, am 30. März, Vorm. 8—1 Uhr, „ „ Cl. II.: Mathematik und Mechanik (Prof.
Theoretische Chemie (Prof. Dr. L
Cl. I.: Mathematik (Prof. Dr. Schlömil
Maschinenlehre (Prof. Schneide
Technische Chemie (Prof. Stein).
Nachm. 3—5 Uhr, obere Abtheil. Cl. II.: Geognosie (Prof. Dr. Geinitz).
Section A.: Mechan. Technologie (Prof. Dr. H
Section B.: Höhere Geodäsie (Lehrer Nagel
Sonnabend, am 31. März, Vorm. 9—1 Uhr, obere Abtheil. Cl. I. A. u. Cl. II. A.: Maschinenlehre (Prof. S
Cl. I. C. u. Cl. II. C.: Chemie (Prof. Stein).
Cl. I. B. u. Cl. II. B.: Strassen-, Wasser- und
kunde (Prof. Schul
Cl. I.: Höhere Mechanik (Prof. Dr. Schlöm
Nachmittags 3¼ Uhr: Eröffnung des Resultates der Maturitätsprüfungen und
der Censuren.

Die Prüfungen werden in der Aula abgehalten.

Die Arbeiten der polytechnischen Schüler im Zeichnen, Aufnehmen, Entwerfen, Model
der praktischen Chemie sind am Donnerstag Nachmittage, am Freitage und am Sonnabend frü
senzimmern Nr. 15 und 21 zur Ansicht aufgestellt.

Zu den Prüfungen ladet die Freunde und Gönner unserer Unterrichtsanstalten hierdurch
Dresden, am 28. Februar 1855.

der Direct
Prof. Dr. H

SITZUNG VOM 4. JUNI 1877.

Schlömilch, *Ueber einige unendliche Reihen.* [1])

Wenn die Werthe zweier Integrale von den Formen

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\cos nt\,dt,$$

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\sin nt\,dt$$

nt sind, so lassen sich die verallgemeinerten Fourier'schen

$$\tfrac{1}{2}A_0 + \Sigma A_n \cos nx = f(x) + \Sigma f(2n\pi - x) + \Sigma f(2n\pi + x),$$

$$\Sigma B_n \sin nx = f(x) - \Sigma f(2n\pi - x) + \Sigma f(2n\pi + x),$$

$$0 < x < 2\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

nsformationen auffassen, durch welche zwei periodische in andere, meistens nicht periodische Reihen umgesetzt . Für die Gleichung 2) bietet die Annahme $f(t) = e^{-at^2}$ nntes Beispiel; für die Gleichung 3) mag hier ein neues welches zu mehreren bemerkenswerthen Resultaten

s der schon mehrfach bewiesenen Integralformel [3])

[1]) Im Druck übergeben am 4 Juni 1877.

[2]) s. des Verf. Compendium der höheren Analysis, Bd. II, S. 151.

[3]) Ebendas. Bd. I, § 93, Formel 7.

Math. Phys. Classe. 1877.

$$\int_0^\infty \frac{\sin \lambda \vartheta}{e^{2\pi\vartheta}-1}\, d\vartheta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^\lambda - 1} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

erhält man zunächst

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^{2\pi\vartheta}-1} - \frac{1}{2\pi\vartheta}\right) \sin \lambda\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^\lambda - 1} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

und allgemeiner für $\lambda = 2n\pi\varrho$, $\vartheta = \frac{t}{2\pi\varrho}$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^{\frac{t}{\varrho}}-1} - \frac{\varrho}{t}\right) \sin nt\, dt = 2\varrho\left(\frac{1}{e^{2n\pi\rho}-1} - \frac{1}{2n\pi}\right)$$

man hat also

$$f(t) = \frac{1}{e^{\frac{t}{\rho}}-1} - \frac{\varrho}{t}, \qquad B_n = 2\varrho\left(\frac{1}{e^{2n\pi\rho}-1} - \frac{1}{2n\pi}\right)$$

Die Formel 3) giebt nun, wenn die Summirungen

$$\Sigma \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2},$$

$$\frac{1}{x} - \Sigma \frac{1}{2n\pi - x} + \Sigma \frac{1}{2n\pi + x} = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}x$$

benutzt werden,

4) $$2\varrho\,\Sigma \frac{\sin nx}{e^{2n\pi\rho}-1} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{e^{\frac{x}{\rho}}-1} - \Sigma \frac{1}{e^{\frac{2n\pi - x}{\rho}}-1} + \Sigma \frac{1}{e^{\frac{2n\pi + x}{\rho}}-1} - \frac{\varrho}{2}$$

Die beiden rechter Hand vorkommenden Reihen lass
dadurch transformiren, dass man die Entwickelung

$$\frac{\xi}{1-\xi} = \xi + \xi^2 + \xi^3 + \ldots, \qquad \xi^2 < 1$$

für $\xi = e^{-\frac{2n\pi - x}{\rho}}$ als für $\xi = e^{-\frac{2n\pi + x}{\rho}}$ in Anwendung es wird dann

$$\Sigma \frac{1}{e^{\frac{2n\pi - x}{\rho}} - 1} - \Sigma \frac{1}{e^{\frac{2n\pi + x}{\rho}} - 1} = \Sigma \frac{e^{\frac{nx}{\rho}} - e^{-\frac{nx}{\rho}}}{e^{\frac{2n\pi}{\rho}} - 1}.$$

t man noch die identische Gleichung

$$\frac{1}{e^{\frac{x}{\rho}} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2\rho}} + e^{-\frac{x}{2\rho}}}{e^{\frac{x}{2\rho}} - e^{-\frac{x}{2\rho}}} - \frac{1}{2},$$

nan

$$\frac{x}{2\pi} + 2\varrho \Sigma \frac{\sin nx}{e^{2n\pi\rho} - 1}$$

$$= -\frac{\varrho}{2} \cot \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{x}{2\rho}} + e^{-\frac{x}{2\rho}}}{e^{\frac{x}{2\rho}} - e^{-\frac{x}{2\rho}}} - \Sigma \frac{e^{\frac{nx}{\rho}} - e^{-\frac{nx}{\rho}}}{e^{\frac{2n\pi}{\rho}} - 1},$$

:h wenn man von den Bezeichnungen

$$\frac{e^u + e^{-u}}{2} = \operatorname{cshp} u, \qquad \frac{e^u - e^{-u}}{2} = \operatorname{snhp} u$$

h macht, mit $\sqrt{\varrho}$ dividirt und etwas anders ordnet,

$$\frac{x}{4\pi\sqrt{\varrho}} + \frac{\sqrt{\varrho}}{2} \cot \frac{x}{2} + 2\sqrt{\varrho} \Sigma \frac{\sin nx}{e^{2n\pi\rho} - 1}$$

$$= -\frac{x}{4\pi\sqrt{\varrho}} + \frac{1}{2\sqrt{\varrho}} \operatorname{cthp} \frac{x}{2\varrho} - \frac{2}{\sqrt{\varrho}} \Sigma \frac{\operatorname{snhp} \frac{nx}{\rho}}{e^{\frac{2n\pi}{\rho}} - 1}.$$

et man die linke Seite dieser Gleichung mit $\Phi(z, \varrho)$, n der vorstehenden Gleichung der Satz

$$\Phi(iz, \varrho) = -i\Phi\left(\frac{z}{\varrho}, \frac{1}{\varrho}\right).$$

Durch Differentiationen oder Integrationen in Beziehung a
x oder ϱ lassen sich aus No. 6) weitere Resultate ähnlicher A
ableiten, von denen einige Platz finden mögen. Wird
Gleichung 6) nach x differenzirt und dann mit $\pi\sqrt{\varrho}$ multiplici
so entsteht

$$7)\qquad \frac{1}{4} - \frac{\pi\varrho}{4\sin^2\frac{x}{2}} + 2\pi\varrho\sum\frac{n\cos nx}{e^{2n\pi\rho}-1}$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{\pi}{4\varrho\,\mathrm{snhp}^2\frac{x}{2\rho}} - \frac{2\pi}{\varrho}\sum'\frac{n\,\mathrm{cshp}\frac{nx}{\rho}}{e^{\frac{2n\pi}{\rho}}-1}$$

d. i. wenn die linke Seite mit $\Psi(x,\varrho)$ bezeichnet wird,

$$\Psi(iz,\varrho) = -\Psi\left(\frac{z}{\varrho},\frac{1}{\varrho}\right).$$

Nicht ohne Interesse ist der Fall $x = o$, für welchen pe
dische, nach Cosinus fortschreitende Reihen gültig bleiben. ie
Differenz

$$\frac{\varrho}{4\sin^2\frac{x}{2}} - \frac{1}{4\varrho\,\mathrm{snhp}^2\frac{x}{2\rho}}$$

geht dann in $\frac{1}{12}\left(\varrho+\frac{1}{\varrho}\right)$ über und es wird

$$8)\qquad \frac{1}{4} - \frac{\pi}{12}\varrho + 2\pi\varrho\sum\frac{n}{e^{2n\pi\rho}-1}$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{12}\frac{1}{\varrho} - \frac{2\pi}{\varrho}\sum'\frac{n}{e^{\frac{2n\pi}{\rho}}-1},$$

wonach der Function

$$\Psi(\varrho) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{12}\varrho + \sum\frac{2n\pi\varrho}{e^{2n\pi\rho}-1}$$

die Eigenschaft

$$\Psi(\varrho) + \Psi\left(\frac{1}{\varrho}\right) = o$$

zukommt. Bezeichnet man ferner mit s_n die Summe der Teiler
von n, so kann man der Gleichung 8) auch folgende Fo
theilen

$$9)\qquad \frac{1}{4} - \frac{\pi}{12}\varrho + 2\pi\varrho\sum s_n e^{-2n\pi\rho}$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{12}\frac{1}{\varrho} - \frac{2\pi}{\varrho}\sum s_n e^{-\frac{2n\pi}{\rho}}$$

daraus ergiebt sich für $\varrho = 1$

$$\sum \frac{n}{e^{2n\pi} - 1} = \sum s_n e^{-2n\pi} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\pi}\right) = 0{,}00187793.$$

Bei kleinen ϱ convergiren die in No. 8) und 9) linker Hand ommenden Reihen sehr langsam, die rechts verzeichneten en dagegen so rapid, dass jene Gleichungen als Summen- eln benutzt werden können.

Multiplicirt man die Gleichung 8) mit $-\frac{d\varrho}{\varrho}$ und integrirt $= \varrho$ bis $\varrho = 1$, so erhält man

$$\frac{\pi}{12}\varrho - \frac{1}{4} l\varrho - \sum l\left(1 - e^{-2n\pi\varrho}\right)$$

$$= \frac{\pi}{12}\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{4} l\left(\frac{1}{\varrho}\right) - \sum l\left(1 - e^{-\frac{2n\pi}{\varrho}}\right)$$

entsprechend der Gleichung

$$\frac{\pi}{12}\varrho - \frac{1}{4} l\varrho + \sum \frac{1}{n} s_n e^{-2n\pi\varrho}$$

$$= \frac{\pi}{12}\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{4} l\left(\frac{1}{\varrho}\right) + \sum \frac{1}{n} s_n e^{-\frac{2n\pi}{\varrho}}.$$

chliesslich möge noch bemerkt sein, dass sich manche Resultate mittelst der Theorie der elliptischen Functionen ren lassen. So ist z. B. wenn die Jacobi'sche Be- ung

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$$

ndet wird, nach den Formeln auf S. 136 und 137 der n. n. theor. funct. ellipt.

$$\sum \frac{nq^{2n}}{1 - q^{2n}} = \frac{1}{24\pi^2}\left\{\pi^2 + 4(2 - \varkappa^2)K^2 - 12KE\right\};$$

an hier $\varkappa'$ an die Stelle von $\varkappa$ treten und eliminirt aus Gleichungen $\varkappa^2$, so fallen zufolge der Relation $KE' + KK' = \frac{1}{2}\pi$ alle elliptischen Integrale heraus und die leibende Gleichung geht für $\frac{K'}{K} = \varrho$ in die Formel 8) über.

O. Schlömilch, *Ueber die Summen von Potenzen der gebrochen natürlichen Zahlen.*[1])

Nachdem ich bereits im Jahre 1849 den Zusammenhang zwischen der Function

$$1) \qquad \psi(\mu) = \frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{5^\mu} - \frac{1}{7^\mu} + \ldots, \quad 0 < \mu <$$

und der complementären Function $\psi(1-\mu)$ nachgewiesen hatte,[2]) lag die Vermuthung nahe, dass zwischen den Functionen

$$2) \qquad \varphi(\mu) = \frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} - \frac{1}{4^\mu} + \ldots$$

und $\varphi(1-\mu)$ eine ähnliche Relation bestehen würde. Auf diesem früheren Wege liess sich letztere nicht entdecken, dagegen ergiebt sie sich sehr leicht, wenn man das Integral

$$3) \qquad U = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2x} - \frac{1}{e^x - e^{-x}} \right\} x^{\mu-1} dx, \quad \mu >$$

auf zwei verschiedene Weisen entwickelt.

Ersetzt man zunächst x durch $2x$, so hat man

$$2^{1-\mu} U = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2x} - \frac{2}{e^{2x} - e^{-2x}} \right\} x^{\mu-1} dx$$

mithin durch Subtraction

$$(2^{1-\mu} - 1) U = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^x - e^{-x}} - \frac{2}{e^{2x} - e^{-2x}} \right\} x^{\mu-1} x.$$

---

1) Zum Druck übergeben am 2. Juli 1877.

2) Archiv d. Mathem. u. Phys., Bd. XII und Bd. XXX, einen Beweis der mitgetheilten Relation liefert, ferner Zeitschr. Math. u. Phys., Bd. III, S. 130.

Es ist nun weiter

$$\frac{1}{e^x - e^{-x}} - \frac{2}{e^{2x} - e^{-2x}} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} - \frac{e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$= e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x} - \ldots - (e^{-2x} - e^{-4x} + e^{-6x} - \ldots\ldots)$$

in durch Substitution in die vorige Gleichung und nach Aus-ung der Integrationen

$$(2^{1-\mu} - 1)\, U = \Gamma(\mu) \left(\frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} - \ldots.\right)$$

$$- \Gamma(\mu) \left(\frac{1}{2^\mu} - \frac{1}{4^\mu} + \frac{1}{6^\mu} - \ldots.\right)$$

zufolge der Bedeutung von $\varphi(\mu)$

$$U = \frac{1}{2^{1-\mu} - 1} \left(1 - \frac{1}{2^\mu}\right) \Gamma(\mu)\, \varphi(\mu).$$

Eine andere, nicht für alle positiven μ geltende Ent-elung von U entsteht dadurch, dass man in No. 3) von der nten Gleichung

$$\frac{1}{2x} - \frac{1}{e^x - e^{-x}}$$

$$= \frac{x}{\pi^2 + x^2} - \frac{x}{(2\pi)^2 + x^2} + \frac{x}{(3\pi)^2 + x^2} - \ldots\ldots$$

auch macht und die einzelnen Integralwerthe nach der iel

$$\int_0^\infty \frac{x^\mu\, dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2 \cos \frac{1}{2}\mu\pi} \cdot \frac{1}{a^{1-\mu}}, \quad -1 < \mu < +1$$

mt; diess giebt

$$U = \frac{\pi}{2 \cos \frac{1}{2}\mu\pi} \left\{\frac{1}{\pi^{1-\mu}} - \frac{1}{(2\pi)^{1-\mu}} + \frac{1}{(3\pi)^{1-\mu}} - \ldots.\right\}$$

$$= \frac{\pi^\mu}{2 \cos \frac{1}{2}\mu\pi}\, \varphi(1 - \mu).$$

ie Vergleichung dieses und des unter No. 4) verzeichneten es von U führt nun zu der Relation

$$\frac{\varphi(1-\mu)}{\varphi(\mu)} = \frac{2^\mu - 1}{2^{1-\mu} - 1} \cdot \frac{2\,\Gamma(\mu) \cos \frac{1}{2}\mu\pi}{(2\pi)^\mu}, \quad 0 < \mu < 1.$$

Symmetrischer gestaltet sich dieselbe, wenn man die Fun
$F(\mu)$ durch folgende Gleichung definirt

$$6)\quad F(\mu) = (2^\mu - 1)\left(\frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} - \cdots\right)\sqrt{\frac{\Gamma(\mu)}{(2\pi)^\mu \sin\frac{1}{2}\mu}}$$

es ist dann

$$7)\quad F(1-\mu) = F(\mu).$$

Mittelst eines ganz analogen Verfahrens gelangt man
rasch zu der anfangs erwähnten Relation zwischen $\psi(\mu)$
$\psi(1-\mu)$. Wird nämlich in dem Integrale

$$V = \int_0^\infty \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, x^{\mu-1}\, dx$$

die Entwickelung

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = e^{-x} - e^{-3x} + e^{-5x} - \cdots\cdots$$

benutzt, so ergiebt sich für jedes $\mu > 0$

$$V = \Gamma(\mu)\,\psi(\mu);$$

durch Anwendung der Formel

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{(\frac{1}{2}\pi)^2 + x^2} - \frac{3}{(\frac{3}{2}\pi)^2 + x^2} + \frac{5}{(\frac{5}{2}\pi)^2 + x^2} - \cdots\right\}$$

wird dagegen unter der Voraussetzung $0 < \mu < 1$

$$V = \left(\frac{\pi}{2}\right)^\mu \frac{\psi(1-\mu)}{\sin\frac{1}{2}\mu\pi}$$

mithin durch Vergleichung beider Werthe von V

$$8)\quad \frac{\psi(1-\mu)}{\psi(\mu)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^\mu \Gamma(\mu)\sin\tfrac{1}{2}\mu\pi, \quad 0 < \mu < 1.$$

Um auch hier eine symmetrische Form herbeizuführen
Function $f(\mu)$ durch die Gleichung

$$9)\quad f(\mu) = \left(\frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{5^\mu} - \cdots\right)\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)^\mu \Gamma(\mu)\,\cos\tfrac{1}{2}\mu}$$

rt werden; die Relation

$$f(1-\mu) = f(\mu)$$

nn für die Function f wie früher für F.

us den Gleichungen 5) und 8) kann man durch Diffe-ion nach μ weitere Relationen ableiten, die jedoch von Bedeutung sein dürften.

---

r. **Knop**, *Einige neue Resultate der Untersuchung über die rung der Pflanze.*[1])

e Salzmischung, welche ich bei Vegetationsversuchen am ten zur Ernährung der Pflanzen angewandt habe, besteht Gew. Theilen salpetersauren Kalk, 1 Th. Kalisalpeter, saurem phosphorsauren Kali und 1 oder auch 2 Th. isirtem Bittersalz.

den Lösungen dieser Salze, welche je nach der Natur nze 0,5 bis 5,0 pro Mille, gewöhnlich 1 bis 2 pro Mille, ration haben, vertheilt man noch ein geringes Quantum, a 1 Centigramm, phosphorsaures Eisenoxyd auf 1 Liter eit.

quantitativen Untersuchungen ist es nicht selten ge-die einzelnen Salze nach Aequivalenten mit einander in ungen zu bringen. Den angegebenen Zahlen kommen nach folgender Formel:

$$(Ca\,O_6) + 2\,(NKO_3) + 2\,(PKH_2\,O_4) + 2\,(S\,Mg\,O_4 + 7\,H_2O)$$

eten ganz nahe, wenn man sie halbirt, so wie die ältere weise derselben:

$$(NO_5) + KO,\ NO_5 + KO,\ 2\,HO,\ PO_5 + MgO\ \ SO_3 + 7\,HO$$

weiteres angiebt. Die darnach berechneten Proportionen nämlich in Grammen ausgedrückt:

---

[1]) rgetragen in der Sitzung vom 4. Juni 1877, zum Druck über-2. Juli 1877.

Salzmischung *A*.	In halben Aeq.	Wasserfrei berechnet, Gramm
5. $(N_2 Ca O_6)$	410	$410 = 140\,CaO + 270\,N_2$
2. (NKO_3)	101	$101 = 47\,K_2O + 54\,N_2$
2. (PKH_2O_4)	136	$118 = 47\,K_2O + 71\,P_2$
2. $(SMgO_4 + 7\,H_2O)$	246	$120 = 40\,MgO + 80\,SO$
	749	2474 Basen 475 Sä

Statt der oben angegebenen Verhältnisse 4 : 1 : 1 : 1 erhält a
nach dieser Vorschrift für die wasserfrei berechneten Salz
äquivalenten Proportionen: 4,10 : 1,01 : 1,18 : 1,20.

Diese Salzmischung bringt bei Bereitung der Lösunge
welchen Pflanzen ernährt werden sollen, mehrere Uebels
mit sich. Das Bittersalz setzt sich mit einem Theil des sal
sauren Kalks um und erzeugt ein Quantum Gyps, das nur
eine grosse Menge Wasser in Lösung erhalten werden
Concentrirte Lösungen kann man wegen der Schwerlösli
des Gypses gar nicht herstellen und da auch das Kalks
phosphat, welches durch Einwirkung des sauren phos
sauren Kalis auf einen anderen Theil des salpetersauren
entsteht, in den concentrirten Lösungen der übrigen Salze
sehr löslich ist, so sieht man sich bei Vegetationsvers
grösseren Umfangs genöthigt, die einzelnen Salze für si
lösen, so dass man 4 concentrirte Normallösungen erhält,
beim Beginn des Versuchs in den erforderlichen Quantität
Wasser verdünnt und gemischt werden.

Noch andere Uebelstände entspringen aus der ge
Löslichkeit des phosphorsauren Eisenoxyds in den verd
Lösungen des Salzgemisches. Ein ganzes Liter von 1 bis
centration pro Mille löst noch nicht 1 Milligramm desselb
solchen eisenarmen Flüssigkeiten cultivirte Pflanzen
leicht gelbsüchtig. Ich habe bereits früher angegeben, d
dieser Krankheit dadurch begegnen kann, dass man das
salz täglich mindestens einmal in der Flüssigkeit aufrü
dass es beim Absetzen auf die Wurzeln fällt und an dere
flächen haften bleibt. Die Pflege einer grösseren
Pflanzen wird aber mühsam durch diese Operation.

In den beiden verflossenen Jahren habe ich mich
diese Uebelstände zu beseitigen und bin jetzt im Stand
geben, wie dieselben vollständig gehoben werden könne

Was zunächst das phosphorsaure Eisenoxyd anbe

dessen Auflösung durch Zusatz freier Säuren zur Nährlösung gesteigert werden. Die Grenze aber, bis zu der man Nährstofflösung ansäuern darf, liegt sehr nahe an dem grade, den die Lösung *A* durch die Anwendung des sauren phorsauren Kalis annimmt.

Auf Grund der Versuche, welche ich im Sommer 1859 anllt hatte, habe ich bereits angegeben, dass ein Gehalt von Gramm freier Säure im Liter (die Säure war Phosphor-) schädlich wirke.

Ich habe neuerdings weiter über das Verhalten verlener freier Säuren, der Salzsäure, Phosphorsäure, Schwere und Salpetersäure zur Wurzel gearbeitet und finde, nter diesen Säuren die Salpetersäure sich am besten zum ern der Nährstofflösungen eignet, welche nach vorstehenorschrift bereitet werden.

Auf das Quantum von 749 Grammen Salz (alle 4 Salze rfrei berechnet) kann man 40 Cub. Centim. concentrirte ersäure von 1,40 spec. Gew. anwenden, welches Quantum Grammen wasserfreier Salpetersäure entspricht.

Eine in solcher Weise angesäuerte Lösung wurde von sehr dlichen Pflanzen (Melonen) ohne Nachtheil aufgesogen, sie im Ganzen 0,5 bis 1 pro Mille Salze enthielt. Gräser, tlich Mais, Roggen, Hafer, Gerste, Weizen und auch n und Buchweizen ertrugen sie noch vollständig bei der ntration von 2 pro Mille Gesammtsalzgehalt.

öst man in dem angegebenen Quantum Salpetersäure vor Zusatz zur Nährstofflösung noch das von 0,5 Grammen bereitete Quantum phosphorsaures Eisenoxyd $P_2 Fe_2 O_8$ $_2 O$, welches 1,348 wasserfreiem Salz oder 0,714 Eisen- und 0,634 Phosphorsäure entspricht, so enthalten die offlösungen Eisen genug in völlig gelöstem Zustande, und t keine Gelbsucht mehr bei den darin cultivirten n ein.

emerkenswerther ist das folgende Resultat von Versuchen, hwefelsäure durch eine andere Säure des Schwefels zu n, welche mit keiner Base ein schwer lösliches oder uns Salz giebt.

bei habe ich nämlich gefunden, dass die Unterschwefelstatt der Schwefelsäure angewandt werden kann. Ich nterschwefelsaure Magnesia, das Salz $S_2 Mg O_6 + 6 H_2 O$

dargestellt, und dadurch das Bittersalz ersetzt und auf s
Weise völlig klare, sehr concentrirte vollständige Nähr
lösungen bereitet, welche auch den ganzen Bedarf an phos
saurem Eisenoxyd enthalten. Es hat sich gezeigt, dass da
Ansäuern einer solchen Lösung oben vorgeschriebene Qua
Salpetersäure keine Oxydation der Unterschwefelsäure be
so dass eine solche vollständige und concentrirte Nährstoffl
längere Zeit, verschlossen wie frei an der Luft, aufbewahr
den kann. Diese concentrirte Lösung enthält in 2 Liter
lirtem Wasser:

Salzmischung *B*.	In halben Aeq.	Wasserfrei berechnet, Grame
5. $(N_2 Ca O_6)$	410	$410 = 140\,CaO + 270\,N_2O$
2. (NKO_3)	101	$101 = 47\,K_2O + 54\,N_2$
2. (PKH_2O_4)	136	$118 = 47\,K_2O + 71\,P_2$
$(S_2 Mg O_6 + 6\,H_2O)$	146	$92 = 20\,MgO + 72\,S_2$
40 C.C. Salpeters. v. 1,40 sp. Gew.	18	$= —$ $18\,N_2$
Phosphat von 0,5 Eisen	—	$1{,}348 = 0{,}714\,Fe_2O_3 + 0{,}63$
Wasserfr. Salze	740,348	$= 254{,}714$ Basen $+ 485{,}634$ Sur

Die vorgeschriebene Menge Salpetersäure ist durc
suche ermittelt, sie besteht in demjenigen Quantum, da
derlich ist, um alles Kalksuperphosphat in der concentrirt
sung flüssig zu erhalten.

In 20 Cubiccentimetern dieser Lösung sind im Gan
Gramme Salze enthalten. Verdünnt man 20 Ccm. derse
4 Liter, so haben letztere die Concentration von 1,85 p
die in den meisten Fällen zweckmässig und in besondere
schwächer oder stärker zu nehmen ist.

Fügt man zu den mit Hülfe der Salzmischung *A* be
verdünnten Nährstofflösungen ebenfalls die Lösung vo
phorsaurem Eisenoxyd in freier Salpetersäure in den
Vorschrift zu berechnenden Verhältnissen, so unterscheidet
diese saure Lösung *A* nur durch einen grösseren G
Magnesia und die Gegenwart von Schwefelsäure an d
der Unterschwefelsäure von der sauren Lösung *B*.

Die besten Resultate habe ich allerdings nur bei Anwe
der nicht besonders angesäuerten Lösung *A* erhalten.
aber in diesen beiden sauren Lösungen alle Mittel, um
testen Umfange über die Bedeutung der Mineralbasen u
ralsäuren bei der Ernährung der Pflanze zu experim

in der Lösung *B* löst sich, ebenso wie das phosphorsaure
, ein genügendes Quantum aller anderer Phosphate, bei-
weise von phosphorsaurem Mangan, Nickel, Kobalt etc., und
n man statt des Bittersalzes unterschwefelsaure Magnesia
ndet, kann man den Kalk durch jede andere Erde, selbst
Baryt und Strontian und alle Metalloxyde ersetzen.
Versuche über die Vertretbarkeit der zur Pflanzenernäh-
ls geeignet erkannten Basen und Säuren konnte man bis-
ur mit Hülfe der sehr unvollkommenen Methode des Um-
s der Pflanze aus einer Lösung in eine zweite anstellen.
ch habe gegen Ende Februar dieses Jahres Mais, Weizen,
Gerste, Roggen, Buchweizen und Bohnen auf Wasser
n lassen und dieselben nach reichlicher Bewurzelung in
sung *B* von 2 pro Mille Concentration fortcultivirt. Sie
keln sich alle gesund zu kräftigen sattgrünen Pflanzen.
u gleicher Zeit stellte ich andere Exemplare derselben
n in drei verschiedene Lösungen, in welchen der sal-
ure Kalk vollständig durch äquivalente Mengen salpeter-
Zinkoxyd, salpetersauren Strontian und salpetersauren
rsetzt war. In diesen drei Lösungen starben alle Pflanzen
neller bei directem Auffallen des Sonnenlichtes als bei
tem Himmel und im Schatten, immer die mit der Zink-
ernährten zuerst, dann die in der Barytlösung und
die in der Strontianlösung stehenden.

b die unterschwefelsaure Magnesia ganz ebenso wie das
lz bei der Pflanzenernährung mitwirkt, oder ob dieselbe
Entwicklung einzelner Organe, auf Blüthen und Frucht-
einen anderen Einfluss ausübt, darüber müssen noch
ortzusetzende Versuche entscheiden. Mit einer grösseren
tiven Untersuchung der Art ist Herr von Sanders-
aus Zwickau jetzt in meinem Laboratorium beschäftigt.

SITZUNG AM 30. JULI 1877.

A. Mayer, *Die Kriterien des Maximums und Minimum i einfachen Integrale in den isoperimetrischen Problemen.* [1])

Nach der in den Lehrbüchern angenommenen Theor das isoperimetrische Problem, den relativ grössten oder kle Werth des gegebenen Integrales

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f\,(x\, y_1 \ldots y_n\, y'_1 \ldots y'_n)\, dx$$

zu finden, wenn nur solche Functionen $y_1 \ldots y_n$ in B gezogen werden sollen, für welche eine Reihe anderer geg Integrale

$$V_\varkappa = \int_{x_0}^{x_1} f_\varkappa\,(x\, y_1 \ldots y_n\, y'_1 \ldots y'_n)\, dx,\ \varkappa = 1, 2, \ldots$$

vorgeschriebene Werthe behalten, vollkommen identisch Aufgabe, das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} (f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m)\, dx$$

zu einem absoluten Maximum oder Minimum zu machen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ unbestimmte Constanten bedeuten, die so bestimmt werden, dass die Integrale $V_\varkappa$ die gegebenen annehmen. Dies ist nun allerdings vollkommen richtig es sich lediglich um die Lösung des Problems, d. h. und stimmung der unbekannten Functionen y handelt. gegen auch die Frage, ob und innerhalb welcher Gr gefundenen Functionen y ein wirkliches Maximum oder in erzeugen, in beiden Problemen auf dieselbe Art zu bea so würde sich beispielsweise ergeben, dass der Sch

1) Zum Druck übergeben am 30. Juli 1877.

homogenen, an beiden Enden aufgehangenen Fadens nur
e die möglich tiefste Lage einnimmt, als die Entfernung
e Endpunkte eine gewisse Grenze nicht übersteigt, was
ur absurd ist. Es ist daher klar, dass die Kriterien des
ums und Minimums in beiden Problemen unmöglich die-
e sein können. Dies hat für den Fall einer einzigen unbe-
n Function y, von der aber beliebig hohe Differential-
ten in den Integralen auftreten können, schon 1869 der,
noch in demselben Jahre verstorbene Schwedische Mathe-
k *Lundström* in der Abhandlung: »Distinction des maxima
minima dans un problème isopérimétrique«, Nova acta reg.
s. Upsaliensis Ser. 3. Vol. VII, hervorgehoben und darin
n die richtigen Kriterien des Maximums und Minimums
isoperimetrischen Probleme aufgestellt.

Allein abgesehen davon, dass in Folge ungenauen Ausdrucks
n Theil auch nicht ganz richtiger Formeln seine Schlüsse
wer verständlich sind, dürfte es wohl überhaupt auf dem
öm'schen Wege unmöglich sein, nachzuweisen, dass die
nwendig erkannten Kriterien zugleich auch hinreichend
einer Meinung nach kann nämlich dieser letztere, schwie-
unkt nur dadurch entschieden werden, dass man nach
rgange von *Jacobi* und *Clebsch* die zweite Variation des
nden Integrales auf ihre einfachste Form bringt, und ge-
sche von der Integration von Differentialgleichungen ab-
g Transformationen vermeidet *Lundström* absichtlich als
plicirt.

Nun habe ich aber in meiner Habilitationsschrift[1]) die Krite-
ds Maximums und Minimums für dasjenige allgemeine
n entwickelt, in welchem, wie *Lagrange*[2]) und *Clebsch*[3])
haben, alle Aufgaben der Variationsrechnung, in denen
r einzige unabhängige Variable auftritt, enthalten sind.
sn allgemeinen Kriterien des Maximums und Minimums
daher nothwendig auch die besonderen Kriterien der isope-
hen Probleme stecken. Der Wunsch, die letzteren durch
ug aus jenen strenger zu begründen und damit zugleich an
chtigsten Beispiele die Anwendbarkeit meiner allgemeinen

---

[1]) Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima der einfachen Inte-
Leipzig 1866.

[2]) Leçons sur le calcul des fonctions, Ausgabe v. 1806 p. 466 u. 469.

[3]) Crchardt's J. 55 p. 336.

Kriterien auf die verschiedenen speciellen Gattungen von Pro
men der Variationsrechnung darzuthun, war die Veranlass
zu der vorliegenden Note. Unter Hinweis auf den Aufsatz: »U
die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen I
grale«, Borchardt's J. 69, der, in theilweise veränderter
stellung, die Untersuchungen meiner Habilitationsschrift re
ducirt, setze ich diese Ableitung in §. 1 auseinander.

In den isoperimetrischen Problemen tritt ferner ein
bemerkenswerthes Reciprocitätsgesetz zu Tage, nach wel
jedem isoperimetrischen Probleme mit m isoperimetrischen
dingungen m andere isoperimetrische Probleme in der
aequivalent sind, dass nicht nur die Lösung, sondern auc
Grenzen, innerhalb deren die Lösung ein wirkliches Maxi
oder Minimum hervorruft, allen $m + 1$ Problemen gemeinsc
lich angehören. Dieses Reciprocitätsgesetz ist lediglich eine
der *Euler*'schen Regel zur Lösung der isoperimetrischen Pro
und der Form, in welcher bei diesen Problemen die zweite Va
tion sich vor jeder Reduction darbietet. Die Ableitung des
procitätsgesetzes aus den Kriterien des §. 1 wird daher al
willkommene Bestätigung dieser Kriterien zu betrachten se

Im dritten § endlich soll ein, für die Ebene bereit
Lundström behandeltes Beispiel die Anwendung der Krit
und des Reciprocitätsgesetzes erläutern.

§ 1.

Kriterien des Maximums und Minimums.

In dem oben angegebenen Aufsatze, auf den sich im
den die eingeklammerten Seitenzahlen beziehen, habe i
Problem behandelt:

I. *Man soll die Functionen* $y_1, \ldots y_n$ *zwischen de*
m Bedingungsgleichungen:

$$\varphi_\varkappa (x\, y_1 \ldots y_n\, y'_1 \ldots y'_n) = 0,\ \varkappa = 1, 2, \ldots n$$

vorgeschrieben sind, so bestimmen, dass bei gegebenen
und Grenzwerthen das Integral:

$$V = \int_{x_0}^{x} f\,(x\, y_1 \ldots y_n\, y'_1 \ldots y'_n)\, dx$$

ein relatives Maximum oder Minimum werde,

habe für dasselbe (p. 260) die folgenden Resultate er-
n:

Das Problem I wird gelöst durch die $n + m$ gewöhnlichen
entialgleichungen zwischen der unabhängigen Variabeln x
len $n + m$ abhängigen Variabeln $y_1, \ldots y_n, \lambda_1, \ldots \lambda_m$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_h} = \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y_h'}, \quad \varphi_\varkappa = o,$$

ıen:

$$\Omega = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_m \varphi_m$$

ıd damit man den $2n$ Grenzbedingungen genügen könne,
n die durch vollständige Integration dieser Gleichungen
nenen Functionen $y_1, \ldots y_n$ $2n$ willkürliche Constanten
. a_{2n} enthalten. Hat man diese Constanten durch die ge-
n Grenzwerthe ausgedrückt, so ist es (abgesehen immer
m Eintreten besonderer Ausnahmefälle [p. 241, 260], da-
so erhaltenen Functionen ein wirkliches relatives Maxi-
oder Minimum des Integrales hervorbringen, hinreichend
m Allgemeinen wenigstens auch) nothwendig, dass die
renze x_1 (die ich immer $> x_0$ voraussetze) zwischen x_0
r zunächst an x_0 gelegenen Wurzel der Grenzgleichung

$$\sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial a_n} \frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \cdots \frac{\partial y_{no}}{\partial a_{2n}} = o$$

ınd dass überdies die homogene Function zweiter Ord-

$$2W = \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y'_h \partial y'_i} U_h U_i,$$

willkürliche Argumente $U_1, \ldots U_n$ den m Bedingungs-
ıgen:

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y'_h} U_h = o$$

rfen sind, zwischen x_0 und x_1 ihr Zeichen nicht ändern

ılen Formeln 3), 4), 5) sind unter $y_1, \ldots y_n, \lambda_1, \ldots \lambda_m$
n Functionen von x, $a_1, \ldots a_{2n}$ zu verstehen, die durch
tändige Integration der Gleichungen 1) erhalten wurden,

den Integrationsconstanten $a_1, \ldots a_{2n}$ selbst hat man diees Werthe beizulegen, die sich aus den $2n$ Grenzbedingungen gaben, und mit y_{h0} endlich ist der Werth der Function y_h $x = x_0$ bezeichnet.

Diese Resultate lege ich dem Folgenden zu Grunde und trachte nunmehr das isoperimetrische Problem:

II. *Die Functionen* $y_1, \ldots y_n$ *von* x, *welche den m isoperimetrischen Bedingungen*

$$\int_{x_0}^{x_1} f_\varkappa (x\, y_1 \ldots y_n\, y'_1 \ldots y'_n)\, dx = l_\varkappa,\ \varkappa = 1, 2, \ldots m$$

unterworfen sind und überdies in den beiden gegebenen Werthen x_0 *und* x_1 *gegebene Werthe erhalten sollen, so zu bestimmen, dass für dieselben das Integral*

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f\, (x\, y_1 \ldots y_n\, y'_1 \ldots y'_n)\, dx$$

ein relatives Maximum oder Minimum werde (wobei selbstverständlich m jetzt nicht mehr, wie im Probleme I., der Einschränkung $m < n$ unterliegt).

Führt man nach dem Vorgange *Lagrange*'s m neue Variable $u_1, \ldots u_m$ durch die Substitutionen:

$$u_\varkappa = \int f_\varkappa\, dx$$

ein, so kann man die isoperimetrischen Bedingungen durch m Bedingungsgleichungen:

$$f_\varkappa - u'_\varkappa = 0,$$

verbunden mit den $2m$ Grenzbedingungen:

$$[u_\varkappa]\ x = x_0 = \alpha_\varkappa,\ [u_\varkappa]\ x = x_1 = \alpha_\varkappa + l_\varkappa$$

ersetzen und in den letzteren die Anfangswerthe $\alpha_\varkappa$ als gegebene Grössen betrachten, wodurch das Problem II die Form annimmt:

III. *Die* $n + m$, *durch die m gegebenen Bedingungen*

6) $$\varphi_\varkappa \equiv f_\varkappa - u'_\varkappa = 0$$

verbundenen Functionen $y_1, \ldots y_n, u_1, \ldots u_m$ *sind so zu*

nen, dass bei gegebenen Grenzwerthen von $x, y_1, \ldots y_n,$ *. . u_m das Integral V ein relatives Maximum oder Minimum*

Das Problem III ist aber nur ein specieller Fall des Problems I man kann daher auf dasselbe die oben angegebene Regel nden.

Nach derselben sind die Differentialgleichungen des Pro- III:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_h} = \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y'_h}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial u_x} = \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial u'_x}, \quad \varphi_x = 0.$$

reduciren sich aber, wenn man

$$F = f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m$$

von selbst auf die Gleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial y_h} = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_h}, \quad 0 = -\frac{d\lambda_x}{dx}, \quad f_x - u'_x = 0.$$

roblem III wird folglich gelöst durch die n Differential- ngen:

$$\frac{\partial F}{\partial y_h} = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_h},$$

en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ als unbestimmte Constanten aufzufassen nd nach Integration dieser Gleichungen ergeben sich die h die Quadraturen:

$$u_x = c_x + \int f_x \, dx.$$

nan die erforderliche Anzahl willkürlicher Constanten er- m den vorgeschriebenen $2(n + m)$ Grenzbedingungen n zu können, ist es hiernach nothwendig und hinreichend, e n Gleichungen 7) auflösbar seien nach den n zweiten tialquotienten $y''_1, \ldots y''_n$.

ferner nach 2) und 6)

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u'_k \partial y'_h} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u'_k \partial u'_i} = 0$$

educirt sich für das Problem III die Function $2W$ auf

$$2W = \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_h \partial y'_i} U_h U_i$$

und die m Bedingungsgleichungen 5) werden:

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial f_x}{\partial y'_h} U_h = V_x .$$

Diese m Gleichungen bestimmen aber nur die in der Fucti
$2W$ gar nicht vorkommenden Grössen $V_1, \ldots V_m$ als Funcon
der Argumente $U_1, \ldots U_n$. Sie beschränken also die Wlk
lichkeit dieser Argumente in keiner Weise und können lal
ganz weggelassen werden.

Die Grenzgleichung endlich wird im Problem III, wer n
unter $a_1, \ldots a_{2n}$ jetzt die $2n$ willkürlichen Constanten vste
welche die vollständige Integration der Gleichungen 7) rt s
bringt:

$$\sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial a_n} \frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \cdots \frac{\partial y_{no}}{\partial a_{2n}} \frac{\partial u_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial u_m}{\partial \lambda_m} \frac{\partial u_{10}}{\partial c_1} \cdots \frac{\partial u_{no}}{\partial c_n} =$$

Da aber:

$$\frac{\partial y_h}{\partial c_k} = \frac{\partial y_{ho}}{\partial c_k} = \frac{\partial u_h}{\partial c_k} = \frac{\partial u_{ho}}{\partial c_k} = 0$$

und

$$\frac{\partial u_k}{\partial c_k} = \frac{\partial u_{ko}}{\partial c_k} = 1$$

ist, so reducirt sich diese Gleichung auf

$$\sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial a_n} \frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \cdots \frac{\partial y_{no}}{\partial a_{2n}} \frac{\partial v_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial v_m}{\partial \lambda_m} = 0,$$

worin:

8) $$v_k = u_k - u_{ko} = \int_{x_0}^{x} f_k \, dx,$$

und man erhält somit aus der für das Problem I arefüh
Regel die folgenden Kriterien des Maximums und Minimum
das isoperimetrische Problem II:

IV. *Das Problem* II *wird gelöst durch die n Diere*
gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial y_h} = \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_h},$$

in denen

$$F = f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots \lambda_m f_m$$

d die λ unbestimmte Constanten bedeuten. Die vollständige ration dieser Gleichungen liefert, vorausgesetzt, dass sich nen die zweiten Differentialquotienten $y''_1, \ldots y''_n$ nicht iren lassen, $y_1, \ldots y_n$ als Functionen von x, von den m imetrischen Constanten $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ und von $2n$ Integrations- nten $a_1, \ldots a_{2n}$. Hat man diese $2n + m$ Constanten en m isoperimetrischen und den $2n$ Grenzbedingungen be- t, so ergeben (abgesehen von solchen Ausnahmen, die nur onderen Fällen eintreten können und ihrer Natur nach en allgemeinen Regeln entziehen) *die so erhaltenen Func- $y_1, \ldots y_n$ ein wirkliches relatives Maximum oder Mini- les Integrales V, wenn die homogene Function zweiter Ord- ler n unabhängigen Variabeln $U_1, \ldots U_n$*

$$2W = \sum_{i=1}^{h=n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_h \partial y'_i} U_h U_i$$

ılb der Integrationsgrenzen stets dasselbe Zeichen bewahrt, lange überdies die obere Grenze x_1 zwischen x_0 und der st an x_0 gelegenen Wurzel der Grenzgleichung

$$, x_0) \equiv \sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial a_n} \frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \cdots \frac{\partial y_{no}}{\partial a_{2n}} \frac{\partial v_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial v_m}{\partial \lambda_m} = 0$$

in welcher die Functionen v_k durch die Quadraturen

$$v_k = \int_{x_0}^{x} f_k \, dx$$

chnen sind. Ist dagegen die erste Bedingung nicht erfüllt, t sicher weder ein Maximum, noch ein Minimum statt und emeinen gilt dasselbe auch dann, wenn x_1 die angegebene erreicht oder überschritten hat.

§ 2.

ciprocitätsgesetz der isoperimetrischen Probleme.

s Problem II, auf welches sich der Satz IV bezieht, lässt Zeichen kurz so wiedergeben:

$$V \equiv \int_{x_0}^{x_1} f \, dx = M_a^i$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1 \, dx = l_1, \int_{x_0}^{x_1} f_2 \, dx = l_2, \ldots \int_{x_o}^{x_1} f_m \, dx = l_m.$$

Vergleichen wir dasselbe jetzt mit dem anderen isoperimetrische Probleme, welches enthalten ist in den Formeln:

$$\beta) \quad \begin{cases} V_1 \equiv \int_{x_0}^{x_1} f_1 \, dx = M_a^i \\ \int_{x_0}^{x_1} f dx = l, \int_{x_0}^{x_1} f_2 \, dx = l_2, \ldots, \int_{x_0}^{x_1} f_m \, dx = m \end{cases}$$

Ich nehme an, dass die gegebenen Grenzen und Grenzwerte beiden Problemen dieselben sind.

Führen wir, des bequemeren Vergleichs halber, homogene isoperimetrische Constanten ein, d. h. setzen wir:

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{\mu},$$
$$\mu F \equiv \mu f + \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_m f_m = \Phi$$

und bedenken, dass die Determinante $\Delta (x\, x_0)$ sich ir einen constanten Factor ändert, wenn wir an Stelle der $a_1, \ldots$ $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ irgend $2n + m$ unabhängige Functionen dieser Constanten als neue Constanten einführen, so können wir d Satz IV auch so aussprechen:

Das Problem $\alpha)$ wird gelöst durch die n Differenalgl chungen:

$$9) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y_h} = \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'_h},$$

nach deren vollständiger Integration die $2n$ Integrationsconstan $a_1, \ldots a_{2n}$ und die Verhältnisse der $m + 1$ isoperimetrisch Constanten $\mu, \mu_1, \ldots \mu_m$ aus den $2n$ Grenzbedingungen u den m isoperimetrischen Bedingungen:

$$10) \quad \int_{x_0}^{x_1} f_1 \, dx = l_1, \int_{x_0}^{x_1} f_2 \, dx = l_2, \ldots \int_{x_0}^{x_1} f_m \, dx = m$$

zu bestimmen sind, und die so erhaltenen Functionen , ... erzeugen ein wirkliches Maximum oder Minimum im Problem so lange die obere Grenze x_1 zwischen x_0 und der zunächst x_0 gelegenen Wurzel der Grenzgleichung

$$\Delta_\alpha (x_1\, x_0) \equiv$$
$$\sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial a_n} \frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \cdots \frac{\partial y_{n0}}{\partial a_{2n}} \frac{\partial v_1}{\partial \mu} \frac{\partial v_2}{\partial \mu_2} \cdots \frac{\partial v_m}{\partial \mu_m} =$$

t, vorausgesetzt, dass überdies die homogene Function
er Ordnung

$$2W_\alpha \equiv \frac{1}{\mu} \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'_h \partial y'_i} U_h U_i$$

hen x_0 und x_1 stets dasselbe Zeichen behält.
Gehen wir nun über zum Probleme β), so bleiben für dieses
eichungen 9) und die Grenzbedingungen ganz unverändert
ie isoperimetrischen Bedingungen 10) ändern sich nur in-
t, als jetzt an Stelle der Bedingung

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1 dx = l_1$$

gende:

$$\int_{x_0}^{x_1} f dx = l$$

Im Allgemeinen wird also die Lösung des Problems β)
ieden sein von der des Problems α). Nehmen wir aber
ıss sich bei der Lösung des Problems α) als Maximums-
linimumswerth des Integrales V ergeben habe

$$V = \varkappa,$$

l unter der Annahme

$$l = \varkappa$$

s dem Problem α) erhaltenen Functionen $y_1, \ldots y_n$ gleich-
ıuch Lösungen des Problems β) und liefern hier für das
l V_1 den Werth l_1. Denn nach Voraussetzung erfüllen
unctionen und die Werthe der Constanten-Verhältnisse
$\ldots : \mu_m$, die sich bei ihrer Auffindung ergaben, gleich-
die Gleichungen 9) und die $2n$ Grenzbedingungen, die
Problemen gemein sind, und genügen überdies den $m+1$
ıngen:

$$\int_{x_0}^{x_1} f dx = \varkappa, \int_{x_0}^{x_1} f_1 dx = l_1, \ldots \int_{x_0}^{x_1} f_m dx = l_m,$$

bei der Annahme 11) die isoperimetrischen Bedingungen
des ersten, wie des zweiten Problems enthalten.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass man immer d
bloss algebraische Operationen das Problem β) lösen kan
oft man das Problem α) gelöst hat für unbestimmte Werth
Constanten $l_1, \ldots l_m$.

Weiter ist für die unter der Voraussetzung 11) beiden
blemen gemeinsame Lösung die Grenzgleichung im Problem

$$\Delta_\beta (x\, x_0) \equiv$$

$$\sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial a_n} \frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \cdots \frac{\partial y_{no}}{\partial a_{2n}} \frac{\partial v}{\partial \mu} \frac{\partial v_2}{\partial \mu_2} \cdots \frac{\partial v_m}{\partial \mu_m} = 0,$$

wo die y_h und v_k, die a_i und μ_k dieselben Werthe haben wi
in der Determinante $\Delta_\alpha (x\, x_0)$ und nur an Stelle von
Function

$$12) \qquad v = \int_{x_0}^{x} f\, dx$$

getreten ist. Wegen

$$\Phi = \mu f + \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_m f_m$$

folgt aber aus 12) und 8):

$$\mu v + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_m v_m = \int_{x_0}^{x} \Phi\, dx$$

und hieraus ergiebt sich durch partielle Differentiation nach
und μ_k:

$$\mu \frac{\partial v}{\partial a_i} + \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial a_i} + \cdots + \mu_m \frac{\partial v_m}{\partial a_i} = \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_h} \frac{y_h}{a_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y'_h} \frac{y'_h}{a_i} \right)$$

$$v_\varkappa + \mu \frac{\partial v}{\partial \mu_\varkappa} + \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mu_\varkappa} + \cdots + \mu_m \frac{\partial v_m}{\partial \mu_\varkappa} = \int_{x_0}^{x} dx f_\varkappa + \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial \mu_\varkappa} + \frac{\partial \Phi}{\partial y'_h} \frac{\partial y'_h}{\partial \mu_\varkappa} \right)$$

Man hat also, wenn man unter c irgend eine der Constant
$a_1, \ldots a_{2n}, \mu, \mu_1, \ldots \mu_m$ versteht:

$$+ \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial c} + \cdots \mu_m \frac{\partial v_m}{\partial c} = \int_{x_0}^{x} dx \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial c} + \frac{\partial \Phi}{\partial y'_h} \frac{\partial y'_h}{\partial c} \right).$$

t identisch:

$$\frac{'_h}{} + \frac{\partial \Phi}{\partial y'_h} \frac{\partial y'_h}{\partial c} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_h} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'_h} \right) \frac{\partial y_h}{\partial c} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'_h} \frac{\partial y_h}{\partial c} \right)$$

ach 9):

$$= \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'_h} \frac{\partial y_h}{\partial c} \right),$$

hält man:

$$= - \frac{\mu_1}{\mu} \frac{\partial v_1}{\partial c} + \frac{1}{\mu} \left\{ - \sum_{k=2}^{k=m} \mu_k \frac{\partial v_k}{\partial c} + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial \Phi}{\partial y'_h} \frac{\partial y_h}{\partial c} - \sum_{k=1}^{h=n} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y'_h} \right]_0 \frac{\partial y_{ho}}{\partial c} \right\},$$

Index o wie früher die Substitution $x = x_0$ andeutet.

ese Formeln drücken aber nur die Elemente $\frac{\partial v}{\partial c}$ der inante $\Delta_\beta (x\, x_0)$ durch die Grössen $- \frac{\mu_1}{\mu} \frac{\partial v_1}{\partial c}$, ver- um je mit demselben Factor multiplicirte, correspondirende te der anderen Reihen dieser Determinante aus. Daher tisch:

$$\Delta_\beta (x\, x_0) = - \frac{\mu_1}{\mu} \Delta_\alpha (x\, x_0).$$

unter der Annahme 11) beiden Problemen gemeinsame sind also auch ihre Grenzgleichungen dieselben.

dlich tritt an die Stelle der homogenen Function $2W_\alpha$ blems α) im Problem β) die Function:

$$2W_\beta = \frac{1}{\mu_1} \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'_h \partial y'_i} U_h U_i.$$

betrachtete gemeinschaftliche Lösung hat man also:

$$2W_\beta = \frac{\mu}{\mu_1} 2W_\alpha = \frac{1}{\lambda_1} 2W_\alpha.$$

Fassen wir diese Resultate zusammen, so können wir dem den folgenden Satz aussprechen:

V. *Hat man das isoperimetrische Problem*

$$\alpha)\quad \begin{cases} V \equiv \int_{x_0}^{x_1} f\,dx = M_a^i \\ \int_{x_0}^{x_1} f_1\,dx = l_1, \int_{x_0}^{x_1} f_2\,dx = l_2, \cdots, \int_{x_0}^{x_1} f_m\,dx \quad l \end{cases}$$

durch vollständige Integration der n Differentialgleichunge

$$7)\qquad \frac{\partial F}{\partial y_h} = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_h}$$

gelöst, in denen

$$F \equiv f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_m f_m$$

ist und die λ unbestimmte Constanten sind, deren Werthe ich dann aus den m isoperimetrischen Bedingungen des Iobl bestimmen, und hat man hierbei als Maximums- oder Mi mu Werth des Integrales V gefunden:

$$V = l,$$

so ist die erhaltene Lösung dieses Problems gleichzeitig uch Lösung des reciproken Problems:

$$\beta)\quad \begin{cases} V_1 \equiv \int_{x_0}^{x_1} f_1\,dx = M_a^i \\ \int_{x_0}^{x_1} f\,dx = l, \int_{x_0}^{x_1} f_2\,dx = l_2, \cdots, \int_{x_0}^{x_1} f_m\,d = \end{cases}$$

vorausgesetzt, dass man in beiden Problemen den Grenzen Grenzwerthen dieselben festen Werthe vorgeschrieben h.

Ist ferner im Problem α)

$$V = l$$

ein wirkliches Maximum oder Minimum des Integrale V, s zu gleicher Zeit im Probleme β)

$$V_1 = l_1,$$

ein wirkliches Maximum oder Minimum des Integrales V_1,

$$\lambda_1 > 0$$

gegen ein Minimum oder Maximum von V_1, wenn

$$\lambda_1 < o$$

ndlich, wenn im Probleme α) der gefundene Werth l von V ein Maximum, noch ein Minimum ist, so gilt dasselbe auch bleme β) von dem Werthe l_1 von V_1.

an sieht aus diesem *Reciprocitätsgesetze der isoperimetrischen me*, dass man (bei festen, aber unbestimmten Werthen der nten l) nur für irgend ein vorgelegtes isoperimetrisches m die Lösung gefunden und die Frage entschieden zu haben t, ob und innerhalb welcher Grenzen diese Lösung ein hes Maximum oder Minimum der Aufgabe ergiebt, um en Fragen ohne Weiteres auch für jedes reciproke Problem vorten zu können. Es versteht sich ferner von selbst, dass das Reciprocitätsgesetz anwenden zu können, nicht noth- ist, das gegebene Problem α) gerade auf dem ange- n Wege gelöst zu haben. Man braucht vielmehr nur, man die Lösung auf irgend einem anderen Wege, z. B. geometrische Betrachtungen ermittelt hat, rückwärts die hen der isoperimetrischen Constanten $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ zu be- n. Bei den isoperimetrischen Problemen von der Form:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(xy)\, dx = M_a^i, \int_{x_0}^{x_1} dx\, \sqrt{1 + y'^2} = l_1$$

t:

$$2W = \frac{\lambda_1}{(\sqrt{1 + y'^2})^3}\, U_1^2;$$

hört also einer Lösung, die ein Maximum erzeugt, ein er, und einer Lösung, die ein Minimum hervorbringt, ein r Werth von λ_1 zu.[1])

---

eiläufig bemerkt ist das Reciprocitätsgesetz nicht die einzige Eigen- elche die isoperimetrischen Aufgaben vor den anderen Problemen tionsrechnung voraus haben. Für die isoperimetrischen Probleme ehr noch ein anderer, höchst wichtiger Satz, den man das *Gesetz ränderlichkeit der isoperimetrischen Constanten* nennen könnte- an nämlich durch Einschaltung von Bedingungen zwischen den die Curven y zwingt, sich in Zweige zu theilen, so ändern sich rationsconstanten a von einem Zweige zum andern, aber die iso- schen Constanten λ behalten überall dieselben Werthe. In dem n Falle, wo man die geschlossene Curve grössten Flächeninhalts

§ 3.
Beispiel.

Diejenige Curve von gegebener Länge und gegebenen Endpunkten zu finden, deren Schwerpunkt am tiefsten liegt.

Ich nehme die z Axe vertikal und dem Sinne der Schwere entgegengesetzt und lege, der Bequemlichkeit halber, die xz Ebene durch den gegebenen Anfangspunkt der Curve. Die Aufgabe drückt sich dann analytisch durch die Formeln aus:

$$1) \quad \begin{cases} \int_{x_0}^{x_1} z \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx = Min. \\ \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx = l_1 . \end{cases}$$

Man hat also hier:

$$2) \quad F = (z + \lambda_1) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$$

und erhält als Lösung der Aufgabe die Kettenlinie:

$$3) \quad \begin{cases} y = \frac{a_1}{a_2} x + a_3 , \\ z + \lambda_1 = \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \left\{ e^{\frac{x - a_4}{a_2}} + e^{-\frac{x - a_4}{a_2}} \right. . \end{cases}$$

woraus sich für

$$v_1 = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

der Werth:

$$4) \quad v_1 = \tfrac{1}{2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \left\{ e^{\frac{x - a_4}{a_2}} - e^{-\frac{x - a_4}{a_2}} - e^{\frac{x_0 - a_4}{a_2}} + e^{-\frac{x_0 - a_4}{a_2}} \right.$$

ergiebt.

---

bei gegebenem Umfange, oder kleinsten Umfangs bei gegebener F
sucht und überdies verlangt, dass die Curve im Innern eines gegeb
Polygons verlaufen solle, fällt das letztere Gesetz mit dem soeben
Steiner'schen Satze zusammen, dass alle freien Theile der gesuchten C
Bögen gleicher Kreise sein müssen.

ie 5 Constanten $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ \lambda_1$ bestimmen sich aus der ge-
n Lage der beiden Endpunkte und der gegebenen Bogen-
ı, und zwar erhält man zwei verschiedene Werthsysteme
)en, die zwei gleichen und entgegengesetzten Werthen der
nten a_2 angehören. Da nach 4)

$$\frac{dv_1}{dx} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{a_2}\left(\frac{x - a_4}{\underset{e}{a_2}} - \frac{x - a_4}{\underset{+\,e}{a_2}}\right)$$

asselbe Zeichen, wie $\frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{a_2}$ besitzt, so hat man, da-
: Bogen positiv werde, in den Formeln 3) und 4) der
$+ a_2^2$ das Zeichen von a_2 beizulegen.
e Function ferner:

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} U_1^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z'} U_1 U_2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z'} U_2^2$$

ch 1)

$$= \frac{z + \lambda_1}{(\sqrt{1 + y'^2 + z'^2})^3}\left\{U_1^2 + U_2^2 + (z' U_1 - y' U_2)^2\right\}$$

also nach 3) beständig dasselbe Zeichen wie $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.
er das Minimum zu erhalten, müssen wir diese Wurzel
ihr a_2 positiv nehmen, d. h. wir müssen von den beiden
nien von gegebener Länge, die sich in der, durch die
gegebenen Endpunkte gehenden Vertikalebene von dem
ınkte zum anderen ziehen lassen, diejenige nehmen, die
ıvexe Seite nach unten kehrt. In Folge der Voraus-
$z_0 = o$ wird nach 3) dann $\lambda_1 > o$.
Grenzgleichung endlich:

$$\sum \pm \frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y_0}{\partial a_2}\frac{\partial z}{\partial a_3}\frac{\partial z_0}{\partial a_4}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda_1} = o$$

sich zunächst wegen der aus 3) und 4) folgenden For-

$$\frac{\partial y}{\partial a_3} = 1\ ,\ \frac{\partial y}{\partial a_4} = o\ ,\ \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} = o\ ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial a_3} = o\ ,\ \frac{\partial z}{\partial \lambda_1} = -1\ ,\ \frac{\partial v_1}{\partial a_3} = o\ ,\ \frac{\partial v_1}{\partial \lambda_1} = o$$

sofort auf die Gleichung:

$$6) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial (y-y_0)}{\partial a_1}, & \frac{\partial (y-y_0)}{\partial a_2}, & o \\ \frac{\partial (z-z_0)}{\partial a_1}, & \frac{\partial (z-z_0)}{\partial a_2}, & \frac{\partial (z-z_0)}{\partial a_4} \\ \frac{\partial v_1}{\partial a_1}, & \frac{\partial v_1}{\partial a_2}, & \frac{\partial v_1}{\partial a_4} \end{vmatrix} = o .$$

Setzt man weiter für den Augenblick

$$7) \quad \frac{x-a_4}{a_2} = \xi , \ \tfrac{1}{2}(e^{\xi} + e^{-\xi}) = p , \ \tfrac{1}{2}(e^{\xi} - e^{-\xi}) =$$

wonach sich aus 3) und 4) ergiebt:

$$y - y_0 = a_1 (\xi - \xi_0) ,$$
$$z - z_0 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\ (p - p_0) ,$$
$$v_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\ (q - q_0) ,$$

differentiirt die letzteren Formeln partiell nach a_1, a_2, a_4 substituirt die Werthe der Differentialquotienten in die Gleichung 6), so erhält man nach einfachen Reductionen und unter Weglassung des constanten Factors $\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_2^2}$ die Gleichung:

$$(\xi - \xi_0)\,[(p\,q_0 - p_0 q)\,(\xi - \xi_0) - (p - p_0)^2 + (q - q_0)^2] =$$

sodass also schliesslich, wenn man noch

$$\xi - \xi_0 \equiv \frac{x - x_0}{a_2} = \Theta$$

setzt, die Grenzgleichung des Problems wird:

$$\Theta\, \Psi(\Theta) = o ,$$

worin:

$$\Psi(\Theta) \equiv e^{\Theta} + e^{-\Theta} - \frac{\Theta}{2}(e^{\Theta} - e^{-\Theta}) -$$

ist. Die Betrachtung der Functionen $\Psi'\Theta$ und $\Psi''\Theta$ zeigt sofort, dass diese Gleichung nur die eine reelle Wurz $\Theta =$ d. h. $x = x_0$ zulässt. Die Gleichung ergiebt also keine Beschränkung für die obere Grenze x_1; es findet vielmehr für

unten convexe Kettenlinie ein unbeschränktes Minimum
nd wir haben den Satz gewonnen:

Unter allen Curven von gegebener Länge und gegebenen End-
n hat stets die Kettenlinie den tiefsten Schwerpunkt.

a $\lambda_1 > o$, so geht zugleich aus diesem Satze durch An-
ıng des Reciprocitätsgesetzes noch der folgende hervor:

Unter allen Curven von gegebenen Endpunkten, deren Schwer-
auf einer und derselben Horizontalebene liegen, hat stets
tenlinie die kleinste Länge.

ı dem absoluten Probleme dagegen

$$\int_{x_0}^{x_1} (z + \lambda_1) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx = Min.,$$

s, vorausgesetzt, dass man der Constanten λ_1 denselben
giebt, den sie in der eben behandelten isoperimetrischen
e erhält, durch die nämliche Kettenlinie gelöst wird, tritt
Stelle der Gleichung 5) die Gleichung:

$$\Sigma \pm \frac{\partial y}{\partial a_1} \frac{\partial y_0}{\partial a_2} \frac{\partial z}{\partial a_3} \frac{\partial z_0}{\partial a_4} = o,$$

unter Weglassung des Factors $\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_2^2} (\xi - \xi_0)$ auf

$$(q\,\xi - p)\, q_0 - q\,(q_0\,\xi - p_0) = o$$

. Nun ist nach 3) und 7)

$$= \frac{2\,(z + \lambda_1)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}},\ q = \frac{2\,a_2\,z'}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}},\ \xi - \xi_0 = \frac{x - x_0}{a_2}.$$

em absoluten Probleme erhalten wir also als Grenz-
ıg:

$$x - \frac{z + \lambda_1}{z'} = x_0 - \frac{z_0 + \lambda_1}{z'_0}$$

enn wir auf derjenigen Kettenlinie, welche die Aufgabe
n dem gegebenen Anfangspunkte aus fortschreiten, so
vir, damit ein wirkliches Minimum stattfinde, hier das
nicht bis zu demjenigen Punkte ausdehnen, dessen

Tangente die in der Vertikalebene der beiden gegebenen
punkte gezogene Gerade $z = -\lambda_1$ wieder in demselben P
schneidet, wie die Tangente des Anfangspunktes. Wo wi
in dem isoperimetrischen Probleme 1) ein unbegrenztes
mum erhalten, erhalten wir in dem unbedingten Proble
nur ein begrenztes Minimum, was den Unterschied zwi
diesen beiden, dieselbe Lösung besitzenden Problemen kla
vortreten lässt.

Mathematische

bhandlungen

von

Dr. Oskar Schlömilch,

ssor der höheren Mathematik an der Königl. Sächs. technischen Bildungsanstalt zu Dresden.

Inhalt.

das Theorem von Mac Laurin. — II. Die Bürmann'sche III. Ueber approximative Quadraturen. — IV. Ueber ein tegral mit zwei willkührlichen Funktionen. — V. Ueber die estimmung der Masse bei ungleichförmiger Dichtigkeit.

Mit einer Figurentafel.

Dessau,

Verlag von Moritz Katz.

1850.

I.

Über das Theorem von Mac Laurin.

es eine unter den Meistern der Wissenschaft anerkannte
ist, dass divergente Reihen keine Summen besitzen
s auf das Nämliche hinauskommt, dass eine divergente
iner bestimmten Grösse gleichgesetzt werden darf, hat
ufmerksamkeit der Analytiker von Neuem der Entwickelungs-
Mac Laurin zugewendet, um dieselbe in einem wesentlichen
vervollständigen. Da nämlich ohne Weiteres klar ist, dass
rgenz oder Divergenz der Reihe

$$+ \frac{f'(o)}{1} x + \frac{f''(o)}{1.2} x^2 + \frac{f'''(o)}{1.2.3} x^3 + \ldots.$$

von der Natur der Funktion $f(x)$ abhängt, so entsteht
die Frage, auf welche Weise man unmittelbar aus dieser
las Intervall, innerhalb dessen die obige Reihe convergirt,
Gültigkeitsintervall der Entwickelung entnehmen könnte.
twortung dieser Frage ist allerdings schon seit längerer
nt; giebt man nämlich der in Rede stehenden Reihe
ieder und bestimmt den zugehörigen Rest, so ist

$$\frac{x^n f^{(n)}(\vartheta x)}{1.2 \ldots n} = f(o) + \frac{f'(o)}{1} x + \frac{f''(o)}{1.2} x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n-1)}(o)}{1.2 \ldots (n-1)} x^{n-1}$$

en positiven ächten Bruch bezeichnet, und es convergirt
irt nun die Reihe, je nachdem der Rest

$$\frac{x^n f^{(n)}(\vartheta x)}{1.2 \ldots n}$$

sich für unendlich wachsende n der Gränze Null nähert

Die Anwendung dieses Kriteriums ist aber meistenth beschwerlich, indem sie voraussetzt, das man den n^{ten} D quotienten von $f(x)$ in eine independente Formel entwi ben könne, was bei einigermaassen zusammengesetzten so umfangreiche Formeln erfordert, dass sich die Abn Nichtabnahme jenes Restes daraus nur schwer ersehen läs kommt noch Eines. Bei der Wichtigkeit, welche die Zahlen, namentlich seit der Entdeckung ihres geometrisch erlangt haben, darf sich die Wissenschaft nicht meh wickelungen im Bereiche der reellen Zahlen beschränk entspringt daraus von selbst die Forderung, die Grän Gültigkeit der Mac Laurin'schen Reihe in dem allgem zu bestimmen, wo man sich x unter der Form $r\ (cost + i$ $= re^{ti}$ enthalten denkt. — Aus diesen Bemerkungen dass dem vorigen, gewissermaassen *a posteriori* gewon rium für die Gültigkeit der Mac Laurin'schen Formel i mehr *a priori* abgeleitetes Kennzeichen an die Seite zu dessen Gebrauch gleichförmig auf imaginäre und reelle Va Diesen Gedanken hat zuerst *Conchy* auszuführen gesuc dabei in einen nicht unbedeutenden Irrthum verfallen, i nämlich aus der Funktion $f(x)$ und ihren ersten Di tienten allein schon die Gültigkeitsgränzen der Mac Reihe bestimmen zu können glaubte, was durchaus ist. Einerseits um diesen Fehler zu beseitigen, andere etwas sehr gekünstelten Betrachtung Cauchy's ein einfachere gegenüberzustellen, geben wir die nachste wickelungen; dass hierbei die einfachsten Sätze rechnung benutzt worden sind, wird wohl keinen Ans denn obschon die Mac Laurin'sche Formel ihrer Ableitung nach in die Differenzialrechnung gehört, so i

uien, dass die tiefere Untersuchung derselben, wie z. B. e genaue Bestimmung des Restes ohne Hülfe des unbe- t leibenden Bruches ϑ, die Hülfe der Integralrechnung noth- gerfordert.

I.

V schicken zunächst einige Bemerkungen über die Diskon- t ler Funktionen voraus, einestheils um diesen im Ganzen i eichend beachteten Punkt genauer zu erörtern, anderntheils li spätere Untersuchung gerade in dieser Rücksicht eine e begriffsbestimmung erfordert. Eine Funktion $f(x)$ von nur V iabele x nennen wir diskontinuirlich an der Stelle $x = \xi$, s h die Ausdrücke $f(\xi - \delta)$ und $f(\xi + \varepsilon)$, worin δ und ε li positive bis zur Null abnehmende Grössen bezeichnen, e chiedenen Gränzen nähern, sobald man δ und ε in Null h lässt, wobei noch ausdrücklich bemerkt werden möge, i δ und ε als verschiedene Grössen ansehen. Die geome- bkunft dieser Definition ist leicht zu erkennen; wenn ne Curve bei P abbricht und nachher bei Q ihren Lauf wieder t so kann man P und Q durch eine Gerade verbinden, darauf eine zweite Gerade als Abscissenachse errichten die Gleichung der Curve auf dieses neue rechtwinklige a nsystem bezogen denken; ist nun $y = f(x)$ diese n, so gehören zur Abscisse $OM = \xi$ zwei Ordinaten MQ, von denen die erste die bisherige Reihe von e beschliesst und die zweite eine neue Reihe von Ordi- n ngt, während jeder anderen Abscisse immer nur eine dinate entspricht. Für $LM = \delta$, $MN = \varepsilon$ ist nun $\xi - \delta)$, $NV = f(\xi + \varepsilon)$ und wenn δ und ε in Null e

$$IP = Lim\ f(\xi - \delta),\quad MQ = Lim\ f(\xi + \varepsilon)$$

rvorgeht, dass die beiden Gränzwerthe von einander d sind.

In ähnlicher Weise nennen wir eine Funktion f (r
Variabeln r und t diskontinuirlich für $r = \varrho$ und $t =$
diese speziellen Werthe von r und t so beschaffen sind,
entweder die Ausdrücke

$$f(\varrho - \delta, \tau) \text{ und } f(\varrho + \varepsilon, \tau)$$

oder die folgenden

$$f(\varrho, \tau - \delta') \text{ und } f(\varrho, \tau + \varepsilon')$$

für unendlich abnehmende δ, ε, δ', ε' verschieden
nähern, und wenn man sich erinnert, dass eine Funk
Veränderlichen geometrisch eine Fläche bedeutet, so
leicht die geometrische Bedeutung erkennen. So ist
Funktion

$$f(r, t) = \frac{1}{1 + r^2 \cos 2t}$$

diskontinuirlich an der Stelle $r = 1$ und $t = \frac{1}{2}\pi$; de

$$f(1 - \delta, \tfrac{1}{2}\pi) = \frac{1}{1 - (1 - \delta)^2} = \frac{}{2\delta}$$

$$f(1 + \varepsilon, \tfrac{1}{2}\pi) = \frac{1}{1 - (1 + \varepsilon)^2} = -\frac{}{2\varepsilon}$$

und hiervon sind die Gränzwerthe bezüglich $+\infty$ und
verschieden. Ebenso hätte man

$$f(1, \tfrac{1}{2}\pi - \delta') = \frac{1}{1 - \cos 2\delta'} = \frac{1}{2 \sin}$$

$$f(1, \tfrac{1}{2}\pi + \varepsilon') = \frac{1}{1 - \cos 2\varepsilon'} = \frac{1}{2 \sin}$$

und hiervon sind die Gränzwerthe ebenfalls verschie
und δ' beliebige auf verschiedene Weise abnehmen
bezeichnen; für $\varepsilon' = 2\delta'$ wäre z. B.

$$f(1, \tfrac{1}{2}\pi - \delta') - f(1, \tfrac{1}{2}\pi + \varepsilon')$$

$$= \frac{1}{2 \sin^2 \delta'} - \frac{1}{8 \cos^2 \delta' \sin^2 \delta'} = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4 \cos^2}\right)$$

und diese Differenz convergirt nicht gegen die Null, wi

müsste, wenn sich der Minuendus und der Subtrahendus and gleichen Gränzen näherten.

dem wesentlichsten Einflusse ist die Diskontinuität einer da, wo es sich um die Werthangabe eines bestimmten

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

dessen Integrationsgränzen so beschaffen sind, dass die innerhalb des Intervalles a bis b eine Unterbrechung der t erleidet. Hier kommt es zunächst darauf an, sich zu den, was überhaupt unter einem bestimmten Integrale ver- erden soll, und diese Erörterung ist um so nöthiger, als finitionen des bestimmten Integrales giebt, deren Identität chiedenheit sich nicht unmittelbar beurtheilen lässt. Die rung sagt: wenn bei unbestimmter Integration

$$\int f(x)\,dx = F(x) + Const$$

steht man unter dem bestimmten, zwischen den Gränzen genommenen, Integrale die Differenz $F(b) - F(a)$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

klärt eine zweite Definition das vorstehende Integral als welcher sich der Ausdruck

$$(\ + \delta_2 f(a+\delta_1) + \delta_3 f(a+\delta_1+\delta_2) + \ldots$$
$$\ldots + \delta_n f(a + \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{n-1})$$

wald man die Grössen $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_{n-1}$, welche der g

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n = b - a$$

issen, bis zu jedem beliebigen Grade der Kleinheit e lässt. Die geometrische Bedeutung hiervon ist, dass in Rede stehende bestimmte Integral als die Fläche ansieht,

welche von der Strecke $b - a$ der Abscissenachse, Ordinaten $f(a)$ und $f(b)$ endlich noch von der durch die $y = f(x)$ charakterisirten Curve begränzt wird; für $OB = b$ ist z. B. in Fig. 1

$$\int_a^b f(x)\, dx = \text{Fläche } ABDQPCA$$

und die in Nr. 2. verzeichnete Summe bildet einen Näh dafür, indem man sich die Fläche in n Streifen zer welche als Rechtecke mit den Grundlinien δ_1, δ_2, ... Höhen $f(a)$, $f(a + \delta_1)$, $f(a + \delta_1 + \delta_2)$, ... $f(a$ $+ \ldots + \delta_{n-1})$ gelten können. — Welche von diesen b tionen des bestimmten Integrales man als die primäre ist an sich gleichgültig, wenn man nur fest an der B weise hält und sich über das Verhältniss orientirt, in e zweite Definition zur ersten steht; wir werden nach d von *Lejeune Dirichlet* und *Jacobi* die zweite Definitio legen, weil sie einestheils die Klarheit der geometrisch für sich hat, anderntheils weil sie auf diskontinuirlich eben so gleichförmig als auf stetige Funktionen passt, der Figur unmittelbar ersieht. Wir haben daher noch d der ersten, nunmehr secundären, Definition gegen d erörtern, also die Frage zu beantworten, unter welche ein bestimmtes Integral als die Differenz zweier Speziale unbestimmten Integrales angesehen werden darf.

Sind die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ durch die Gl

3) $$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

mit einander verbunden, so ist vermöge der Definiti stimmten Integrales

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

und zufolge der Bedeutung des Differenzialquotienten

$$Lim \frac{F(x + \delta) - F(x)}{\delta} = f(x)$$

ch das Zeichen *Lim* auf die unendliche Abnahme von δ
t Geben wir dem δ einen individuellen endlichen Werth,
er Quotient $[F(x + \delta) - F(x)] : \delta$ dem Differenzial-
n n $f(x)$ nicht gleich, sondern um eine gewisse nicht näher
te uchende Grösse ξ davon verschieden, so dass wir

$$\frac{F(x + \delta) - F(x)}{\delta} = f(x) + \xi$$

m ekehrt

$$\delta f(x) + \delta\xi = F(x + \delta) - F(x)$$

rfen; von der Grösse ξ kennen wir zwar den genauen
ht, aber wir wissen wenigstens so viel von ihr, dass sie
gl chzeitig gegen die Gränze Null convergirt, und Diess reicht
se Zwecke aus. Setzen wir nun in der Gleichung 4. der
m h

$$= a,\ a + \delta_1,\ a + \delta_1 + \delta_2,\ \ldots\ a + \delta_1 + \ldots + \delta_{n-1}$$
$$= \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \ldots\ \delta_n$$

zeichnen die verschiedenen Werthe von ξ, welche jenen
t nen entsprechen, mit $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\ \xi_n$, so finden die
n n statt:

$$+ \delta_1\xi_1 = F(a + \delta_1) - F(a)$$
$$+ \delta_1) + \delta_2\xi_2 = F(a + \delta_1 + \delta_2) - F(a + \delta_1)$$
$$+ \delta_1) + \delta_3\xi_3 = F(a + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3) - F(a + \delta_1 + \delta_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta_1 + \ldots + \delta_{n-1}) + \delta_n\xi_n = F(a + \delta_1 + \ldots + \delta_n) - F(a + \delta_1 + \ldots + \delta_{n-1})$$

nn wir an, dass die Funktion $f(x)$ innerhalb des Inter-
a bis $x = a + \delta_1 + \ldots + \delta_n$ keine Unterbrechung
i tät erleide (eine Supposition, deren Nothwendigkeit sich
a her zeigen wird), so giebt die Addition der obigen
g

$$\delta_1 f(a) + \delta_2 f(a + \delta_1) + \delta_3 f(a + \delta_1 + \delta_2) + \cdots$$
$$\cdots + \delta_n f(a + \delta_1 +$$

$$+ \delta_1 \zeta_1 + \delta_2 \zeta_2 + \delta_3 \zeta_3 + \cdots + \delta_n \zeta_n$$
$$= F(a + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n) - F(a)$$

und wenn wir δ_1, δ_2, ,.. δ_n so wählen, dass ihre Summe ist, so folgt

5) $\delta_1 f(a) + \delta_2 f(a + \delta_1) + \delta_3 f(a + \delta_1 + \delta_2) + \cdots$
$$\cdots + \delta_n f(a + \delta_1 + \delta_2 +$$

$$= F(b) - F(a) - [\delta_1 \zeta_1 + \delta_2 \zeta_2 + \cdots + \delta_n \zeta_n$$

Die Grössen ζ_1, ζ_2, ... ζ_n können hier verschiedene Zei gleichwohl kann man den Betrag von $\delta_1 \zeta_1 + \delta_2 \zeta_2 +$ leicht in zwei Gränzen einschliessen; ist nämlich ζ' diejen den Grössen ζ, welche den grössten absoluten Werth a die absolut kleinste, so ist, wenn einmal ζ' und das an für die verschiedenen ζ gesetzt wird und alle Glie genommen werden

$$\delta_1 \zeta_1 + \delta_2 \zeta_2 + \cdots + \delta_n \zeta_n < (\delta_1 + \delta_2 + \cdots$$

und zugleich

$$\delta_1 \zeta_1 + \delta_2 \zeta_2 + \cdots + \delta_n \zeta_n > (\delta_1 + \delta_2 + \cdots$$

und da $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n = b - a$, so liegt e Produktensumme

$$\delta_1 \zeta_1 + \delta_2 \zeta_2 + \delta_3 \zeta_3 + \cdots + \delta_n \zeta_n$$

zwischen den beiden Grössen

$$(b - a)\,\zeta' \text{ und } (b - a)\,\zeta''$$

Was nun von jedem ζ gilt, muss natürlich auch v gelten, und wenn daher sämmtliche δ unendlich a nähern sich auch ζ' und ζ'' folglich ebenso $(b - a)\,\zeta'$ nd der gemeinschaftlichen Gränze Null; dasselbe find der zwischenliegenden Produktensumme statt und es st gleichzeitig abnehmende δ_1, δ_2, ... δ_n

$$Lim\,[\delta_1 \zeta_1 + \delta_2 \zeta_2 + \cdots + \delta_n \zeta_n] =$$

t n wir dieses Resultat für die Gleichung 5., indem wir auch sämtliche δ gegen die Null convergiren lassen, so ist

$$[f(a) + \delta_2 f(a + \delta_1) + .. + \delta_n f(a + \delta_1 + .. + \delta_{n-1})] = F(b) - F(a)$$

rmöge unserer Definition des bestimmten Integrales

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

s also in dem Falle, wo $f(x)$ kontinuirlich ist von $x = a$ $= b$, in der That jedes bestimmte Integral durch die Differenz r Spezialwerthe eines unbestimmten Integrales ausgedrückt n kann.

Wesentlich anders wird die Sache, wenn $f(x)$ innerhalb des al s a bis b eine Unterbrechung der Kontinuität erleidet. eht nämlich, wie sehr leicht zu sehen ist, eine Diskonti- n $F(x)$ nach sich, welche an derselben Stelle wie bei i ritt, so dass also $F(\xi)$ ebenso wie $f(\xi)$ zwei verschiedene e nat, welche wir durch die Bezeichnung $F(\xi - o)$ und $F(\xi + o)$ cl iden wollen. Nun wurde aber vorhin angenommen, dass b der Addition des aufgestellten Gleichungensystemes $+ \delta_1)$ gegen $- F(a + \delta_1)$, $F(a + \delta_1 + \delta_2)$ gegen $- \delta_1 + \delta_2)$ etc. hebe oder dass überhaupt $F(x) - F(x) = o$ li s ist allerdings richtig, sobald $F(x)$ nur einen Werth lsch dagegen, wenn der Minuendus einen anderen Werth r Subtrahendus. Dieser Fall tritt hier ein; denn vermöge b itutionen $x = a$, $a + \delta_1$. $a + \delta_1 + \delta_2$, ... etc. durch- a das Intervall a bis b und zwar stetig, weil sämmtliche δ r nter jeden Grad der Kleinheit herab vermindert werden; m denn unter den Werthen von x auch der Spezialwerth or (wegen $b > \xi > a$) und folglich erscheint bei der n ener Gleichungen auch die Differenz $F(\xi - o) - F(\xi + o)$, n ht verschwindet; so gelangt man nicht zu der Gleichung 6., ur folgenden

7) $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) + F(\xi - o) - F(\xi +$

Es lässt sich dieses Resultat auch auf folgendem Wege
Vermöge der von uns adoptirten Definition des bestimmten
ist, wie man leicht bemerkt,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\xi} f(x)\,dx + \int_{\xi}^b f(x)\,dx$$

was geometrisch bedeutet, dass die Fläche *ABDQPCA*
beiden Flächen *AMPCA* und *MBDQM* besteht. Sch
statt dessen

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\xi - o} f(x)\,dx + \int_{\xi + o}^b f(x)\,dx)$$

womit weiter nichts gesagt ist, als dass bei der Bestim
AMPCA die Ordinate *MP* als letzte begränzende Or
dass *MQ* als Anfangsordinate für die folgende Fläche
gelten soll, so ist jetzt die Funktion $f(x)$ einerseits in
innerhalb der Gränzen a und $\xi - o$, ebenso ferner stet
den Gränzen $\xi + o$ und b. Durch Anwendung des Th
wird jetzt

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(\xi - o) - F(a)] + [F(b) - F(+$$

was mit der Gleichung 7. identisch ist, wir schreibe
schärferer Bezeichnung

8) $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) + Lim\,[F(\xi - \delta) -$$

wobei sich das Zeichen *Lim* auf die gleichzeitige
Abnahme von δ und ε bezieht.

Vielleicht ist ein Beispiel hierzu nicht überflüss
Formel

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

e man ohne weitere Rücksicht finden

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan \pi - \tan o = o$$

r lig absurd ist, wenn man sich erinnert, dass die Curve der hig $y = sec^2 x$ die in Fig. 2. verzeichnete Gestalt besitzt $\cdot \frac{1}{2}\pi = MB$. $OC = BD = 1$) und dass folglich die d· Abscisse $OB = \pi$ stehende Fläche nicht nur nicht Null, r sogar unendlich gross ist. Berücksichtigt man dagegen, t· x an der Stelle $x = \frac{1}{2}\pi$ eine Unterbrechung der Konti- leidet, so folgt aus Nr. 8. für $\xi = \frac{1}{2}\pi$ und $F(x) = \tan x$

$$\frac{d}{s\,v} = \tan \pi - \tan o + Lim\,[\tan(\frac{\pi}{2} - \delta) - \tan(\frac{\pi}{2} + \varepsilon)]$$

$$= Lim\,[\cot \delta + \cot \varepsilon] = \infty$$

n der That sein muss.

sverdient, namentlich der folgenden Untersuchungen wegen, onders hervorgehoben zu werden, dass bei der Frage nach inuität oder Diskontinuität von $F(x)$ nicht nur die Art, wie Funktion $F(x)$ vorkommt, und das für x geltende Integra- vall, sondern auch die konstanten Grössen, welche $F(x)$ e könnte, in Berücksichtigung zu ziehen sind, weil es leicht h kann, dass eine und dieselbe Funktion innerhalb des tsintervalles stetig bleibt oder diskontinuirlich wird, je n man einer in ihr vorkommenden Konstanten diesen oder rth ertheilt. Wenn z. B. aus der Formel

$$\int \frac{dx}{(r-x)^2} = \frac{1}{r-x} + Const.$$

ehende zu folgen scheint

$$\int_a^b \frac{dx}{(r-x)^2} = \frac{1}{r-b} - \frac{1}{r-a} = \frac{b-a}{(r-b)\,(r-a)}$$

so ist letztere schlechterdings nicht allgemein richtig
Gültigkeit lediglich auf den Fall beschränkt, dass r nicht
a und b fällt; wäre nämlich im Gegentheile $b > r > a$,
x beim Durchlaufen des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ u
den Werth r annehmen und an dieser Stelle würde eine
nuität in $F(x) = 1 : (r - x)$ eintreten; man hat daher f
Fall

$$\int_a^b \frac{dx}{(r-x)^2} = \frac{b-a}{(r-b)\ (r-a)} + Lim\left[\frac{1}{r-(r-\delta)} - \frac{1}{r-}\right.$$

$$= \frac{b-a}{(r-b)\ (r-a)} + Lim\left[\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\varepsilon}\right] = \infty$$

Auch hier ist die geometrische Bedeutung völlig klar;
deren Gleichung $y = 1 : (r - x)^2$ lautet, besteht
getrennten Zweigen, welche beide auf der positiven S
liegen und die zur Abscisse $x = r$ gehörende unendlich
zur gemeinschaftlichen Asymptote haben (ähnlich wie in
liegt nun r ausserhalb des Intervalles a bis b, so h
während dieses Intervalles immer nur mit dem einen je
Zweige zu thun, welche für sich betrachtet stetig verl
dagegen r zwischen a und b, so besteht die gesuchte l
zwei getrennten Stücken, von denen das erste durch den
das zweite durch den anderen Curvenzweig begränzt wi
dieser Stücke ist für sich unendlich und mithin ist e
Summe, während die Formel 9. in diesem Falle, wo
$r - a$ positiv, dagegen $r - b$ negativ ist, eine neg
geben würde.

Wir haben bisher vorausgesetzt, dass die Funktion F
rend des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ nur eine ein
brechung der Kontinuität erleide, man wird aber hi
absehen, wie sich die Sache in dem Falle gestalten wird, wo
solche Unterbrechungen der Stetigkeit eintreten. Fänd
statt an den Stellen $x = \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, wobei wir uns

Grösse nach geordnet denken, so würde sich das von a bis b erstreckende Integral in eine Reihe anderer Integrale von a bis $\xi_1 - o$, von $\xi_1 + o$ bis $\xi_2 - o$, von $\xi_2 + o$ bis $\xi_3 - o$ etc. zerlegen lassen, und hieraus entspringt dann die Formel

$$\int f(x)\,dx = F(b) - F(a) + Lim\left[F(\xi_1 - \delta_1 - F(\xi_1 + \varepsilon_1)\right]$$
$$+ Lim\left[F(\xi_2 - \delta_2) - F(\xi_2 + \varepsilon_2)\right]$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ Lim\left[F(\xi_n - \delta_n) - F(\xi_n + \varepsilon_n\right]$$

wobei $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ sämmtlich positive bis zur Null abnehmende Grössen bezeichnen.

II.

Wir beschäftigen uns jetzt mit dem bestimmten Integrale

$$\int_o^{2\pi} F(re^{ti})\,dt$$

worin r eine wesentlich positive Konstante und i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ bezeichnet. Von der im Allgemeinen willkührlichen Grösse r setzen wir voraus, dass sie keinen individuellen Werth ϱ besitzt, vermöge dessen die Funktion $F(re^{ti})$ innerhalb des Intervalles $t = o$ bis $t = 2\pi$ eine Unterbrechung der Kontinuität erleidet. Wäre z. B. $F(re^{ti})$ diskontinuirlich für $r = \varrho$ und $t = \tau$, so nehmen wir r entweder durchaus $< \varrho$ oder $> \varrho$, damit $F(re^{ti})$ nicht diskontinuirlich werde, wenn t innerhalb des Intervalles $t = o$ bis $t = 2\pi$ einen Werth τ erreicht. Bezeichnen wir nun den unbestimmten Werth des Integrales, der nur von r abhängen kann, mit $\varphi(r)$, so ist also

$$\int_a^b F(re^{ti})\,dt = \varphi(r)$$

so ist, wenn wir $r + \Delta r$ an die Stelle von r treten lasse
subtrahiren und mit Δr dividiren

$$\int_a^b \frac{F(\overline{r + \Delta r} e^{ti}) - F(re^{ti})}{\Delta r}\, dt = \frac{\varphi(r + \Delta r) -}{\Delta r}$$

Der unter dem Integralzeichen stehende Faktor von dt
Anderes als der partiell in Beziehung auf r genommene D
quotient von $F(re^{ti})$, welcher so lange, als Δr eine
Grösse hat, von dem partiellen Differenzialquotienten de
$F(re^{ti})$ um irgend eine Grösse ϱ verschieden ist. Setzen

$$\frac{F(\overline{r + \Delta r} e^{ti}) - F(re^{ti})}{\Delta r} = \frac{dF(re^{ti})}{dr} + \varepsilon$$

wo nun ε mit Δr gleichzeitig bis zur Null abnimmt, so
sich die vorhergehende Gleichung in:

$$\int_a^b \frac{dF(re^{ti})}{dr}\, dt + \int_o^{2\pi} \varepsilon\, dt = \frac{\varphi(r + \Delta r) -}{\Delta r}$$

Für unendlich abnehmende Δr nähert sich das zw
linker Hand aus naheliegenden Gründen der Null und e
durch Uebergang zur Gränze

$$\int_o^{2\pi} \frac{dF(re^{ti})}{dr}\, dt = \frac{d\varphi(r)}{dr}$$

d. i. wenn man die Differenziation unter dem I
ausführt

$$\textbf{11)} \qquad \int_o^{2\pi} e^{ti} F'(re^{ti})\, dt = \frac{d\varphi(r)}{dr}$$

Nun ist aber bei unbestimmter Integration

$$\int e^{ti} F'(re^{ti})\, dt = \frac{F(re^{ti})}{ri} + Const.$$

und da wir voraussetzen, dass $F(re^{ti})$ von $t = o$ bi
Unterbrechung der Kontinuität erleide, so können wi

in Nr. 11. vorkommenden bestimmten Integrales durch die
ee zweier Spezialwerthe des unbestimmten Integrales ermit-
) ergiebt sich

$$\int_o^{2\pi} e^{ti} F'(re^{ti})\, dt = \frac{F(re^{2\pi i}) - F(r)}{ri} = o$$

i als von Null verschieden betrachtet wird. Die Gleichung 11.
nelt sich jetzt in

$$o = \frac{d\varphi(r)}{dr}$$

s iervorgeht, dass $\varphi(r)$ von r unabhängig, also eine Konstante
is giebt den merkwürdigen Satz:

$$\int_o^{2\pi} F(re^{ti})\, dt = C$$

e immung der Konstante C richtet sich ganz nach der Natur
n tion $F(re^{ti})$; ist diese so beschaffen, dass $F(re^{ti})$ konti-
h bleibt für alle möglichen r und t, so kann jeder spezielle
m r zur Ermittelung von C gebraucht werden; so erhält
ir $= o$, $2\pi F(o) = C$ und mithin

$$\int_o^{2\pi} F(re^{ti})\, dt = 2\pi F(o)$$

($= x^m$ z. B. wo m eine ganze positive Zahl bedeutet,
(re^{ti}) nicht diskontinuirlich und daher ist

$$\int_o^{2\pi} (re^{ti})^m\, dt = o \text{ oder } \int_o^{2\pi} e^{mti}\, dt = o$$

n leicht verifiziren kann.

ä die Funktion $F(re^{ti})$ kontinuirlich für jedes t und r, wenn
zt es mehr als Null beträgt, so darf man den Werth von C
u h die Substitution $r = o$ bestimmen wollen, man kann
e in diesem Falle oft mit Vortheil der Substitution $r = \infty$
n So ist z. B. für $F(x) = x^{-m}$

$$F(re^{ti}) = \frac{cos\,mt - i\,sin\,mt}{r^m}$$

kontinuirlich für $r > o$; man hat daher vermittelst der Su
$r = \infty$, $o = C$ und mithin

15) $$\int_o^{2\pi} (re^{ti})^{-m}\,dt = o \text{ oder } \int_o^{2\pi} e^{-mti}\,dt = o$$

was sich ebenfalls durch gewöhnliche Integration nachwe

Sehr häufig kommt der Fall vor, dass die Funkti
während der Intervalle $r = o$ bis $r = \infty$ und $t = o$ b
nur eine einzige Unterbrechung der Kontinuität erleidet, e
$r = \varrho$ und $t = \tau$ eintreten möge; dann muss unterschied
ob $r < \varrho$ oder $r > \varrho$ ist; in jedem Falle ist zwar $F(re$
kontinuirlich, wenn entweder immer $r < \varrho$ oder imm
aber man muss zwei verschiedene Substitutionen anwend
Werth des Integrales zu bekommen, etwa im ersten Fal
zialisirung $r = o$ und im zweiten $r = \infty$, so dass möge
das Integral zwei verschiedene Werthe haben kann, wov
für $r < \varrho$ der andere für $r > \varrho$ gilt. Als Beispiel dai
wir $F(x) = x : (x - a)$ also

$$F(re^{ti}) = \frac{re^{ti}}{re^{ti} - a}$$

und um allgemein zu sein, denken wir uns auch die o
unter komplexer Form $= \varrho e^{\tau i}$. Die Funktion $F(re^{ti})$ ei
eine einzige Unterbrechung der Kontinuität für $r = \varrho$ m
wie man nach Nr. I. sehr leicht finden wird, und dah
hier der doppelten Substitution $r = o$, $r = \infty$; ma
$r = o$

$$\int_o^{2\pi} o\,.\,dt = C \text{ d. h. } C = o$$

und für $r = \infty$

$$\int_o^{2\pi} 1.dt = C \text{ d. h. } C = 2\pi$$

rgeben sich die beiden Formeln

$$\int_o^{2\pi} \frac{re^{ti}}{re^{ti} - \varrho e^{\tau i}}\, dt = o \quad , \quad r < \varrho$$

$$\int_o^{2\pi} \frac{re^{ti}}{re^{ti} - \varrho e^{\tau i}}\, dt = 2\pi \quad , \quad r > \varrho$$

vielleicht nicht überflüssig, diese Formeln *a posteriori* zu
ı Im ersten Falle $r < \varrho$ wird $\frac{r}{\varrho}$ ein ächter Bruch, welcher
e möge, und wenn man berücksichtigt, dass identisch

$$\frac{re^{ti}}{re^{ti} - \varrho e^{\tau i}} = \frac{\frac{r}{\varrho} e^{ti}}{\frac{r}{\varrho} e^{ti} - e^{\tau i}} = \frac{pe^{(t-\tau)i}}{pe^{(t-\tau)i} - 1}$$

k n man dem ursprünglichen Integrale die Form

$$-\int_o^{2\pi} \frac{pe^{(t-\tau)i}}{1 - pe^{(t-\tau)i}}\, dt$$

ıdie bekannte Reihenentwickelung

$$\frac{u}{1-u} = u + u^2 + u^3 + u^4 + \ldots\ldots$$

ıng bringen, was für $u = pe^{(t-\tau)i}$ wegen des ächt
ıe p erlaubt ist. Man erhält so

$$e^{-\tau)i} + p^2 e^{2(t-\tau)i} + p^3 e^{3(t-\tau)i} + \ldots\ldots] \, dt$$

d. h. Null, weil jedes einzelne Integral verschwindet dagegen $r > \varrho$, so ist umgekehrt $\frac{\varrho}{r}$ ein ächter Bruch heissen möge und man kann setzen

$$\frac{re^{ti}}{re^{ti} - \varrho e^{\tau i}} = \frac{1}{1 - \frac{\varrho}{r} e^{(\tau - t)i}} = \frac{1}{1 - qe^{(\tau -}$$

Daraus ergiebt sich für unser Integral die Reihenentwicklu

$$\int_0^{2\pi} [1 + qe^{(\tau - t)i} + q^2 e^{2(\tau - t)i} + q^3 e^{3(\tau - t)i} +$$

und hier ist der Werth des ersten Integrales $= 2\pi$, d übrigen Integrale verschwinden.

Erleidet die Funktion $F(re^{ti})$ innerhalb der Inter bis $r = \infty$ und $t = o$ bis $t = 2\pi$ mehrere Unterbre Kontinuität etwa für $r = \varrho_1, \varrho_2, \ldots$ und $t = \tau_1, \tau$ muss man die Fälle $\varrho_1 > r > o$, $\varrho_2 > r > \varrho_1$, $\varrho_3 >$ etc. unterscheiden und es müssen zur Bestimmung d stehenden Integralwerthes ebensoviel spezielle Substitu gemacht werden, als es solcher Fälle giebt, so dass in das Integral auch ebensoviel verschiedene Werthe hab

Besondere Aufmerksamkeit verdient noch der Fall F also die Ermittelung des Werthes von

18) $$\int_0^{2\pi} (re^{ti})^{-m} f(re^{ti})\, dt = C$$

worin m als ganze positive Zahl vorausgesetzt wird. N an, dass $f(re^{ti})$ beliebig viele Unterbrechungen d erleide, etwa für $r = r_1, r_2, \ldots, t = t_1, t_2, \ldots$ ul r_0 den kleinsten unter den Modulis r_1, r_2 etc., zunächst den Fall $r_0 > r > o$ zu unterscheiden hab

tzen um den Werth von C zu finden. Diess gäbe aber unter
legralzeichen $\infty f(o)$ und da dieser Ausdruck nichts
es sagt (indem $f(o) = o$ sein kann) so transformiren wir
Integral. Bei partieller Integration ist nun

$$\int (re^{ti})^{-m} f(re^{ti})\, dt$$

$$= r^{-m} f(re^{ti}) \int e^{-mti}\, dt - r^{-m} \int df(re^{ti}) \int e^{-mti}\, dt$$

$$= \frac{r^{-m} f(re^{ti})\ e^{-mti}}{mi} - r^{-m} \int f'(re^{ti})\ e^{ti} ri\, dt \,.\, \left(-\frac{e^{-mti}}{mi}\right)$$

$$= -\frac{r^{-m} e^{-mti} f(re^{ti})}{mi} + \frac{1}{m} \int (re^{ti})^{-(m-1)} f'(re^{ti})\, dt$$

s lässt sich der Werth des in 18. verzeichneten Integrales
li Substitutionen $t = 2\pi$, $t = o$ und nachherige Subtrak-
lten, indem wir $f(re^{ti})$ als kontinuirlich voraussetzen.
ibt

$$\int_o^{\pi} (re^{ti})^{-m} f(re^{ti})\, dt = \frac{1}{m} \int_o^{2\pi} (re^{ti})^{-(m-1)} f'(re^{ti})\, dt$$

rstehende Reduktionsformel kann auf das Integral rechter
elst wieder angewendet werden, indem man $m - 1$ für m
re^{ti} für $f(re^{ti})$ setzt, wo nun $f'(re^{ti})$ kontinuirlich sein muss;
nn

$$\int_o^{\pi} (re^{ti})^{-(m-1)} f'(re^{ti})\, dt = \frac{1}{m-1} \int_o^{2\pi} (re^{ti})^{-(m-2)} f''(re^{ti})\, dt$$

g Anwendung desselben Verfahrens giebt

$$\int_o^{\pi} (re^{ti})^{-(m-2)} f''(re^{ti})\, dt = \frac{1}{m-2} \int_o^{2\pi} (re^{ti})^{-(m-3)} f'''(re^{ti})\, dt$$

Man übersieht gleich den Fortgang dieser Schlüsse; e
Gleichung dieser Art würde sein

$$\int_o^{2\pi} (re^{ti})^{-1} f^{(m-1)}(re^{ti})\, dt = \frac{1}{1} \int_o^{2\pi} f^{(m)}(re^{ti})\, dt$$

und sie erfordert die Kontinuität von $f^{(m-1)}(re^{ti})$. Subs
jede Gleichung in die vorhergehende, so findet man ohn

$$\int_o^{2\pi} (re^{ti})^{-m} f(re^{ti})\, dt = \frac{1}{m\,(m-1)\,..\,2\,.\,1} \int_o^{2\pi} f^{(m)}(r$$

Ist nun auch $f^{(m)}(re^{ti})$ stetig für $r < r_0$ und alle t von
so kann man den Werth des Integrales rechter Hand rit
Substitution $r = o$ finden, nämlich nach Nr. 13.

$$\int_o^{2\pi} f^{(m)}(re^{ti})\, dt = 2\pi f^{(m)}(o)$$

und so ergiebt sich der bemerkenswerthe Satz: wenn die
$f(re^{ti})$, $f'(re^{ti})$, $f''(re^{ti})$ ... $f^{(m)}(re^{ti})$ sämmtlich kontinuir
für $r < r_0$ und alle t von o bis 2π, so ist

19) $$\int_o^{2\pi} (re^{ti})^{-m} f(re^{ti})\, dt = \frac{2\pi f^{(m)}(o)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m}, \quad r_0$$

III.

Die Entwickelung des Theoremes von *Mac Laur*
Ermittelung der Determinationen, unter welchen dasel
und allein richtig bleibt, sind nichts als eine Anwendu
aufgestellten Fundamentalsätze. Nehmen wir einfach

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\, x$$

und denken uns a unter der komplexen Form $\varrho e^{\tau i}$, s

$$F(re^{ti}) = \frac{f(re^{ti}) - f(\varrho e^{\tau i})}{re^{ti} - \varrho e^{\tau i}} re^{ti}$$

ie könnte eine Diskontinuität auf zweierlei Weise eintreten, le indem der Nenner sein Vorzeichen wechselt, oder indem ihr diskontinuirlich wird. Das Erste ist der Fall für $r = \varrho$, führt aber keine nothwendige Diskontinuität herbei, weil a1 auch der Zähler annullirt und der ganze Ausdruck den $f'(a) \cdot a = f'(\varrho e^{\tau i})\ \varrho e^{\tau i}$ annimmt; letzterer ist aber im e en eine endliche Grösse, weil wir die willkührliche n' a noch in der Gewalt haben und folglich dem ϱ und τ dividuelle Werthe beilegen können, dass $f'(\varrho e^{\tau i})\ \varrho e^{\tau i}$ eibt. Dagegen tritt entschieden eine Diskontinuität bei ei, wenn $f(re^{ti})$ eine Unterbrechung der Kontinuität erleidet r ollen annehmen, dass eine solche zum ersten Male für u l $t = t_0$ vorkomme. In diesem Falle ist das Theorem 13. b , sobald wir $r < r_0$ voraussetzen und wir haben jetzt $F_0) = o$,

$$\int_o^{2\pi} \frac{f(re^{ti}) - f(\varrho e^{\tau i})}{re^{ti} - \varrho e^{\tau i}} re^{ti}\, dt = o \quad , \quad r_0 > r$$

n vir die Integration einzeln auf den Minuenden und Sub- en so folgt unter der Rücksicht, dass $f(\varrho e^{\tau i})$ konstant ist hng auf die Integration

$$\frac{}{re^{ti} - \varrho e^{\tau i}} f(re^{ti})\, dt = f(\varrho e^{\tau i}) \int_o^{2\pi} \frac{re^{ti}}{re^{ti} - \varrho e^{\tau i}} dt \ , \ r_0 > r$$

vedung der Theoreme 16. und 17. giebt weiter

20) $$\int_o^{2\pi} \frac{re^{ti}}{re^{ti} - \varrho e^{\tau i}} f(re^{ti})\, dt = o \quad , \quad r_0 > r <$$

21) $$\int_o^{2\pi} \frac{re^{ti}}{re^{ti} - \varrho e^{\tau i}} f(re^{ti})\, dt = 2\pi f(\varrho e^{\tau i}) \quad , \quad r_0 >$$

Von diesen Formeln ist besonders die zweite von Inter
sie zeigt, dass jede Funktion einer komplexen Variable
in ein bestimmtes Integral verwandelt werden kann, so lan
der Modulus von a weniger beträgt, als der Modulus
komplexen Argumentes, für welche $f(x)$ zum ersten Ma
nuirlich wird. Schreiben wir die Gleichung 21. in der

$$f(\varrho e^{\tau i}) = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} \frac{1}{1 - \frac{\varrho}{r} e^{(\tau - t)i}} f(re^{ti})\, dt \quad , \quad r_0$$

und verwandeln den ersten Faktor unter dem Integra
eine unendliche Reihe, was wegen $\frac{\varrho}{r} < 1$ erlaubt ist

$$f(\varrho e^{\tau i}) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} \left[1 + \frac{\varrho}{r} e^{(\tau - t)i} + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 e^{2(\tau - t)i} + \ldots\right] f($$

oder indem man jedes einzelne Glied integrirt

$$f(\varrho e^{\tau i}) = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} f(re^{ti})\, dt + \frac{\varrho e^{\tau i}}{2\pi} \int_o^{2\pi} (re^{ti})^{-1} f(re^{ti})$$

$$+ \frac{(\varrho e^{\tau i})^2}{2\pi} \int_o^{2\pi} (re^{ti})^{-2} f(re^{ti})\, t$$

nwendung des Theoremes 19. wird hieraus unter der
g, dass $f(re^{ti})$, $f'(re^{ti})$, $f''(re^{ti})$ u. s. w. kontinuirlich bleiben
a der Intervalle $r = o$ bis $r = r_0$ und $t = o$ bis $t = 2\pi$,

$$f(\varrho e^{\tau i}) = f(o) + \frac{f'(o)}{1}\varrho e^{\tau i} + \frac{f''(o)}{1.2}(\varrho e^{\tau i})^2$$

$$+ \frac{f'''(o)}{1.2.3}(\varrho e^{\tau i})^3 + \ldots\ldots$$

$$r_0 > \varrho \geqq o$$

ist das Theorem von *Mac Laurin* in seiner Ausdehnung
exe Argumente. Die Gültigkeit desselben setzt voraus,
ntervall $r = o$ bis $r = r_0$ giebt, innerhalb dessen die
$f(re_{ti})$, $f'(re_{ti})$, $f''(re_{ti})$ etc. stetig bleiben, man mag t
Werth geben was man will und man kann daher folgende
u tellen:

Man suche diejenigen (reellen oder complexen) Werthe
von x auf, für welche die Funktionen $f(x)$, $f'(x)$,
$f''(x)$, ... diskontinuirlich werden und nenne x_0 das-
jenige unter den so erhaltenen Argumenten, welches
den absolut kleinsten Modulus hat; die Gleichung

$$f(x) = f(o) + \frac{f'(o)}{1}x + \frac{f''(o)}{1.2}x^2 + \ldots\ldots$$

gilt dann für alle x, deren Modulus weniger als der
Modulus von x_0 beträgt.

ie so gesteckten Gränzen hinaus gilt das Theorem von
r nicht, weil dann alle die Sätze, auf denen die Ableitung
eruhte, ihre Gültigkeit verlieren.

Beispiel für das obige Kriterium nehmen wir

$$f(x) = l(x + \sqrt{1 + x^2})$$

*

es wird dann

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad , \quad f''(x) = -\frac{x}{(\sqrt{1+x^2})^3}$$

wo man gleich übersieht, dass alle folgenden Differenzial
Brüche sein werden, welche ganze rationale algebraische I
zu Zählern und Potenzen von $\sqrt{1+x^2}$ zu Nennern hab
Die Diskontinuität kann daher nur auf eine einzige Ar
durch das Verschwinden des Nenners entstehen. Aus
folgt aber $x = \pm\sqrt{-1}$ d. h. $x_0 = cos\frac{1}{2}\pi \pm isi$
$mod\, x_0 = 1$. Die Reihenentwickelung

$$l(x+\sqrt{1+x^2}) = \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} -$$

gilt daher nur für solche x, deren Modulus weniger als
beträgt. Wollte man sich auf reelle x beschränken, so ü
Bedingung in $1 > x > -1$ übergehen.

II.

Die Bürmann'sche Reihe.

n man eine gegebene Funktion von nur einer Variabelen in
e e verwandeln will, die nach Potenzen irgend einer Haupt-
fo schreitet, so hat man in Beziehung auf diese Hauptgrösse
o elte Wahl; entweder nämlich — und diess ist der
st Fall — identifizirt man sie geradewegs mit der Variabelen
l on selber, oder man setzt voraus, dass sie von dieser
l verschieden aber auf bekannte Weise von ihr abhängig
e letztere Supposition ist nothwendig, damit die Aufgabe
h entwickelung nicht unbestimmt bleibe. Nennen wir um
e Begriffsbestimmung willen $f(x)$ die gegebene Funktion
ä lerlichen x, so steht die Entwickelung im ersten Falle
er Form

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots.$$

z eiten Falle, wenn wir t die Hauptgrösse nennen, nach
d Reihe fortschreitet,

$$f(x) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + \ldots.$$

e e gegebene Funktion von x etwa $t = \varphi(x)$ sein muss.
n ist es, dass die erste der obigen Reihenentwickelungen
s Theorem von *Mac Laurin* vermittelt wird, für die zweite
lu g, welche die erste und ebenso die von *Lagrange* und
g gebenen Reihenverwandlungen in sich schliesst, hat
e Koeffizientenbestimmung gezeigt. Es kann wohl kein
a ber sein, dass die letztere Entwickelung vermöge ihrer

hohen Allgemeinheit und vielfachen Anwendbarkeit di
Beachtung verdient, und wenn man sie gleichwohl in kei
buche findet (selbst *Lacroix* und das mathematische V
geben nur das Nothdürftigste), so mag der Grund dieser a
Erscheinung in dem Umstande zu suchen sein, dass man
über die Gültigkeitsbedingungen der Bürmann'schen R
im Dunkeln befand, woraus natürlich eine gewisse Unsi
ihrer Anwendung entspringen musste. Es dürfte daher
Bearbeitung dieses Gegenstandes nicht nur kein üb
sondern vielmehr ein vom jetzigen Standpunkte der W
gebotenes Unternehmen sein.

§. 1.

Die Bedingungen der Reihenentwickelung.

Wir setzen zunächst, um eine sprechendere Bez
haben,

$$\textbf{1)} \quad f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 t + \frac{1}{2'} A_2 t^2 + \frac{1}{3'} A_3 t^3 +$$

wobei überhaupt n' so viel bedeutet wie $1.2.3 \ldots n$; w

$$\textbf{2)} \quad t = \varphi(x)$$

ist dann auch, wenn wir statt $[\varphi(x)]^n$ kurz $\varphi(x)^n$ schr

$$\textbf{3)} \quad f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \varphi(x) + \frac{1}{2'} A_2 \varphi(x)^2 + \frac{1}{3'} A \varphi$$

Um zunächst die Bedingungen kennen zu lernen, un
eine derartige Reihenentwickelung möglich und gültig st
wir uns an die Determinationen, welche man für as
von *Mac Laurin* aufgestellt hat; diesen zufolge gilt ne
wie

$$t) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 t + \frac{1}{2'} A_2 t^2 + \frac{1}{3'} A_3 t^3 + \ldots\ldots$$

$$[A_n = F^{(n)}(o)]$$

oweit, als die Funktion $F(t)$ nebst ihren Differenzial-
t $F'(t)$, $F''(t)$ etc. für komplexe t endlich und stetig
h. bestimmter ausgedrückt: wenn eine der Funktionen
$F(t)$, $F''(t)$ etc. diskontinuirlich wird für einen speziellen
n t, welcher τ heissen möge und im Allgemeinen
e complexen Form $\tau = \varrho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)$ enthalten
gilt die Gleichung 4. für alle diejenigen $t =$
$\sqrt{-1}\sin u$), deren Moduli r der Ungleichung

$$\varrho \gtrdot r \geqq o \text{ oder } mod\tau \gtrdot mod t \geqq o$$

listen. Diese Bedingungen lassen sich leicht auf die
ng 1. übertragen, wenn man dieselbe mit der Gleichung 4.
ält, also

$$F(t) = f(x)$$

die Differenzialquotienten von $F(t)$ durch die Differenzial-
von $f(x)$ ausdrückt. Es ist dann

$$= \frac{dF(t)}{dt} = \frac{df(x)}{dt} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f'(x)\frac{dx}{dt}$$

Hand noch t wegzuschaffen ist. Aus Nr. 2. folgt aber
enziation

$$dt = \varphi'(x)\,dx \text{ oder } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\varphi'(x)}$$

durch Substitution in das Vorhergehende

$$F'(t) = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Eine zweite Differenziation in Beziehung auf t liefert

$$F''(t) = \frac{\varphi'(x)\,\frac{df'(x)}{dt} - f'(x)\,\frac{d\varphi'(x)}{dt}}{\varphi'(x)^2}$$

$$= \frac{\varphi'(x)f''(x) - f'(x)\varphi''(x)}{\varphi'(x)^2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

und weil der Werth von $\frac{dx}{dt}$ aus Nr. 6. bekannt ist

8) $$F''(t) = \frac{f''(x)\varphi'(x) - f'(x)\varphi''(x)}{\varphi'(x)^3}$$

Weitere Differenziation in Beziehung auf t giebt nach ei
Reduktion

$$F'''(t) =$$
$$\frac{[f'''(x)\varphi'(x) - f'(x)\varphi'''(x)]\varphi'(x) - [f''(x)\varphi'(x) - f'(x)\varphi($$
$$\varphi'(x)^4$$

oder vermöge des Werthes von $\frac{dx}{dt}$ und geordnet

9) $$F'''(t) =$$
$$\frac{f'''(x)\varphi'(x)^2 - 3f''(x)\,\varphi'(x)\,\varphi''(x) + f'(x)[3\varphi''(x)^2 - \varphi'($$
$$\varphi'(x)^5$$

Es ist nicht nöthig, diese Rechnung, welche bald sa
wird, weiter fortzusetzen, man übersieht bereits im Al
Gesetz, wonach sich die Ausdrücke für $F'(t)$, $F''(t$
gestalten; sämmtliche Differenzialquotienten sind nä
in deren Zählern der Reihe nach die Funktionen $f'(x$
$f'''(x)$ etc. verbunden mit $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$ et
die Nenner werden durch die ungeraden Potenzen von

Kontinuität und Endlichkeit der Differenzialquotienten $F'(t)$, etc., von welcher die Gültigkeit der Gleichung 4. abhängt, kann offenbar nicht vorhanden sein, wenn eine der Funktionen $f(x)$ etc. oder $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ etc. aufhörte endlich und stetig zu sein, wie man unmittelbar aus den Gleichungen 7., 8., 9. sieht, und wir müssen daher als erste Bedingung die Stetigkeit und Endlichkeit sowohl der Funktionen $f'(x)$, $f''(x)$ etc. als der Funktionen $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ etc, voraussetzen. Diess ist gerade die Bedingung, unter welcher jede der Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ für alle x in eine Potenzenreihe (d. h. in eine Reihe von der Form $\alpha + \beta x + \gamma x^2 +$ etc.) verwandelbar sein würde, wenigstens innerhalb gewisser Gränzen, und wir sprechen deshalb die oben gefundenen Bedingungen lieber in dieser kürzeren Form aus.

Die soeben aufgestellte Determination ist nun zwar nothwendig aber daraus nicht hinreichend; denn setzen wir sie als erfüllt voraus, so sind wohl die Zähler der für $F'(t)$, $F''(t)$ etc. gleichgeltenden Brüche stetig und endlich, aber trotzdem können die Nenner unendlich und auch gleichzeitig diskontinuirlich werden, nämlich die Nenner in Null übergehen; dieser Fall tritt ein, wenn $\varphi'(x)$ verschwindet, also $\varphi(x)$ einen Maximal- oder Minimalwerth nicht. Nehmen wir an, es werde $\varphi'(x) = o$ für $x = \xi$, wo ξ auch von komplexer Form sein kann, so ist $\tau = \varphi(\xi)$ ein spezielle Werth $t = \varphi(x)$, für welchen von $F'(t)$, $F''(t)$ etc. unendlich werden, indem sie den Nenner $\varphi'(\xi) = o$ erhalten, so tritt statt der früheren Bedingung $mod\,\tau > mod\,t \geqq o$ die Bedingung

$$mod\,\varphi(\xi) > mod\,\varphi(x) \geqq o$$

welche, welche für ausschliesslich reelle x, wie sie bei der Reihenentwickelung gewöhnlich nur vorkommen, die einfachere Form

$$mod\varphi(\xi) > \varphi(x) \geqq o$$

annimmt. Hieraus lassen sich die Gränzen für x leicht l
indem man nur die beiden Gleichungen

$$\varphi(x) = o \text{ und } \varphi(x) = mod\varphi(\xi)$$

aufzulösen hat. Dabei ist noch Eines zu beachten; d
Bedingung $mod\tau > mod t \geqq o$ oder bei reellen t, $mod\tau$
setzt stillschweigend voraus, dass $mod\tau$ von Null vers
und t von Null bis $mod\tau$ anwachse, es muss also auc
gesetzte Funktion $\varphi(x)$ eine, wenigstens innerhalb des
intervalles zunehmende Funktion sein. Bezeichnen wi
mit a eine Wurzel der Gleichung $\varphi(x) = o$ und mit b
der Gleichung $\varphi(x) = mod\varphi(\xi)$, so wird erfordert, a
wachse, während des Intervalles $x = a$ bis $x = b$. a
alles Bisherige zusammen, so können wir folgende
sprechen:

Um die Gültigkeitsgränzen für die Reihenentwi

10) $$f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1\varphi(x) + \frac{1}{2'} A_2\varphi(x)$$

auszumitteln, bestimme man zunächst diejen
ξ von x, für welche $\varphi'(x) = o$ wird und
die Gleichungen

11) $$\varphi(x) = o, \quad \varphi(x) = mod\varphi(\xi)$$

auf, deren Wurzeln beziehungsweise a u
mögen. Wenn nun $\varphi(x)$ zunimmt von $x = a$
so gilt die obige Entwickelung unter der B
$b > x \geqq a$, vorausgesetzt noch, dass $f($
Funktionen sind, von denen jede für s
dieses Intervalles in eine Potenzenreihe er
sein würde.

or wir weiter gehen, wollen wir erst ein Beispiel geben;

$$f(x) = Arctan\, x, \quad \varphi(x) = x(1 + x^2)$$

es sich also um die Entwickelung

$$Arctan\, x = A_0 + \frac{1}{1'} A_1\, x(1 + x^2) + \frac{1}{2'} A_2\, x^2 (1 + x^2)^2 + \ldots.$$

ürde Es ist dann $\varphi'(x) = 1 + 3x^2$ und aus $\varphi'(x) = o$ ich dann für x die speziellen Werthe

$$\xi = \pm \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{3}}$$

Substitution in $\varphi(x)$ wird jetzt

$$\varphi(\xi) = \pm \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \pm \frac{2\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(cos\, \frac{\pi}{2} \pm \sqrt{-1}\, sin \frac{\pi}{2}\right)$$

$$mod\, \varphi(\xi) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

ungen 10. und 11. gestalten sich jetzt wie folgt

$$x = o, \quad x(1 + x^2) = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} = 0{,}38490\ldots.$$

auf reelle Werthe von x beschränken, so können wir Gleichungen nur die reellen Wurzeln benutzen; es dann aus der ersten Gleichung $x = o$ und aus der $= 0{,}34401\ldots$ Innerhalb dieser Gränzen wächst die Funk- $x^2)$ und würden auch $Arctan\, x$ und $x(1 + x^2)$ für n Potenzenreihen verwandelbar sein; die Gleichung 12.

gilt daher für $0{,}344 \ldots > x \geqq o$, ein Resultat, we
nachher *a posteriori* verifiziren werden.

Aus den vorhin ausgesprochenen Gültigkeitsbedingu
übrigens hervor, dass es mehrere Intervalle geben kann,
die fragliche Reihenentwickelung Bestand hat, sobald n
Gleichungen $\varphi(x) = o$ und $\varphi(x) = mod\varphi(\xi)$ meh
Wurzeln zulassen. Dann gehört aber auch zu jedem se
tigkeitsintervalle eine besondere Koeffizientenbestimmung
nächste Paragraph zeigen wird.

Noch müssen wir einer Ausnahme erwähnen, v
allgemeine Regel unterworfen sein kann; wir haben n
schweigend vorausgesetzt, dass die Differenzialquotie
$F'(t)$ etc. wirkliche und nicht nur scheinbar gebrochen
sind; findet aber der letztere Umstand statt, so ka
von allen vorhergehenden Schlüssen nicht mehr die Re
es hängt dann die Gültigkeit der Entwickelung von d
Natur der Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ ab. Nehmen
$\varphi(x) = Arctan\, x$, so dass es sich also um eine Entwi
der Form

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 Arctan\, x + \frac{1}{2'} A_2 Arc^2 tan\, x +$$

handelt, so wird $\varphi'(x) = 1 : (1 + x^2)$ und nach N 7

$$F'(t) = f'(x)\,(1 + x^2)$$
$$F''(t) = f''(x)\,(1 + x^2)^2 + 2x f'(x)\,(1 + x^2)$$

u. s. f.

Man übersieht gleich, dass hier keine Nenner vorkomm
sich annulliren könnten und dass folglich die Funkti
$F'(t)$ etc. eben so lange stetig und endlich bleiben, als
$f'(x)$, $f''(x)$ etc. der Fall ist; jene Reihenentwickelu

nselben Bedingungen, unter welchen $f(x)$ in eine Potenzen-
wandelbar ist.

)i bezeichnete Ausnahme findet übrigens bei allen Funktionen
t, deren Differenzialquotient unter der Form steht:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{[\psi(x)]^{\mu}}$$

$x)$ eine ganze rationale abgebraische Funktion x und μ
itive Zahl bezeichnet; näher lässt sich die Natur dieser
n nicht angeben, weil das Integral, welches $\varphi(x)$ bestimmen
ch allgemein nicht ausdrücken lässt. Bei ganzen μ führt
garithmen und Kreisbögen, ausserdem auf elliptische oder
Transscendenten.

§. 2.

Die Koeffizientenbestimmung.

dem für alle möglichen Fälle die Bedingungen entwickelt
r welchen die Gleichung

$$x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \varphi(x) + \frac{1}{2'} A_2 \varphi(x)^2 + \ldots.$$

st es nun unsere Aufgabe, die bisher noch nicht hin-
ekannten Koeffizienten A_0, A_1, A_2 ... zu bestimmen.
von ihnen findet sich leicht, denn setzt man für x den
Werth a, der $\varphi(x)$ verschwinden macht, so wird

$$A_0 = f(a)$$

e Weise könnte man die übrigen Koeffizienten bestimmen
em man sich erinnert, dass für $\varphi(x) = t$, $f(x) = F(t)$

$$A_n = F^{(n)}(t = o)$$

ist; setzt man daher in den Gleichungen 7., 8. etc. $x = a$ in der That $t = \varphi(x)$ in Null übergeht, so erhält man

$$A_1 = F'(o) = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$$

$$A_2 = F''(o) = \frac{f''(a)\varphi'(a) - f'(a)\varphi''(a)}{\varphi'(a)^3}$$

u. s. w.

Es würde aber nicht leicht sein, das Gesetz zu entdec welchem sich diese Ausdrücke bilden und wir müssen d zu einer independenten Koeffizientenbestimmung zu gelan anderen Weg einschlagen. Zu diesem Zwecke leiten wi Formel ab, welche nachher benutzt werden soll.

Sei P eine Funktion, welche für $x = a$ endlich u von welcher auch die Differenzialquotienten dieselbe i besitzen, so hat man nach der bekannten Regel für die Di der Produkte

$$\frac{d^k[(x-a)^m P]}{dx^k} = (x-a)^m \frac{d^k P}{dx^k} + k_1 \frac{d(x-a)^m}{dx} \cdot$$

$$+ k_2 \frac{d^2(x-a)^m}{dx^2} \cdot \frac{d^{k-2} P}{dx^{k-}} +$$

worin k_1, k_2 etc. die Binomialkoeffizienten k, $\frac{1}{2}k(k-$ bezeichnen. Führen wir die einzelnen Differenziationen le $(x-a)^m$ aus, so wird unter Gebrauch der bekannten ez

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = D\psi(x)$$

14) $D^k[(x-a)^m P] = (x-a)^m \cdot D^k P + mk_1(x-a)^{m-1} \cdot$

$$+ m(m-1)k_2(x-a)^{m-2} \cdot D^{k-1} P$$

und hier unterscheiden wir die drei Fälle $k < m$, $k = m$, indem wir m als ganze positive Zahl ansehen. Im rst hört die Reihe mit dem Gliede

$$m(m-1)\ \ldots\ (m-\overline{k-1})\ k_k\ (x-a)^{m-k}\ P$$

n alle Glieder enthalten Potenzen von $x-a$, welche ganze v von Null verschiedene Exponenten besitzen; für $x=a$ hndet daher Alles und es wird

$$\left\{D^k[(x-a)^m P]\right\}_a = o,\ m < k$$

er angehangene Index a bedeuten soll, dass nach geschehener eriation $x=a$ zu setzen ist. Im Falle $m=k$ sind die tzten Glieder der Reihe 14.

$$m(m-1)\ \ldots\ (m-\overline{k-2})\,k_{k-1}\,(x-a)^1\ .\ DP$$

$$m(m-1)\ \ldots\ (m-\overline{k-1})\,k_k\ (x-a)^0\ .\ P$$

ren man jetzt $x=a$ setzt, so verschwinden alle Glieder usnahme des letzten; also

$$\left\{D^k[(x-a)^k P]\right\}_a = k(k-1)\ \ldots\ 2\ .\ 1\ .\ P_a$$

dlh $k > m$, so bricht die Reihe 14. mit folgenden zwei rmab:

$$m(m-1)\ \ldots\ (m-\overline{m-2})\,k_{m-1}\,(x-a)^1\ .\ DP$$

$$m(m-1)\ \ldots\ (m-\overline{m-1})\,k_m\,(x-a)^0\ .\ P$$

rd für $x=a$

$$D^k[(x-a)_m P]\Big\}_a = m(m-1)\ \ldots\ 2\ .\ 1\ .\ k_m\,P_a$$

u mmengefasst giebt die Formel

$$\left\{D^k[(x-a)_m P]\right\}_a = o, \qquad \text{für } k < m$$

$$= m'\,k_m\,.\,P_a, \quad \text{für } k \geq m.$$

Diese einfache Beziehung lässt sich nun auf folgende V
Bestimmung der Koeffizienten A in der Gleichung

19) $$f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \varphi(x) + \frac{1}{2'} A_2 \varphi(x)^2 + \ldots$$

benutzen. Wir multipliziren die Gleichung mit

20) $$\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^n = Q^n$$

wobei Q zur Abkürzung dient und schreiben jetzt die
in der Form

$$f(x)\,Q^n = A_0\,Q^n + \frac{1}{1'} A_1 (x-a)\,Q^{n-1} + \frac{1}{2'} A_2 (x-a)^2$$

$$\ldots + \frac{1}{(n-1)'} A_{n-1} (x-a)^{n-1} Q + \frac{1}{n'}$$

$$+ \frac{1}{(n+1)'} A_{n+1} (x-a)^n \varphi(x) + \frac{1}{(n+2)'} A_{n+2} (x-$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Diese Gleichung werde n mal in Beziehung auf x differ
nach geschehener Differenziation $x = a$ gesetzt; es lässt
rechter Hand auf jedes einzelne Glied die Formel 18 a
indem man $k = n$ und der Reihe nach

$$m = 0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots\ n-1, \quad n, \quad n+1 \ldots$$

$$P = Q^n, \quad Q^{n-1}, \quad Q^{n-2}, \quad \ldots\ Q, \quad 1, \quad \varphi(x), \ldots$$

setzt. Dabei verschwinden alle Glieder, für welche $k <$
n kleiner als Zahlen aus der Reihe 1, 2, ... *in inf.* wird
Fall tritt bei denjenigen Gliedern ein, welche die Oe
A_{n+1}, A_{n+2} etc. enthalten und so bleibt

$$\left\{D^n[f(x)\,Q^n]\right\}_a = A_0\left\{D^n\,Q^n\right\}_a + n_1 A_1\left\{D^{n-1}\,Q^{n-1}\right\}_a + \ldots.$$

$$\ldots + n_{n-1}A_{n-1}\left\{D^1\,Q^1\right\}_a + n_n A_n\,.$$

n kleinen Modifikation lässt sich dasselbe Verfahren anwenden
n ganz ähnliche Formel zu entwickeln, welche sich von der
h den nur dadurch unterscheidet, dass rechter Hand in ihr
l Bezeichnen wir nämlich zur Abkürzung DQ mit Q', so
r Multiplikation der Gleichung 19. mit $n\,Q^{n-1}\,Q'$

$$^{-1}Q' = nA_0\,Q^{n-1}\,Q' + \frac{n}{1^2}\,A_1(x-a)\,Q^{n-2}\,Q'$$

$$+ nA_2(x-a)^2\,Q^{n-3}\,Q'$$

$$+ \cdot + \frac{n}{(n-1)^2}\,A_{n-1}(x-a)^{n-1}\,Q^0\,Q' + \frac{n}{n^2}\,A_n(x-a)^n\,\varphi(x)\,Q'$$

$$+ \frac{n}{(n+1)^2}\,A_{n+1}(x-a)^{n+1}\varphi(x)^2\,Q' + \ldots.$$

n rt man $(n-1)$mal und setzt dann $x = a$, so kann
u die Formel 18. für $k = n-1$ und

$n = 0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots \quad n-1, \quad n, \quad \ldots$

$= Q^{n-1}Q', \quad Q^{n-2}Q', \quad Q^{n-3}Q', \quad \ldots \quad Q', \quad \varphi(x)\,Q', \quad \ldots.$

p ch genommen werden; man erhält auf diese Weise

$$x)\,n\,Q^{n-1}\,Q']\Big\}_a = nA_0\left\{D^{n-1}\,[Q^{n-1}\,Q']\right\}_a$$

$$+ n(n-1)_1\,A_1\left\{D^{n-2}\,[Q^{n-2}\,Q']\right\}_a$$

$$+ n(n-1)_2\,A_2\left\{D^{n-3}\,[Q^{n-3}\,Q']\right\}_a + \ldots.$$

$$\ldots + n(n-1)_{n-1}A_{n-1}Q'_a$$

eh n alle Glieder rechter Hand unter der allgemeinen Form

22) $$n\,.\,(n-1)_p A_p \left\{ D^{n-p-1} [Q^{n-p-1} Q'] \right\}_a$$

und wenn man berücksichtigt, dass

$$D(Q^{n-p}) = (n-p) Q^{n-p-1} DQ = (n-p) Q^{n-p-}$$

mithin umgekehrt

$$Q^{n-p-1} Q' = \frac{D(Q^{n-p})}{n-p}$$

ist, so kann man dem allgemeinen Gliede in Nr. 22. folgı ertheilen

$$n(n-1)_{p-1} A_p \left\{ D^{n-p-1} \left[\frac{D(Q^{n-p})}{n-p} \right] \right\}_a =$$

$$\frac{n(n-1)_{p-1}}{n-p} A_p \left\{ D^{n-p-1} \right($$

oder vermöge einer bekannten Eigenschaft der Binomialle und weil $D^{n-p-1} D(Q^{n-p}) = D^{n-p}(Q^{n-p})$ ist

$$n_p A_p \left\{ D^{n-p} Q^{n-p} \right\}_a$$

Die Reihe, von welcher in Nr. 22. das allgemeine Glied e stand, erhält jetzt folgende Gestalt

$$\left\{ D^{n-1} [f(x)\, n\, Q^{n-1} Q'] \right\}_a$$

$$= A_0 \left\{ D^n Q^n \right\}_a + n_1 A_1 \left\{ D^{n-1} Q^{n-1} \right\}_a + \ldots + n_{n-1} A_{-1}$$

und wenn man sie von der Gleichung 21. subtrahir rechter Hand nur $n_n A_n = A_n$ übrig. Demnach ist

23) $$A_n = \left\{ D^n [f(x) Q^n] \right\}_a - \left\{ D^{n-1} [f(x) n Q^{n-1}]' \right.$$

was sich aber sehr zusammenziehen lässt; man hat n

$$D^n[f(x)Q^n] = D^{n-1}D[f(x)Q^n]$$
$$= D^{n-1}[f(x)nQ^{n-1}Q' + f'(x)Q^n]$$
$$= D^{n-1}[f(x)nQ^{n-1}Q'] + D^{n-1}[f'(x)Q^n]$$

gh durch Substitution in die Formel für A_n (Nr. 23.)

$$A_n = \left\{D^{n-1}[Q^n f'(x)]\right\}_a$$

nige der Bedeutung von Q aus Nr. 20.

$$A_n = D^{n-1}\left\{\left[\frac{x-a}{\varphi(x)}\right]^n f'(x)\right\}_{(x=a)}$$

iangehangene Gleichung $x = a$ bedeuten soll, dass nach er Differenziation $x = a$ zu setzen ist. Die hiermit r Formel giebt nun in der That die independente Koeffi- elimmung.

e hauptsächlichsten Entwickelungsformeln beisammen zu en wir vor den weiteren Konsequenzen, welche aus der hen Reihe gezogen werden können, die wichtigsten ingen der Funktion $\varphi(x)$ betrachten.

§. 3.

Die Spezialisirungen $\varphi(x) = x(1 \pm x)$.

Nmen wir zuerst $\varphi(x) = x(1 + x)$, so können wir e en, weil $\varphi(x)$ für diesen Werth von x verschwindet. st nun $\varphi'(x) = 1 + 2x$ und wenn dieser Ausdruck $= o$ i , so folgt $x = \xi = -\frac{1}{2}$, ferner $\varphi(\xi) = -\frac{1}{2} +$ $= \frac{1}{4}(cos\pi \pm \sqrt{-1}\, sin\pi)$ also $mod\,\xi = \frac{1}{4}$; aus der $(1 + x) = \frac{1}{4}$ ergiebt sich jetzt

$$x = \frac{+\sqrt{2}-1}{2} = b$$

und von diesen beiden Werthen, welche b haben kann, nur den positiven Werth benutzen, weil $\varphi(x) = x(1+x)$ von $x = o$ bis $x = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$, dagegen abnimmt v bis $x = \frac{1}{2}(-\sqrt{2}-1)$. So gelangen wir denn zu

Wenn die Funktion $f(x)$ innerhalb der Gränzen $x = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$ in eine Potenzenreihe v ist, so gilt innerhalb dieses Intervalles die E

25) $$f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 x(1+x) + \frac{1}{2'} A_2 x^2(1+x$$

und in ihr werden die Koeffizienten durch e bestimmt

26) $$A_0 = f(o)$$

$$A_n = D^{n-1}\left[\frac{f'(x)}{(1+x)^n}\right]_{(x=o)}$$

Wendet man die bekannte Regel für die Differenzti Produktes auf den Differenzialquotienten

$$D^{n-1}\left[\frac{f'(x)}{(1+x)^n}\right] = D^{n-1}\left[(1+x)^{-n} f'(x\right.$$

an, so findet man ohne Mühe

27) $$A_n = f^{(n)}(o) - \frac{n(n-1)}{1} f^{(n-1)}(o)$$

$$+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} f^{(n-2)}$$

was in dem Falle bequem ist, wo sich die Differenalq von $f(x)$ unmittelbar leicht angeben lassen.

in Beispiel zu haben sei $f(x) = (1 + x)^{\mu}$, so kann
r) nnerhalb der Gränzen $x = o$, $x = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$ nach
nd ialtheoreme in eine Potenzenreihe verwandeln und daher
ıs rem Falle die Entwickelung ohne fernere Einschränkung
r n hat nach Nr. 26.

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \left[\frac{\mu(1+x)^{\mu-1}}{1+x}\right]_{(x=o)} = \mu$$

$$A_n = \mu \left[D^{n-1}(1+x)^{\mu-n-1}\right]_{(x=o)}$$

$$\cdot (\mu - n - 1)(\mu - n - 2) \ldots (\mu - 2n + 1)$$

ic, wenn man die letztere Formel für $n = 2, 3, 4 \ldots$
ıng bringt,

$$= 1 + \frac{\mu}{1} x(1+x) + \frac{\mu(\mu-3)}{1 \cdot 2} x^2(1+x)^2$$

$$+ \frac{\mu(\mu-4)(\mu-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3(1+x)^3$$

$$+ \frac{\mu(\mu-5)(\mu-6)(\mu-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4(1+x)^4 + \ldots .$$

$\frac{1}{2}\sqrt{2-1}) > x \geqq o.$

e That die Gültigkeit dieser Formel sich nicht über die
e Gränzen hinaus erstreckt, ist leicht *a posteriori*
; bezeichnen wir nämlich die Reihenglieder mit u_0, u_1,
s ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\mu - 2n)(\mu - 2n - 1)}{(\mu - n - 1)(n+1)} x(1+x)$$

e llich wachsende n

$$Lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = -4\, x(1+x)$$

Zur Konvergenz der Reihe ist aber nothwendig, dass d
Werth dieser *Limes* weniger als die Einheit betrage u
daher

$$x(1+x) < \frac{1}{4}$$

woraus wie früher $x < \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$ folgt.

Da nicht nur $x = o$, sondern auch $x = -1$ n
der Gleichung $x(1+x) = o$ ist, so darf man $a = -1$
um auf diese Weise zu einer zweiten Reihenentwi
gelangen. Nun war $b = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{2}-1)$ und jetzt
von diesen Werthen nur den negativen gebrauchen, w
innerhalb des Intervalles $x = -1$ bis $x = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-$
würde, dagegen zunimmt von $x = -1$ bis $x = -$
wie man aus dem Differenzialquotienten der Funkt
ersieht. Unter der Bedingung, dass x zwischen den rä
und $-\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$ liege, ist jetzt für $a = -1$ zu

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{1'}A_1\,x(1+x) + \frac{1}{2'}A_2\,x^2(1+x)^2+$$

$$A_n = D^{n-1}\left[\frac{1}{x^n}f'(x)\right]_{(x=-1)}$$

Man gewinnt jedoch nichts Neues durch diese Entwick
setzt man $x = -(1+z)$, wo nun z zwischen o und $\frac{1}{2}$
liegt, so ergiebt sich

$$-) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1(1+z)z + \frac{1}{2'} A_2(1+z)^2 z^2 + \ldots\ldots$$

$$A_n = - D^{n-1}\left[\frac{f'(-1-z)}{(1+z)^n}\right]_{(z=o)}$$

n man $f(-1-z) = F(z)$ also $f'(-1-z) = -F'(z)$
o ommt man völlig auf die frühere Entwickelung zurück.

lachen wir die fernere Annahme $\varphi(x) = x(1-x)$, so
v· zunächst $x = a = o$ setzen, weil $\varphi'(x)$ für diesen
r schwindet; weiter ist $\varphi'(x) = 1-2x$, hieraus findet
$= \frac{1}{2}$, $\varphi(\xi) = \frac{1}{4}$ also auch $mod\,\varphi(\xi) = \frac{1}{4}$ und b wird
t identisch $= \frac{1}{2}$. Da $\varphi(x)$ wächst von $x = o$ bis
, o giebt diess die Entwickelungsformel:

Wnn die Funktion $f(x)$ innerhalb der Gränzen $x = o$ bis $x = \frac{1}{2}$ in eine Potenzenreihe verwandelbar ist, so gilt innerhalb desselben Intervalles die Gleichung

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 x(1-x) + \frac{1}{2'} A_2 x^2(1-x)^2 + \ldots$$

worin die Koeffizienten A mittelst der Formeln bestimmt werden:

$$A_0 = f(o)$$

$$A_n = D^{n-1}\left[\frac{f'(x)}{(1-x)^n}\right]_{(x=o)}.$$

an die angedeutete Differenziation aus, so ist auch

$$A_n = f^{(n)}(o)$$

$$^{n-1)}(o) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} f^{(n-2)}(o) + \ldots\ldots$$

Man kann gerade bei der Gleichung 28. sehr leicht a
den Nachweis liefern, dass sie über $x = \frac{1}{2}$ hinaus e
unrichtig wird. Die Funktionen $x(1-x)$ bleibt nämlich
wenn man erst $x = \frac{1}{2} - z$ und dann $x = \frac{1}{2} + z$
müsste also auch die linke Seite der Gleichung 28. dieselbe I
besitzen, d. h. $f(\frac{1}{2} - z) = f(\frac{1}{2} + z)$ sein, was bei der
lichkeit der Funktion f eine Absurdität ist.

Die Theoreme 25. und 28. lassen sich übrigens
einzigen Satz zusammenfassen; verwandelt man nämlich
ersten eine Funktion $F(x)$ in eine Reihe von der Form

$$A_0 + \frac{1}{1'} A_1 x(1+x) + \frac{1}{2'} A_2 x^2 (1+x)^2 +$$

und nach dem zweiten eine Funktion $f(x) = F(-)$
Reihe von der Form

$$B_0 + \frac{1}{1'} B_1 x(1-x) + \frac{1}{2'} B_2 x^2 (1-x)^2 +$$

so findet man $B_n = (-1)^n A_n$ und erhält so die Gleic

$$F(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 x(1+x) + \frac{1}{2'} A_2 x(1+x) +$$

$$F(-x) = A_0 - \frac{1}{1'} A_1 x(1-x) + \frac{1}{2'} A_2 x(1-x)^2 -$$

von welchen die erste von $x = o$ bis $x = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$
zweite von $x = o$ bis $x = \frac{1}{2}$ gilt. Da nun die zwe
aus der ersten entspringt, wenn x negativ genomm
haben wir jetzt das Theorem:

ässt sich die Funktion $F(x)$ innerhalb der Gränzen

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1) > x > -\frac{1}{2}$$

in eine Potenzenreihe verwandeln, so ist unter derselben Beschränkung

$$F(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 x(1+x) + \frac{1}{2'} A_2 x^2(1+x)^2 + \ldots$$

$$A_0 = F(o), \quad A_n = D^{n-1}\left[\frac{F'(x)}{(1+x)^n}\right]_{(x=o)}$$

ierzu wird man sich leicht in beliebiger Menge verschaffen die Koeffizienten hier fast immer sehr leicht entwickelbar

§. 4.

Die Spezialisirungen $\varphi(x) = x:(1 \pm x)$.

hmen wir zuerst

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+x}, \quad a = o,$$

$\varphi(x) = 1 : (1+x)^2$ und wir kommen daher auf einen Fle von §. 1. bemerkten Ausnahmefälle; versuchen wir li in Beziehung auf $t = \frac{x}{1+x}$ als unabhängige Variable n Differenzialquotienten von $f(x)$ oder $F(t)$ zu entwickeln, fge der Formeln 7., 8. etc.

$$F'(t) = f'(x)\ (1+x)^2$$

$$F''(t) = f''(x)\ (1+x)^4 + 2f'(x)\ (1+x)^3$$

u. s. w.

gleich übersieht, dass der Eintritt einer Diskontinuität nur

von der Natur des $f(x)$ und seiner Differenzialquotienten
Der kürzeste Weg, der hier zur Kenntniss der Gränz
führt, besteht darin, dass man

33) $$\frac{x}{1+x}, \quad \text{mithin } x = \frac{t}{1-t}$$

setzt und in jedem speziellen Falle ausmittelt, unte
Bedingungen die Gleichung

34) $$f\left(\frac{t}{1-t}\right) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 t + \frac{1}{2'} A_2 t^2 + \frac{1}{3'} A_3 t$$

gültig bleibt und nachher die für t gewonnenen Gränz
der Substitution $t = x : (1+x)$ auf x überträgt. Un
gefundenen Determinationen gilt dann die Formel

35) $$f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{1}{2'} A_2 \left(\frac{x}{1+x}\right)$$

36) $$A_0 = f(o), \quad A_n = D^{n-1} [(1+x)^n f'(x)]_{(x=}$$

wobei man für A_n auch schreiben kann

37) $$A_n = f^{(n)}(o) + (n-1) . n_1 f^{(n-1)}(o) + (n-1)(n-2)_2$$
$$+ (n-1)(n-2)(n-3) . n_3 f^{(n-3)})$$

Die speziellen Fälle $f(x) = (1+x)^\mu$ und $f(x) = l(1+$
sehr bekannt; man findet, dass die Gleichung 34. für je
gebrochene t gilt und dass mithin dem x der Spielraun vo
bis $x = \infty$ offen steht, weil $\varphi(x)\ x : (1+x)$ wäh
Intervalles zunimmt und erst für $x = \infty$ den Gränzwer
welcher dem $t = x : (1+x)$ auferlegt war. Um e
nicht so gewöhnliches Beispiel zu haben, sei $f(x) = \text{rct}$
handelt sich dann zunächst um die Gültigkeit der Glei

$$Arctan\,\frac{t}{1-t} = A_0 + \frac{1}{1'}A_1 t + \frac{1}{2'}A_2 t^2 + \ldots.$$

ii die Funktion linker Hand diskontinuirlich an der Stelle
nn setzt man erst $t = 1 - \delta$ und nachher $t = 1 + \varepsilon$,
) nd ε zwei bis zur Null abnehmende positive Zahlen sind,
n ersten Falle die Funktion über in

$$Arctan\,\frac{1-\delta}{\delta} = Arctan(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$$

iebt sie bei der zweiten Substitution

$$Arctan\,\frac{1+\varepsilon}{-\varepsilon} = Arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

n ler Stelle $t = 1$ springt die Funktion von $+\frac{\pi}{2}$ nach
)e Es muss daher $t < 1$ sein, wenn die Entwickelung 38.
o Man hat nun weiter

$$Arctan\,\frac{t}{1-t} = \frac{1}{(1-t)^2 + t^2} = \frac{1}{1-2t+2t^2}$$

$$Arctan\,\frac{t}{1-t} = \frac{2-4t}{(1-2t+2t^2)^2}$$

u. s. w.

d sen Differenzialquotienten kann eine Unterbrechung der
ä eintreten, wenn nämlich $1 - 2t + 2t^2 = 0$ wird,
ol

$$\frac{+\sqrt{-1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(cos\,\frac{\pi}{4} + \sqrt{-1}\,sin\,\frac{\pi}{4}\right)$$

so $mod\,t < \frac{1}{\sqrt{2}}$, oder wenn wir uns auf reelle t

beschränken $t < \frac{1}{\sqrt{2}}$ d. i. $t < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ sein. Die b
gefundenen Bedingungen $t < 1$ und $t < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ sind
dann gleichzeitig erfüllt, wenn man die letztere Bedingu
engere beibehält und so gilt dann die Gleichung für $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
Für $t = x : (1 + x)$ wird hieraus

$$Arctan\, x = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{1}{2'} A_2 \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 +$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} > \frac{x}{1+x} \geqq 0 \text{ d. i. } \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1) > x \geqq$$

Die Koeffizientenbestimmung geschieht leicht nach Nr. 3,

$$A_0 = 0,\ A_n = D^{n-1}\left[\frac{(1+x)^n}{1+x^2}\right]_{(x=0)}$$

Verwandelt man hier den Quotienten $(1 + x)^n : (1 +$
nach Potenzen von x fortgehende Reihe (was für $x <$
ist), so findet man ohne Mühe

$$A_n = (n-1)'\ [n_1 - n_3 + n_5 - \ldots.]$$

$$= (n-1)'\ \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^n} = (n-1)'\ 2^{\frac{n}{2}}\ \sin\frac{n\pi}{4}$$

Man findet jetzt, indem man $n = 1, 2, 3, \ldots$ setzt

39) $$Arctan\, x = \frac{x}{1+x}$$

$$+ \frac{2^1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - \frac{2^2}{5}\left(\frac{x}{1+x}\right)^5 - \frac{2^3}{7}\left(\frac{x}{1+x}\right)^7 \ldots$$

$$+ \frac{2^1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 - \frac{2^3}{6}\left(\frac{x}{1+x}\right)^6 + \frac{2^5}{10}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{10} \ldots$$

i der ersten Reihe das Vorzeichen von Paar zu Paar in
ei n von Glied zu Glied wechselt; die Gültigkeitsbedingung ist

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1) > x \geqq 0.$$

ni kann man sich leicht *a posteriori* von der Richtigkeit
D ermination überzeugen; in der ersten Reihe von Nr. 49.
s h der Quotient zweier benachbarten Glieder, seinem
ei Werthe nach, der Gränze

$$2\left(\frac{x}{1+x}\right)^2$$

d zweiten Reihe der Gränze

$$2^2\left(\frac{x}{1+x}\right)^4$$

u die Reihen konvergiren, ist nothwendig, dass gleichzeitig

$$2\left\{\frac{x}{1+x}\right\}^2 < 1 \text{ und } 2^2\left\{\frac{x}{1+x}\right\}^4 < 1$$

a man wieder $x < \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$ findet.

pf ähnliche Weise liesse sich die Entwickelung von $f(x)$
F l $\varphi(x)$ $1 = x : (1-x)$ bewerkstelligen, man gelangt
z dazu, wenn man in der analog zu Nr. 35. gebildeten
g

$$z) = A_0 + \frac{1}{1'}A_1\left\{\frac{z}{1+z}\right\} + \frac{1}{2'}A_2\left\{\frac{z}{1+z}\right\}^2 + \ldots$$

z) an die Stelle von z treten lässt, wodurch sie in

$$2. = A_0 + \frac{1}{1'}A_1\left\{\frac{x}{1-x}\right\} + \frac{1}{2'}A_2\left\{\frac{x}{1-x}\right\}^2 + \ldots$$

übergeht; die letztere Gleichung gilt nun

$$\text{von } \frac{x}{1-2x} = o \text{ bis } \frac{x}{1-2x} = b$$

$$\text{d. h. von } x = o \quad \text{bis } x = \frac{b}{2b+1}$$

wenn die erste Gleichung von $z = o$ bis $z = b$ ri
Schreiben wir im ersten Falle f für F und im zweite
$F\left\{\frac{x}{1-2x}\right\}$, so ergiebt sich der Satz:

Wenn die Reihenentwickelung

41) $$f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \left\{\frac{x}{1+x}\right\} + \frac{1}{2'} A_2 \left\{\frac{1}{1}\right.$$

von $x = o$ bis $x = b$ gilt, so bleibt die Ew

42) $$f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \left\{\frac{x}{1-x}\right\} + \frac{1}{2'} A_2 \left\{\frac{1}{1}\right.$$

richtig innerhalb der Gränzen $x = o$ bi
$(2b + 1)$.

Dabei ist im letzteren Falle

43) $$A_n = D^{n-1}\left\{(1-x)^n f'(x)\right\}_{(x=o)}$$

$$= f^{(n)}(o) - (n-1) \cdot n_1 f^{(n-1)}(o) + (n-1)(n-2) \cdot n_2 f^{(n-2)}$$

Man wird übrigens leicht übersehen, dass die Entwickel
$F(x)$ nach Nr. 31. und von $F(-x)$ nach Nr. 42
Resultate führt, welche übereinstimmen, indem das zwte
mit demjenigen identisch wird, was man aus der erste
erhält, wenn $-x$ für x gesetzt wird. Man kan
Formeln 41. und 42. zusammenfassen und zwar auf folgde

Venn die Reihenentwickelung

$$F\left\{\frac{t}{1-t}\right\} = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 t + \frac{1}{2'} A_2 t^2 + \ldots$$

innerhalb der Gränzen $\tau > t > -\tau$ gilt, so ist

$$F(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \left\{\frac{x}{1+x}\right\} + \frac{1}{2'} A_2 \left\{\frac{x}{1+x}\right\}^2 + \ldots.$$

$$\frac{\tau}{1-\tau} > x > -\frac{\tau}{1+\tau}$$

und dabei werden die Koeffizienten A nach der Formel 36. oder 37. bestimmt.

§. 5.

e alisirungen $\varphi(x) = x(1 + x^2)$ und $\varphi(x) = x : (1 + x^2)$.

Ihmen wir zunächst $\varphi(x) = x(1+x^2)$, so wird $\varphi'(x)$ x^2, aus der Gleichung $\varphi'(x) = 0$ ergeben sich die n Werthe

$$\xi = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{3}}, \quad \xi = -\frac{\sqrt{-1}}{3}$$

u folgt weiter

$$(\xi) = \pm\frac{\sqrt{-1}}{3}\left\{1-\frac{1}{3}\right\} = \pm\frac{2\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{3}}\left\{\cos\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$mod\,\varphi(\xi) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Die Gleichungen $\varphi(x) = o$ und $\varphi(x) = mod\,\varphi(\xi)$, au
die Gränzwerthe $x = a$ und $x = b$ zu bestimmen sind
jetzt

$$x(1+x^2) = o,\quad x(1+x^2) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

und hiervon sind die reellen Wurzeln

$$x = a = o,\quad x = b = 0{,}34401\ldots.$$

Da innerhalb dieser Gränzen die Funktion $\varphi(x) =$
beständig wächst, so erhalten wir nach den Bestimm
§. 1. folgendes Theorem:

Wenn sich die Funktion $f(x)$ innerhalb der Grä
bis $x = 0{,}34401\ldots$ in eine Potenzenreihe
lässt, so gilt für dasselbe Intervall die For

46) $$f(x) = A_0 + \frac{1}{1'}A_1 x(1+x^2) + \frac{1}{2'}A_2 x^2(1+$$

47) $$A_0 = f(o),\quad A_n = D^{n-1}\left\{\frac{f'(x)}{(1+x^2)^n}\right.$$

Der Koeffizient A_n lässt sich in noch entwickelterer Fo
wenn man

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} = 1 - \frac{n}{1}x^2 + \frac{(n+1)n}{1\,.\,2}x^4 - \ldots$$

setzt und darauf die Regel für die Differenziation der
Anwenduug bringt; man findet ohne Mühe

48) $$A_n = f^{(n)}(o) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1}f^{(n-2)}(o)$$

$$+\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-4)}{1\,.\,2}f^{(n-4)}$$

$$-\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)\ldots(n-6)}{1\,.\,2\,.\,3}f^{(n-6)}(o$$

worin das Fortschrittsgesetz klar sein wird.

em einfachen Falle $f(x) = Arctan\, x$ kann die Formel 47. er benutzt werden; man erhält

$$A_n = D^{n-1}\left\{\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right\}_{(x=0)}$$

ölliger Entwickelung, wenn man gerade und ungerade n det, $A_n = 0$ für gerade n, dagegen

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+\frac{n-1}{2})}{1\,.\,2\ldots\frac{n-1}{2}}\,.\,1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)$$

de n; setzt man noch $n = 2k+1$, so ist das allgemeine Reihe 46.

$$\frac{1}{(k+1)^2}A_{2k+1}x^{2k+1}(1+x^2)^{2k+1}$$

$$(-1)^k\frac{(2k+2)(2k+3)\ldots(3k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}\cdot\frac{x^{2k+1}(1+x^2)^{2k+1}}{2k+1}$$

=, d. h. $n = 1$, kann man diese Formel nicht gebrauchen, ict die Formel 47. unmittelbar $A_1 = 1$. Da endlich nerhalb der Gränzen $x = 0$ bis $x = 0{,}34401\ldots$ in tezenreihe verwandelbar ist, so haben wir unter dieser ation:

$$Arc\,tan\, x = x(1+x^2) - \frac{4}{1}\frac{x^3(1+x^2)^3}{3} + \frac{6\,.\,7}{1\,.\,2}\frac{x^5(1+x^2)^5}{5}$$

$$-\frac{8\,.\,9\,.\,10}{1\,.\,2\,.\,2}\frac{x^7(1+x^2)^7}{7} + \ldots\ldots$$

ng gilt übrigens auch für negative x, weil beide Seiten ätlich die Eigenschaft $f(-x) = -f(x)$ besitzen und tzt

$$0{,}34401\ldots > x > -0{,}33401$$

*

das vollständige Intervall der Gültigkeit. Um dies auch a
nachzuweisen, bemerken wir, dass vor dem in Nr. 50. ver
Gliede der Reihe das nachstehende

$$(-1)^{k-1} \frac{2k(2k+1) \ldots (3k-2)}{1 \cdot 2 \ldots (k-1)} \frac{x^{2k-1}(1+x^2)^2}{2k-1}$$

vorhergeht; der Quotient beider ist, abgesehen vom Vor

$$\frac{1}{k} \frac{(3k-1)(3k)(3k+1)}{(2k)(2k+1)} \frac{2k-1}{2k+1} x^2(1+x^2)^2$$

und damit die Reihe konvergire, darf der Gränzwerth b
Einheit nicht übersteigen. Diess giebt die Bedingung

$$\frac{27}{4} x^2(1+x^2)^2 < 1 \text{ oder } x(1+x^2) < \frac{2}{3\sqrt{}}$$

woraus man wie früher $x < 0{,}34401 \ldots$ findet. Mit H
Raabe'schen Theoremes, wonach die Reihe u_0, u_1, ,
konvergirt, wenn die Ungleichung

$$Lim \left\{ n \left[\frac{u_{n-1}}{u_n} - 1 \right] \right\} > 1$$

statt findet, erkennt man leicht, dass die in Rede steh
auch noch für $x = 0{,}34401 \ldots$ konvergirt, also die Gl
auch noch an den Gränzen des Intervalles richtig blei
hinaus wird sie entschieden unrichtig.

II. Es sei nun zweitens

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

so hat die Gleichung $\varphi(x) = o$ die beiden reellen Wu
und $x = \infty$, wovon wir nur die erste brauchen könne
das Gültigkeitsintervall für die beabsichtigte Reihen
ins Unendliche fiele. Die Gleichung $\varphi'(x) = o$ wird

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = o$$

es giebt für $x = \xi$ zwei Werthe $\xi = 1$ und $\xi = \infty$.
ii, weil $\varphi(\xi)$ reell ausfällt, zugleich die Werthe von b;
(x) nur von $x = 0$ bis $x = 1$ wächst, nachher aber
=! bis $x = \infty$ abnimmt, so müssen wir das Gültigkeits-
f $x = 0$ bis $x = 1$ beschränken. Diess giebt den

Wenn die Funktion $f(x)$ innerhalb der Gränzen $x = 0$ bis
$x = 1$ in eine Potenzenreihe verwandelbar ist, so gilt
unter derselben Determination die Entwickelung

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \left\{\frac{x}{1+x^2}\right\} + \frac{1}{2'} A_2 \left\{\frac{x}{1+x^2}\right\}^2 + \cdots$$

$$A_0 = f(o), \quad A_n = D^{n-1} \left\{(1+x^2)^n f'(x)\right\}_{(x=o)}$$

n ickelt ist der Koeffizient

$$_n = f^{(n)}(o) + (n-1)\, n_1\, f^{(n-2)}(o)$$
$$+ (n-1)(n-2)(n-3)\, n_2\, f^{(n-4)}(o)$$
$$+ (n-1)(n-2) \ldots (n-5)\, n_3\, f^{(n-6)}(o) + \ldots$$

ch *a posteriori* überzeugen, dass die obige Entwickelung
$r = 1$ hinaus richtig ist, obwohl die Reihe immer noch
, o setze man einmal $x = z$, das andere Mal $x = \frac{1}{z}$;
e bleibt dann dieselbe und folglich müsste allgemein
$\left(\frac{1}{z}\right)$ sein. — Für $f(x) = e^{\alpha x}$ hat man z. B. sehr einfach

$$= \alpha^n + (n-1).n_1\, \alpha^{n-2} + (n-1)(n-2)(n-3).\, n_2\, \alpha^{n-4}$$
$$+ (n-1)(n-2) \ldots (n-5) .\, n_3\, \alpha^{n-6} + \ldots$$

und für die so bestimmten Werthe ist innerhalb de
$x = 0$ bis $x = 1$

56) $$e^{\alpha x} = 1 + \frac{1}{1'} A_1 \left\{\frac{x}{1+x^2}\right\}^2 + \frac{1}{2'} A_2 \left\{\frac{x}{1+x^2}\right\}^2$$
$$+ \frac{1}{3'} A_3 \left\{\frac{x}{1+x^2}\right\}^3$$

§. 6.

Die Spezialisirungen $\varphi(x) = \sin x$ und $\varphi(x) = co$

I. Die Funktion $\varphi(x) = \sin x$ annullirt sich fü
viele Werthe von x, welche unter der Form $a = m\pi$, r
ganze Zahl bedeutet, enthalten sind. Nehmen wir vor
$m = o$ also $a = o$, so gilt die Reihenentwickelung

57) $$f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \sin x + \frac{1}{2'} A_2 \sin^2 x + \frac{1}{3'} A_3 si$$

so lange bis $\sin x$, stets wachsend, sein Maximum erl
bis $x = \frac{\pi}{2}$. Dass in der That über $\frac{\pi}{2}$ hinaus die Gl
zu bestehen aufhört, erkennt man leicht, wenn fi
$\frac{\pi}{2} - z$ und das andere Mal $\frac{\pi}{2} + z$ gesetzt wird, di
behält in beiden Fällen denselben Werth, aber es ist nic
$f\left[\frac{\pi}{2} + z\right] = f\left[\frac{\pi}{2} - z\right]$. Für die Koeffizienten
dienen die Formeln:

58) $$A_0 = f(o), \quad A_n = D^{n-1} \left\{\left[\frac{x}{\sin x}\right]^n f'(x)\right\}_{(x=0)}$$

wobei die angedeutete Differenziation sich zwar in jed
Falle ($n = 1, 2, 3 \ldots$) ohne Schwierigkeit ausführe al
keine independenten Formeln näher angeben lässt.

f hnliche Weise kann man die Gültigkeit der Reihe 56. h andere Intervalle nebst der zugehörigen Koeffizienten- u; zeigen, kürzer aber kommt man auf folgendem Wege l In Nr. 57. sei $f(x) = F(k\pi + x)$, wo k eine ganze er negative Zahl und F eine neue Funktion bezeichnet, h Nr. 57. für $\frac{\pi}{2} \geqq x \geqq o$ d. h. für

$$k\pi + \frac{\pi}{2} \geqq k\pi + x \geqq k\pi$$

eihenentwickelung

$$f(\pi + x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \sin x + \frac{1}{2'} A_2 \sin^2 x + \ldots\ldots$$

ch Nr. 58.

$$F(k\pi);\ A_n = D^{n-1} \left\{ \left[\frac{x}{\sin x} \right]^n F'(k\pi + x) \right\}_{(x=o)}$$

v nun in den neuen Formeln $k\pi + x = z$, also $-k\pi$, so folgt $\sin x = \cos k\pi \sin z = (-1)^k \sin z$ und

$$= F(k\pi) + \frac{(-1)^k}{1'} A_1 \sin z + \frac{(-1)^{2k}}{2'} A_2 \sin^2 z + \ldots$$

$$_n = (-1)^{kn} D^{n-1} \left\{ \left[\frac{z - k\pi}{\sin z} \right]^n F'(z) \right\}_{(z=k\pi)}$$

zu Abkürzung

$$C_n = D^{n-1} \left\{ \left[\frac{z - k\pi}{\sin z} \right]^n F'(z) \right\}_{(z=k\pi)}$$

$= (-1)^{nk} C_n$, so ergiebt sich aus der vorhergehenden

$$= F(k\pi) + \frac{1}{1'} C_1 \sin z + \frac{1}{2'} C_2 \sin^2 z + \ldots.$$

und sie gilt von $z = k\pi$ an bis $z < k\pi + \frac{\pi}{2}$. Sch

endlich der Symmetrie wegen f, A und x für F, C

gelangen wir zu dem Satze:

Wenn die Funktion $f(x)$ innerhalb der Gränze

bis $x = (k + \frac{1}{2})\pi$, wo k eine ganze Za

Potenzenreihe verwandelbar ist, so gilt

Intervall auch die Entwickelung

60) $$f(x) = f(k\pi) + \frac{1}{1'} A_1 \sin x + \frac{1}{2'} A_2 \sin^2 x$$

$$+ \frac{1}{3'} A_3 \sin^3 x +$$

deren Koeffizienten nach der Formel

61) $$A_n = D^{n-1} \left\{ \left[\frac{x - k\pi}{\sin x} \right]^n f'(x) \right\}_{(x=t)}$$

zu bestimmen sind.

Eine nicht uninteressante Substitution für $f(x)$

z. B. $f(x) = Si(x)$, wobei $Si(x)$ der Integralsinus von

Summe der Reihe

$$\frac{1}{1} \frac{x}{1'} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3'} + \frac{1}{5} \frac{x^5}{5'} - \cdots$$

bezeichnet. Es wird dann $f'(x) = \frac{\sin x}{x}$ und also

$$Si(x) = Si(k\pi) + \frac{1}{1'} A_1 \sin x + \frac{1}{2'} A_2 \sin^2 x - \cdots$$

$$(k + \frac{1}{2})\pi > x \geqq k\pi$$

$$A_n = D^{n-1} \left\{ \left[\frac{x - k\pi}{\sin x} \right]^n \frac{\sin x}{x} \right\}_{(x=k}$$

ormeln dazu dienen könnten um aus dem Sinus eines
$k\pi$ und $(k + \frac{1}{2})\pi$ enthaltenen Argumentes unmittelbar
alsinus desselben zu berechnen.

Die Entwickelung nach Potenzen des Cosinus lässt sich
einfache Folge von den so eben aufgestellten Formeln
Setzen wir nämlich in Nr. 60. $f(x) = F(x + \frac{\pi}{2})$,
$k + \frac{1}{2})\pi > x \geqq k\pi$

$$= F\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) + \frac{1}{1'} A_1 \sin x + \frac{1}{2'} A_2 \sin^2 x + \ldots.$$

$$A_n = D^{n-1}\left\{\left(\frac{x - k\pi}{\sin x}\right)^n F'(x + \frac{\pi}{2})\right\}_{(x=k\pi)}$$

$x = z - \frac{\pi}{2}$ genommen wird, so ist für $(k+1)\pi$
$(k + \frac{1}{2})\pi$

$$= F\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) - \frac{1}{1'} A_1 \cos z + \frac{1}{2'} A_2 \cos^2 z - \ldots$$

$$(-1)^n D^{n-1}\left\{\left(\frac{z - (k+\frac{1}{2})\pi}{\cos z}\right)^n F'(z)\right\}_{[z=(k+\frac{1}{2})\pi]}$$

wir zur Abkürzung wie folgt,

$$: D^{n-1}\left\{\left(\frac{z - (k+\frac{1}{2})\pi}{\cos z}\right)^n F'(z)\right\}_{[z=(k+\frac{1}{2})\pi]}$$

$= (-1)^n A'_n$ und wir haben jetzt nach dem Vorher-

$$F(z) = F\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) + \frac{1}{1'}A'_1 \cos z + \frac{1}{2'}A'_2 \cos^2 z -$$

Der Gleichförmigkeit wegen schreiben wir wieder f F und z, und lassen die Accente an den Koeffizienten weg; wir zu dem Satze:

Wenn die Funktion $f(x)$ innerhalb der Gr $(k+\frac{1}{2})\pi$ bis $x = (k+1)\pi$, wo k eine in eine Potenzenreihe verwandelbar ist, dieses Intervall auch die Entwickelung

62) $$f(x) = f\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) + \frac{1}{1'}A_1 \cos x + \frac{1}{2'}A_2 \cos$$

deren Koeffizienten durch die Formel

63) $$A_n = D^{n-1}\left\{\left(\frac{x-(k+\frac{1}{2})\pi}{\cos x}\right)^n f'(x)\right\}_{[}$$

bestimmt werden.

Von dieser Formel liesse sich ähnlich wie v Anwendung machen, um aus dem Cosinus eines A Integralcosinus desselben Argumentes abzuleiten, wo Integralcosinus $[Ci(x)]$ die Summe der Reihe

$$0{,}5772156\ldots + \frac{1}{2}l(x^2) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2'} + \frac{1}{4}\frac{x^4}{4'} -$$

verstanden wird; es ist dann $d\,Ci(x) = \frac{\cos x}{x}dx$.

§. 7.

Die Spezialisirung $\varphi(x) = Arctan\, x$.

r 'all $\varphi(x) = Arctan\, x$ bietet wieder die Eigenthümlichkeit s

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

ebchene abgebraische Funktion mit konstantem Zähler s dass also hier die schon berührte Ausnahme von den n Regeln statt findet. Wenn nun aber

$$f(v) = A_0 + \frac{1}{1'} Arctan\, x + \frac{1}{2'} Arc^2 tan\, x + \ldots.$$

, so folgt umgekehrt für $Arctan\, x = t$

$$f(tan\, t) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 t + \frac{1}{2'} A_2 t^2 + \ldots\ldots$$

is sehr leicht zu sehen, wie weit diese Entwickelung ir Es ist nämlich

$$\frac{d f(tan\, t)}{dt} = \frac{f'(tan\, t)}{cos^2 t}$$

$$\frac{d^2 f(tan\, t)}{dt^2} = \frac{f'(tan\, t)\, sin\, 2t + f''(tan\, t)}{cos^4 t}$$

u. s. f.

Ausdrücke rechter Hand können nun auf doppelte Weise rechung der Kontinuität erleiden, entweder indem der e chwindet, oder indem eine der einzelnen Funktionen $f'(tan\, t)$ .... diskontinuirlich wird. Schliessen wir den ll us, indem wir $\frac{\pi}{2} > t$ setzen, so bleibt nur noch der ll übrig; wenn nun t (oder der Modulus von t) das

Intervall von Null bis in die Nachbarschaft von t dur
verändert sich $tant$, das Argument der Funktionen $f(tan$
$f''(tant)$ etc., von 0 bis ∞ und daher bleiben diese
stetig, wenn die Funktionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ etc.
bis $x = \infty$ oder $mod\, x = o$ bis $mod\, x = \infty$ ebenfalls
sind. Da unter der letzteren Bedingung $f(x)$ in eine P
verwandelbar ist, so haben wir zunächst den Satz: di

gilt für $\frac{\pi}{2} > t \geqq o$, sobald $f(x)$ innerhalb der Grä
bis $x = \infty$ einer Potenzenreihe gleich ist. Durch R
Früheren ergiebt sich daraus weiter das Theorem:

Wenn die Funktion $f(x)$ für jedes positive x ein
reihe gleichgilt, so ist ebenfalls für jedes

64) $$f(x) = f(o) + \frac{1}{1'} A_1 \, Arctan\, x + \frac{1}{2'} A_2 \, Arc^2 t$$

worin die Koeffizienten mittelst der Forme

65) $$A_n = D^{n-1} \left\{ \left(\frac{x}{Arctan\, x} \right)^n f'(x) \right\}_{(x=)}$$

zu bestimmen sind.

Es versteht sich von selbst, dass die Gültigkeit der Entic
in demselben Maasse beschränkt wird, als diess mit der
von $f(x)$ in eine Potenzenreihe der Fall ist; gilt z. B.
Verwandlung nur etwa für $\alpha > x \geqq o$, so unterlgt
Formel 64. derselben Beschränkung.

Wollte man die Koeffizientenbestimmung nach F
ausführen, so würde man immer auf sehr verwickelte Diff
stossen und es ist daher nicht überflüssig, einen and
Entwickelung derselben anzudeuten. Da die Funkon
Voraussetzung nach in eine Potenzenreihe verwandelbar
so haben wir

$$(x) = a_0 + \frac{1}{1'} a_1 x + \frac{1}{2'} a_2 x^2 + \frac{1}{3'} a_3 x^3 + \ldots\ldots$$

emntlich $a_0 = f(o)$, $a_1 = f'(o)$, $a_2 = f''(o)$ u. s. w.

st weiter nach einer bekannten Formel für $\frac{\pi}{2} > u > -\frac{\pi}{2}$

$$= u + \frac{1}{3} u^3 + \frac{2}{15} u^5 + \frac{17}{315} u^7 + \frac{62}{2835} u^9 + \ldots\ldots$$

$u = Arctan\, x$

$$= Arctan\, x + \frac{1}{3} Arc^3 tan\, x + \frac{2}{15} Arc^5 tan\, x$$

$$+ \frac{17}{315} Arc^7 tan\, x + \frac{62}{2835} Arc^9 tan\, x + \ldots\ldots$$

s giebt sich durch beiderseitige Differenziation, Multiplikation $+ x^2$ und nachherige Subtraktion der Einheit

$$= Arc^2 tan\, x + \frac{2}{3} Arc^4 tan\, x + \frac{17}{45} Arc^6 tan\, x$$

$$+ \frac{62}{315} Arc^8 tan\, x + \ldots\ldots$$

Differenziation, Division mit 2 und Multiplikation mit ebt

$$= Arctan\, x + \frac{4}{3} Arc^3 tan\, x + \frac{17}{15} Arc^5 tan\, x$$

$$+ \frac{248}{315} Arc^7 tan\, x + \ldots\ldots$$

el Subtraktion von Nr. 67. wird hieraus

$$= Arc^3 tan\, x + Arc^5 tan\, x + \frac{231}{315} Arc^7 tan\, x + \ldots$$

Differenziation, Division mit 3, Multiplikation mit $1 + x^2$ traktion von Nr. 68. giebt

70) $x^4 = Arc^4 tan\, x + \frac{4}{3} Arc^6 tan\, x + \ldots\ldots$

Man übersieht auf der Stelle den Fortgang dieser ganz
Rechnung; substituirt man die für x, x^2, x^3, x^4 etc.
Reihen in die Gleichung 66,, so wird jetzt

$$f(x) = a_0 + \frac{1}{1'} a_1 \left\{ Arctan\, x + \frac{1}{3} Arc^3 tan\, x + \frac{2}{15} Arc^5 tan \right.$$

$$+ \frac{1}{1'} a_2 \left\{ Arc^2 tan\, x + \frac{2}{3} Arc^4 tan\, x + \frac{17}{45} Arc^6 tan \right.$$

$$+ \frac{1}{3'} a_3 \left\{ Arc^3 tan\, x + Arc^5 tan\, x + \ldots \right.$$

$$+ \frac{1}{4'} a_4 \left\{ Arc^4 tan\, x + \ldots\ldots\ldots \right.$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sobald man hier Alles nach Potenzen von $Arctan\, x$ g
ist es leicht, eine Vergleichung mit Nr. 64. vorzun
hieraus entspringenden Werthe von A_0, A_1, A_2 etc. s

$$A_0 = a_0,\ A_1 = a_1,\ A_2 = a_2$$

$$A_3 = 2a_1 + a_3$$

$$A_4 = 8a_2 + a_4$$

$$A_5 = 16a_1 + 20a_3 + a_5$$

$$A_6 = 136a_2 + 40a_4 + a_6$$

$$A_7 = 272a_1 + 616a_3 + 70a_5 + a_7$$

$$A_8 = 3968a_2 + 2016a_4 + 112a_6 + a_8$$

$$A_9 = 7936a_1 + 28160a_3 + 5376a_5 + 168a_7 + a_9$$

$$A_{10} = 176896a_2 + 106720a_4 + 10528a_6 + 24a_8$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Nehmen wir beispielweis $f(x) = li(e^x)$ d. h. gleich

$$+ \frac{1}{2} l(x^2) + \frac{1}{1} \frac{x}{1'} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2'} + \frac{1}{3} \frac{x^3}{3'} + \ldots\ldots\ldots$$

ihe immer konvergirt, so findet sich für jedes positive x

$$(e^x) = 0{,}5772156 + \frac{1}{2} l(x^2)$$

$$+ \frac{1}{1} \frac{Arctan\, x}{1'} + \frac{1}{2} \frac{Arc^2 tan\, x}{2'}$$

$$+ \frac{7}{1.3} \frac{Arc^3 tan\, x}{3'} + \frac{1}{2.4} \frac{Arc^4 tan\, x}{4'}$$

$$+ \frac{343}{1.3.5} \frac{Arc^5 tan\, x}{5'} + \frac{3752}{2.4.6} \frac{Arc^6 tan\, x}{6'}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

findet man eine Reihe, welche aus denselben Gliedern
ur dass die Glieder ungerader Nummer negativ werden;
daher auch sagen, dass die vorstehende Entwickelung
elle x Gültigkeit besitze.

o leicht würde es sein, Reihen für $Ci(x)$, $Si(x)$ und
nte Funktionen abzuleiten; jene enthält nur gerade,
ngerade Potenzen von $Arctan\, x$; beide gelten für jeden
th von x.

§. 8.

Die Spezialisirung $\varphi(x) = xe^{-x}$.

en bisher meistentheils solche Spezialisirungen von $\varphi(x)$
bei denen eine Umkehrung der Funktion $\varphi(x)$ möglich
i denen aus der Gleichung $\varphi(x) = t$ die umgekehrte
va $x = \psi(t)$ abgeleitet werden konnte; in allen diesen
ss sich die Entwickelung

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \varphi(x)^2 + \frac{1}{2'} A_2 \varphi(x)^2 + \frac{1}{3'} A_3 \varphi(x)$$

auf die folgende

$$f[\psi(t)] = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 t + \frac{1}{2'} A_2 t^2 + \frac{1}{3'} A_3 t^3 +$$

also im Grunde auf das Theorem von *Mac Laurin* z
wiewohl die höheren Differenzialquotienten von $f[\psi(t)]$ in
Formeln nicht leicht entwickelbar sein würden. Wenn
Funktion $\varphi(x)$ der Art ist, dass man ihre Umkehru
unmittelbar angeben kann; so würde jene Reduktion
Laurin'schen Satz unmöglich werden und gerade in der
selbst dieser Fälle, liegt die starke Seite der Bürmann's
Eine derartige Spezialisirung von $\varphi(x)$ ist nun die
$\varphi(x) = xe^{-x}$. Diese Funktion verschwindet für $x =$
$x = \infty$, wir können aber nur den ersten Werth,
gebrauchen, weil sonst das Gültigkeitsintervall unserer
ins Unendliche fiele. Ferner erreicht die Funktion xe^{-x}
ihr reelles Maximum und es ist daher $b = 1$.
folgenden Satz:

Wenn die Funktion $f(x)$ innerhalb der Grä
bis $x = 1$ in eine Potenzenreihe verwandl
gilt für dasselbe Intervall die Entwickelun

71) $$f(x) = f(o) + \frac{1}{1'} A_1 xe^{-x} + \frac{1}{2'} A_2 x^2 e^{-2x} + \frac{1}{3'} A_3 x^3 e^{-3x} +$$

wobei die Koeffizienten nach der Formel

72) $$A_n = D^{n-1} \left\{ e^{nx} f'(x) \right\}_{(x=o)}$$
$$= f^{(n)}(o) + (n-1)_1 . n f^{(n-1)}(o) + (n-1)_2 n^2 f^{(n-2)}(o) +$$

zu bestimmen sind.

n beispielsweise $f'x) = x$, so findet sich

$$= \frac{1^0}{1'} xe^{-x} + \frac{2^1}{2'} (xe^{-x})^2 + \frac{3^2}{3'} (xe^{-x})^3 + \ldots.$$

ürde leicht genug ähnliche Beispiele dazu stellen können. e als diess ist die Bemerkung, dass die vorstehende bst zur Umkehrung der Gleichung $xe^{-x} = t$ benutzt nn. Bezeichnen wir nämlich die umgekehrte Funktion so $x = \psi(t)$, so folgt aus der letzten Formel

$$\psi(t) = \frac{1^0}{1'} t + \frac{2^1}{2'} t^2 + \frac{3^2}{3'} t^3 + \ldots..$$

ilt von $t = o$ bis $t = \frac{1}{e}$, weil xe^{-x} für $x = 1$ seinen

rth $\frac{1}{e}$ erreicht. Zu beachten ist übrigens hierbei, dass et der obigen Formel nur die eine Umkehrung der $e^{-x} = t$ erhält, obschon zwei solcher Umkehrungen Denken wir uns nämlich der Anschaulichkeit wegen die etrisch und zwar $t = xe^{-x}$ als Gleichung einer ebenen eht dieselbe durch den Anfangspunkt der Koordinaten, $x = 1$ ihr Maximum $\frac{1}{e}$ und nähert sich von da ab nachse als Asymptote. Zu jeder individuellen Ordinate $< \frac{1}{e}$) gehören demnach zwei Abscissen, von denen lem Intervalle 0 bis 1, die andere in dem Intervalle alten ist, und daher besitzt die Gleichung $xe^{-x} = t$, als gegeben und x als gesucht ansieht, zwei reelle h. es giebt zwei Umkehrungen der Gleichung. Die fert von diesen nur die kleinere, weil darin $x = \psi(t)$ vall 0 bis 1 beschränkt ist. Genaueres über die e der Funktionen werden wir in einem der nächsten geben.

§. 9.

Verallgemeinerung der Entwickelungsformel.

Um eine Entwickelung von der Form

75) $f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \psi(x) + \frac{1}{2'} A_2 \psi(x)^2 + \frac{1}{3'} A_3 \psi$

bewerkstelligen zu können, musste bisher immer v
werden, dass es wenigstens einen endlichen Werth a
welcher $\psi(x)$ zum Verschwinden bringt. Dieser Bedingu
aber nicht alle Funktionen, wie z. B. schon e^x für kein
Werth von x verschwindet; man kann sich aber in e
sehr leicht helfen, indem man a willkührlich annimmt
Gleichung 75. $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(a)$ setzt, welcher A
$x = a$ jederzeit in Null übergeht. Man hat dann

76) $f(x) = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 [\varphi(x) - \varphi(a)] + \frac{1}{2'} A_2 [\varphi$

$$+ \frac{1}{3'} A_3 [\varphi(x) - \varphi$$

und darin ist nach den früheren Angaben, wenn
$\varphi(x) - \varphi(a)$ an die Stelle von $\varphi(x)$ gesetzt denkt

77) $$A_n = D^{n-1} \left\{ \left(\frac{x-a}{\varphi(x) - \varphi(a)} \right)^n f'(x) \right\}_{(x=}$$

Die Bedingungen für die Gültigkeit der Entwickelu
sich auf folgendem Wege: man löse zunächst d
$\varphi'(x) = 0$ auf und nenne ξ ihre Wurzeln, bilde dara
Gleichung

78) $$\varphi(x) - \varphi(a) = mod \left\{ \varphi(\xi) - \varphi(a) \right\}$$

und bezeichne ihre Wurzeln durch $x = b$; die Fun
dann für $b > x \geqq a$ vorausgesetzt, dass $\varphi(x)$ wie

le zunimmt, und dass $f(x)$, sowie $\varphi(x)$ für $b \geqq x \geqq a$
n nreihen verwandelbar sein würden.

gt bei der Betrachtung der Gleichung 76. der Gedanke
h sich *a posteriori* von ihrer Richtigkeit zu überzeugen,
n beide Seiten derselben nach Potenzen von $x - a$
el und darauf die Koeffizienten gleicher Potenzen zusammen
V wollen diesen Gedanken noch etwas ausführen, weil er
e schlagendes Beispiel liefert, mit welcher Vorsicht
h Reihen und besonders doppelte oder mehrfache Reihen
lt verden müssen, wenn man nicht auf die widersinnigsten
e ommen will.

h lem Theoreme von *Taylor* ist bekanntlich

$$(= \varphi(a) + \frac{\varphi'(a)}{1'}(x-a) + \frac{\varphi''(a)}{2'}(x-a) + \ldots\ldots$$

e wir die Buchstaben α_1, α_2, α_3 etc. als Abkürzungen
Koeffizienten benutzen

$$(- \varphi(a) = \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \alpha_3(x-a)^3 + \ldots.$$

v uns beide Seiten dieser Gleichung der Reihe nach auf
e dritte Potenz u. s. w. erhoben, so resultiren Gleichungen
F men

$$^2 - \varphi(a)]^2 = \beta_2(x-a)^2 + \beta_3(x-a)^3 + \beta_4(x-a)^4 + \ldots$$

$$x - \varphi(a)]^3 = \gamma_3(x-a)^3 + \gamma_4(x-a)^4 + \gamma_5(x-a)^5 + \ldots$$

u. s. w.

f die Werthe der mit β, γ u. s. f. bezeichneten
e nicht näher ankommt; genug für uns, dass sich diese
e wirklicher Potenzirung von selbst ergeben würden.
n wir ferner die Gleichungen 80., 81., 82. etc., mit den

vor der Hand noch unbestimmten Koeffizienten C_1, C_2 so ist durch Addition bei gehöriger Ordnung nach von $x - a$

$$C_1[\varphi(x) - \varphi(a)] + C_2[\varphi(x) - \varphi(a)]^2 + C_3[\varphi(x) - \varphi($$
$$= \alpha_1 C_1 (x - a)$$
$$+ \left\{\alpha_2 C_1 + \beta_2 C_2\right\} (x - a)^2$$
$$+ \left\{\alpha_3 C_1 + \beta_3 C_2 + \gamma_3 C_3\right\} (x - a)^3$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Hier könnte man die noch unbestimmten Koeffizienten C_1, C so wählen, dass die Gleichungen

$$\alpha_1 C_1 = \frac{f'(a)}{1'}$$
$$\alpha_2 C_1 + \beta_2 C_2 + \frac{f''(a)}{3'}$$
$$\alpha_3 C_1 + \beta_3 C_2 + \gamma_3 C_3 = \frac{f'''(a)}{3'}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

erfüllt wären, in denen f eine willkührlich angenommene bedeutet; und in der That würde es keine Schwierigkeit die Werthe von C_1, C_2, C_3 etc. der Reihe nach zu b Jetzt wird nun

$$C_1[\varphi(x) - \varphi(a)] + C_2[\varphi(x) - \varphi(a)]^2 + C_3[\varphi(x) - \varphi($$
$$= \frac{f'(a)}{1'}(x - a) + \frac{f''(a)}{2'}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3'}(x - a)^3$$
$$= f(x) - f(a)$$

indem man wiederum das Taylor'sche Theorem angewen demnach ist zuletzt

$$f() = f(a) + C_1[\varphi(x) - \varphi(a)] + C_2[\varphi(x) - \varphi(a)]^2 + C_3[\varphi(x) - \varphi(a)]^3 + \ldots$$

nt wäre die Entwickelung nach dem Schema von Nr. 76. — So elegant diess Alles auch aussehen mag, so ist e anze Ableitung höchst ungenügend und führt selbst in c chsten Falle, wenn nämlich die in Gebrauch genommenen il n

$$x = f(a) + \frac{f'(a)}{1'}(x - a) + \frac{f''(a)}{2'}(x - a)^2 + \ldots$$

$$x = \varphi(a) + \frac{\varphi'(a)}{1'}(x - a) + \frac{\varphi''(a)}{2'}(x - a)^2 + \ldots$$

e Zeit für alle möglichen x konvergiren, immer noch auf ultate, indem man durch die Herleitung zu dem Glauben wd, es sei die Formel 83. ebenfalls für alle möglichen x tzen wir z. B. voraus, dass $\varphi(x)$ für $x = \mu$ ein er Minimum erreichte, so giebt es eine unendliche Menge h x_1 und x_2 der Art, dass immer $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ ist, μ und $x_2 > \mu$ sein muss; nimmt man jetzt in der r dann $x = x_1$ und dann $x = x_2$, so wäre $f(x_1)$ s deswegen völlig absurd ist, weil x_1 und x_2 nur mit icht mit f zusammenhängen. So würde man z. B. für nd $\varphi(x) = \sin x$ die Entwickelung

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{7}{6}\sin^3 x + \frac{5}{24}\sin^4 x + \ldots\ldots$$

he trotzdem, dass die Reihen für e^x und $\sin x$ immer nicht allgemein richtig sein kann, indem sie für $x = u$ $\pi - u$ auf das Resultat $e^u = e^{\pi - u}$ führen würde.

d dieser Erscheinung ist leicht zu entdecken, sobald ge Entwickelung mit der Sorgfalt wiederholt, jede

Reihe als endliche zu nehmen und ihr den zugeh
beizusetzen. Genauer ist also, wenn wir die Reste
$\overset{III}{R_n}, \ldots \overset{n}{R_n}$ bezeichnen,

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \alpha_3(x-a)$$
$$\ldots + \alpha_n(x-a)^n + \overset{I}{R_n}$$

$$[\varphi(x) - \varphi(a)]^2 = \beta_2(x-a)^2 + \beta_3(x-a)^3 + \beta_4(x-a)$$
$$\ldots + \beta_n(x-a)^n + \overset{II}{R_n}$$

$$[\varphi(x) - \varphi(a)]^3 = \gamma_3(x-a)^3 + \gamma_4(x-a)^4 + \gamma_5(x-a)$$
$$\ldots + \gamma_n(x-a)_n + \overset{III}{R_n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[\varphi(x) - \varphi(a)]^n = \varkappa_n(x-a)^n + \overset{n}{R_n}$$

und hieraus ergiebt sich bei derselben Koeffizienten
wie vorhin

$$C_1[\varphi(x) - \varphi(a)] + C_2[\varphi(x) - \varphi(a)]^2 + C_3[\varphi(x) - p($$
$$\ldots + C_n[\varphi(x) - \varphi(a)]^n$$
$$= \frac{f'(a)}{1'}(x-a) + \frac{f''(a)}{2'}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3'}(x-a)^3$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n'}(x-a)^n$$
$$+ C_1\overset{I}{R_n} + C_2\overset{II}{R_n} + C_3\overset{III}{R_n} + \ldots + C_n\overset{n}{R_n}$$

Bezeichnen wir nun r_n den Rest bei der Entwickelung
nach Potenzen von $x - a$, setzen also

$$f() = f(a) + \frac{f'(a)}{1'}(x-a) + \frac{f''(a)}{2'}(x-a)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n'}(x-a)^n + r_n$$

z(wir ferner zur Abkürzung

$$s_n = \overset{I}{C_1}\overset{I}{R_n} + \overset{II}{C_2}\overset{II}{R_n} + \ldots + \overset{n}{C_n}\overset{n}{R_n}$$

jzt die obige Gleichung in die folgende über

$$\cdot\ \varphi(a)]\ C_2[\varphi(x)-\varphi(a)]^2 + C_3[\varphi(x)-\varphi(a)]^3 + \ldots.$$

$$\ldots + C_n[\varphi(x)-\varphi(a)]^n$$

$$= f(x) - f(a) - r_n + s_n$$

is endlich

$$\cdot\ s_n = f(a) + C_1[\varphi(x)-\varphi(a)] + C_2[\varphi(x)-\varphi(a)]^2 + \ldots$$

$$\ldots + C_n[\varphi(x)-\varphi(a)]^n$$

ın diese unter allen Umständen richtige Gleichung mit N. 83. verzeichneten Entwickelung zusammenfallen, so endlich wachsende n

$$Lim(r_n - s_n) = 0$$

ır dann möglich ist, wenn einzeln die Beziehungen

$$Lim\, r_n = 0,\quad Lim\, s_n = 0$$

n weil r_n nur von f, s_n aber auch von φ abhängt und cl r_n und s_n nicht gegenseitig aufheben können. Diese ge erfordern nothwendig die Konvergenz der für $f(x)$) ufgestellten Reihen, weil ausserdem $Lim\, r_n$ und b ıso $Lim\, \overset{II}{R_n}$, $Lim\, \overset{III}{R_n}$ etc. und endlich auch $Lim\, s_n$ von

Null verschieden ausfallen würden. So nothwendig n
Konvergenz der Potenzenreihen für $f(x)$ und $\varphi(x)$ is
erweist sie sich als hinreichend; denn aus der
Abnahme von $\overset{I}{R_n}, \overset{II}{R_n}, \ldots \overset{n}{R_n}$ folgt durchaus nicht, dass

$$Lim\left\{C_1\overset{I}{R_n} + C_2\overset{II}{R_n} + \ldots + C_n\overset{n}{R_n}\right\}$$

der Null gleich sein müsse; im Gegentheile weiss
derartige Produktensummen in bestimmte Integrale
sobald die Anzahl der Produkte ins Unendliche wäch
einzelne Produkt ins Unendliche abnimmt. Diese e
geben zu erkennen, dass es ausser der Konvergenz
reihen für $f(x)$ und $\varphi(x)$ noch anderer Determinatione
die Entwickelung in 83. zur Geltung zu bringen.
dieselben dadurch auffinden, dass man den Ausdr
genaueren Betrachtung unterzöge, so würde man
ziemlich weitläufige Untersuchung einlassen müssen,
der Grund, weshalb wir gleich von vornherein einen
eingeschlagen haben.

§. 10.

Integrationen mittelst der Bürmann'schen For

Man kommt bekanntlich häufig genug in den F
von der Form

$$\textbf{84)} \qquad \int f(x)\psi(x)\,dx$$

behandeln zu müssen, bei denen der eine Faktor ψx
ist, also

$$\textbf{85)} \qquad \int \psi(x)\,dx = \varphi(x)$$

gesetzt werden kann, während sich das Integral 8

ünlichen Funktionen ausdrücken lässt. In solchen Fällen
li Bürmann'sche Reihe gute Dienste; da nämlich aus Nr. 85.
$x = \varphi'(x)$, so geht das Integral in das folgende über

$$\int f(x)\,\varphi'(x)\,dx$$

at durch Verwandlung von $f(x)$ in eine nach Potenzen
) $- \varphi(a)$ fortschreitende Reihe:

$$(\; dx = A_0 \int \varphi'(x)\,dx + \frac{1}{1'} A_1 \int [\varphi(x) - \varphi(a)]\,\varphi'(x)\,dx$$

$$+ \frac{1}{2'} A_2 \int [\varphi(x) - \varphi(a)]^2 \varphi'(x)\,dx + \ldots .$$

e Hand jede einzelne Integration ausführbar ist, indem

$$[\varphi(x) - \varphi(a)]^n \varphi'(x)\,dx = \frac{[\varphi(x) - \varphi(a)]^{n+1}}{n+1}$$

n

$$x\,dx = \frac{1}{1'} A_0 \varphi(x) + \frac{1}{2'} A_1 [\varphi(x) - \varphi(a)]^2$$

$$+ \frac{1}{3'} A_2 [\varphi(x) - \varphi(a)]^3 + \ldots + Const.$$

ymmetrischer schreiben kann

$$x\,dx = C + \frac{1}{1'} A_0 [\varphi(x) - \varphi(a)] + \frac{1}{2'} A_1 [\varphi(x) - \varphi(a)]^2$$

$$+ \frac{1}{3'} A_2 [\varphi(x) - \varphi(a)]^3 + \ldots$$

ch die vorige $Const. = C + A_0 \varphi(a)$ gesetzt denkt.
n für $\varphi'(x)$ seinen Werth und berücksichtigt, dass
leichung 85.

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \int_a^x \psi(x)\,dx$$

ist, (vorausgesetzt, dass $\psi(x)$ innerhalb das Intervalles $x = x$ keine Unterbrechung der Kontinuität erleidet) sich noch

87) $$\int f(x)\psi(x)\,dx = C + \frac{1}{1'} A_0 \int_a^x \psi(x)\,dx$$

$$+ \frac{1}{2'} A_1 \left[\int_a^x \psi(x)\,dx\right]^2 + \frac{1}{3'} A_2 \left[\int_a^x \psi(x)\,d\right.$$

Eine noch elegantere Gestalt erhält diese Formel, wn Integrationskonstanten C denjenigen Werth giebt, d. stimmte Integral linker Hand für $x = a$ bekommt; so a

$$\int f(x)\psi(x)\,dx = F(x) + C,$$

$C = F(a) + C'$ zu setzen ist; durch Transpositionv dann die linke Seite in

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\psi(x)\,dx$$

über. Man gelangt so zu der schönen Entwickelungsfor

88) $$\int_a^x f(x)\psi(x)\,dx = \frac{A_0}{1'} \int_a^x \psi(x)\,dx + \frac{A_1}{2'} \left[\int \psi\right.$$

$$+ \frac{A_2}{3'} \left[\int_a^x \psi(x)\,x\right.$$

worin die Koeffizienten wie folgt zu bestimmen sind:

$$A_n = D^{n-1}\left\{\left[\frac{x-a}{\int_a^x \psi(x)\,dx}\right]^n f'(x)\right\}_{(x=a)}$$

dingungen, unter welchen diese Entwickelung gültig bleibt, ch nach den über die Formel 76. gemachten Bemerkungen elem Wege: man löse zuerst die Gleichung $\psi(x) = o$ auf n ξ ihre Wurzeln, bilde darauf die Gleichung

$$\int_a^x \psi(x)\,dx = mod \int_a^{\xi} \psi(x)\,dx$$

ehne ihre Wurzeln durch b; die Formel 88. gilt dann für a vorausgesetzt, dass $\psi(x)$ während dieses Intervalles lbt und dass endlich $f(x)$ und $\psi(x)$ für $b \gtrless x \geqq a$ für in Potenzenreihen verwandelbar sein würden.

e brauchbare Anwendung hiervon bildet die Entwickelung g les

$$\int_o^x \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx$$

o, $\psi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und mithin

$$\int_o^x \frac{dx}{1+x^2} = Arctan\, x$$

hält dann auf der Stelle die Entwickelung

$$\int \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx = \frac{A_0}{1'} Arctan\, x + \frac{A_1}{2'} Arc^2 tan\, x$$

$$+ \frac{A_2}{3'} Arc^3 tan\, x + \ldots.$$

*

welche nach dem, was wir in §. 7. mitgetheilt haben, positiven x gilt, für welche $f(x)$ in eine Potenzenreihe sein würde. Die Koeffizientenbestimmung ist dieselbe Für $f(x) = e^{rx}$, wo r eine beliebige positive oder n bedeutet, ergiebt sich z. B. aus Nr. 90.

$$\int_o^x \frac{dx}{1+x^2} e^{rx} = \frac{Arctan\, x}{1'} + r\frac{Arc^2 tan\, x}{2'} + r^2\frac{Arc^3}{}$$

$$+ (2r + r^3)\frac{Arc^4 tan\, x}{4'} + (8r^2 + r$$

$$+ (16r + 20r^3 + r^5)\frac{Arc^6 tan\, x}{6'} +$$

ferner ganz ähnlich für $f(x) = cos\, rx$,

$$\int_o^x \frac{cos\, rx}{1+x^2} dx = \frac{Arctan\, x}{1'} - r^2\frac{Arc^3 tan\, x}{3'} + (r^4 - 8)$$

$$- (r^6 - 40r^4 + 136r^2)\frac{Arc^7 tan}{7'}$$

endlich für $f(x) = sin\, rx$,

$$\int_o^x \frac{sin\, rx}{1+x^2} dx = r\frac{Arc^2 tan\, x}{2'} - (r^3 - 2r)\frac{Arc^4 tan\, x}{4'}$$

$$+ (r^5 - 20r^3 + 16r)\frac{Arc^6 tan\, x}{6'}$$

Sämmtliche Formeln gelten für alle positiven x.

Man kann übrigens die Idee einer Integration mit Bürmann'schen Reihe noch in einer etwas anderen ofüber Form ausführen. Bleiben wir nämlich bei der Gleichung

91) $\int f(x)\varphi'(x)\, dx = C + \frac{A_0}{1'}[\varphi(x) - \varphi(a)] + \frac{A_1}{2'}[\varphi(x) - \varphi$

ul wenden auf die linke Seite die kekannte Formel der ntegration an, so geht dieselbe über in

$$f(x)\varphi(x) - \int f'(x)\,dx\,.\,\varphi(x)$$

nnan ferner berücksichtigt, dass $A_0 = f(a)$ ist, so wird

$$f(x)\varphi(x) - \int f'(x)\,\varphi(x)\,dx$$

$\iota)\varphi(x) - f(a)\varphi(a)$

$+\frac{A_1}{2'}[\varphi(x)-\varphi(a)]^2 + \frac{A_2}{3'}[\varphi(x)-\varphi(a)]^3 + \ldots$

piren wir das Glied $f(a)\varphi(x)$ und setzen die willkührliche $' = f(a)\varphi(x) - C'$; es ist dann

$$\varphi(x)\left\{f(x)-f(a)\right\} - \left\{\int f'(x)\,\varphi(x)\,dx - C'\right\}$$

$=\frac{1}{2'}[\varphi(x)-\varphi(a)]^2 + \frac{A_2}{3'}[\varphi(x)-\varphi(a)]^3 + \ldots$

i endlich

$$f(x) = \int F(x)\,dx, \quad \text{also } f'(x) = F(x)$$

ie der Definition des bestimmten Integrales

$$f(x) - f(a) = \int_a^x xF(x)\,dx$$

w endlich C' demjenigen Werthe gleichsetzen, welchen

$$\int f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int F(x)\,\varphi(x)\,dx$$

erhält, so gelangen wir zu der zweiten Entwickelungs-

92) $$\int_a^x F(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(x)\int_a^x F(x)\,dx$$

$$- \frac{A_1}{2'}[\varphi(x) - \varphi(a)]^2 - \frac{A_2}{3'}[\varphi(x) - \varphi$$

worin die Koeffizientenbestimmung nach der Formel ge

93) $$A_n = D^{n-1}\left\{\left(\frac{x-a}{\varphi(x)-\varphi(a)}\right)^n F(x)\right\}_{(x=}$$

Die Bedingungen für die Gültigkeit der Gleichung 92 auf ähnliche Weise wie bei der Bürmann'schen Reihe nur statt $f(x)$ zu sagen braucht $F(x)$, weil unmitte dass sich $F(x)$ unter denselben Bedingungen wie Potenzenreihe verwandeln lässt.

Für $\varphi(x) = x : (1 + x^2)$, $a = o$ erhält man z brauchbare unter der Bedingung $1 > x \geqq o$ geltend

94) $$\int_o^x \frac{x\,F(x)}{1+x^2}\,dx = \frac{x}{1+x^2}\int_o^x F(x)dx$$

$$- \frac{A_1}{2'}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2 - \frac{A_2}{3'}\left(\frac{x}{1+}\right.$$

und zur Koeffizientenbestimmung ist:

95) $$A_n = D^{n-1}\left\{(1+x^2)^n F(x)\right\}_{(x=o)}$$

$$= F^{(n-1)}(o) + (n-1)\,.\,n_1 F^{-3}$$

$$+ (n-1)(n-2)(n-3)\,.\,n_2$$

$$+ (n-1)(n-2)\ldots(n-5\,.\,n$$

Nach diesen Formeln würde es z. B. sehr leic Integrale

$$\int_o^x \frac{x\,dx}{1+x^2}\,e^{rx}, \quad \int_o^x \frac{x\cos rx}{1+x^2}\,dx, \quad \int_o^x \frac{x\sin rx}{1+x^2}\,dx$$

zu verwandeln, welche für positive ächt gebrochene x sind.

§. 11.

Die Umkehrung der Funktionen.

zwischen zwei Variabeln x und y eine Gleichung von $= \varphi(x)$ besteht, d. h. y als Funktion von x gegeben ss umgekehrt auch x als Funktion von y betrachtet nen und es zieht daher jede Gleichung der obigen zweite von der Form $x = \psi(y)$ nach sich. Diese der gegebenen Funktion $\varphi(x)$ lässt sich mittelst des en Theoremes leicht bewerkstelligen, indem man von

$$\frac{1}{1'} A_1 \varphi(x) + \frac{1}{2'} A_2 \varphi(x)^2 + \frac{1}{3'} A_3 \varphi(x)^3 + \ldots\ldots\ldots$$

$$A_n = D^{n-1}\left[\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^n\right]_{(x=a)}$$

he aus der Bürmann'schen Reihe für $f(x) = x$ folgen. jetzt $\varphi(x) = y$, so wird

$$= a + \frac{1}{1'} A_1 y + \frac{1}{2'} A_2 y^2 + \frac{1}{3'} A_3 y^3 + \ldots$$

x durch y ausgedrückt, also wegen $x = \psi(y)$

$$= a + \frac{1}{1'} A_1 y + \frac{1}{2'} A_2 y^2 + \frac{1}{3'} A_3 y^3 + \ldots$$

e Natur der umgekehrten Funktion mit Hülfe einer eihe bestimmt, deren Koeffizienten aus der Formel

für A_n abgeleitet werden können. Vorausgesetzt wird h
es einen Werth $x = a$ giebt, welcher $\varphi(x)$ zum V
bringt.

Um zu entscheiden, wie weit die Gleichung 97. o
hat man nur nöthig, das reelle oder imaginäre Maximu
zu bestimmen, also die Gleichung $\varphi'(x) = o$ aufzul
Wurzeln $x = \xi$ heissen mögen, und ferner die Wur
der zweiten Gleichung $\varphi(x) = mod\,\varphi(\xi)$ aufzusuchen; di
gilt dann von $x = a$ bis $x = b$ oder was Dassel
$y = o$ bis $y = mod\,\varphi(\xi)$, welche letztere Bestimmung
für die Formel 98., in der gar kein x mehr vorkommt,
wäre.

Aus der Bemerkung, dass x zwischen a und b (
ergiebt sich noch ein wichtiges Resultat. Da nämlich ei
Funktion mehrere Umkehrungen haben kann (aus $y =$
folgt z. B. $x = \pm\sqrt{1-y}$), so muss entschie
welche von diesen verschiedenen Umkehrungen durch d
dargestellt wird. Diess hat nach dem Obigen nicht
Schwierigkeit. Nehmen wir erst einmal an, es erlange
$y = \varphi(x)$ für $x = \xi$ ein reelles Maximum, so nimmt
$x = \xi$ hinaus einen Theil der Werthe wieder an, di
schon einmal gehabt hat, und es entsprechen jedem e
mindestens zwei x, von denen eines $< \xi$ das and
Andererseits wird jetzt $b = \xi$ und da in Nr. 97. x
a und b enthalten ist, so bekommt man durch die gem
nur dasjenige x welches $< b = \xi$ ist, d. h. ma
kleinste aller möglichen Umkehrungen. Entspräche di
$x = \xi$ einem reellen Minimum, so würde die Formel 7.
anwendbar sein, weil sie eine Zunahme von $y = \varphi(x$ vo
fände endlich weder ein reelles Maximum noch ein Min
so müsste die Funktion $y = \varphi(x)$ immer wachsen u
es überhaupt nur eine Umkehrung derselben, wenn si

et sie aber Unterbrechungen der Stetigkeit, so hört jede
ng nach dem Bürmann'schen Satze schon bei der ersten
Unterbrechung auf und die Formel 97. giebt daher auch
gen x, welche im ersten Intervalle der Kontinuität liegen,
noch andere x zu einem gegebenen y gehören sollten.
älle also liefern die Gleichungen 97. und 98. immer nur
aller möglichen Umkehrungen von $y = \varphi(x)$.

iese Bemerkungen durch ein Beispiel zu erläutern,
wir die Funktion

$$y = \frac{x}{\cos x}$$

ng $\varphi'(x) = o$ wird dann $x + \cot x = o$ und sie hat
iele reelle Wurzeln, welche der Reihe nach zwischen
und $x = \pi$, $x = \frac{3}{2}\pi$ und $x = 2\pi$ etc. liegen. Wollte
e erste dieser Wurzeln nehmen, so würde die Gleichung

$$= \frac{1}{1'} A_1 \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2'} A_2 \left(\frac{x}{\cos x}\right)^2 + \frac{1}{3'} A_3 \left(\frac{x}{\cos x}\right)^3 + \ldots$$

$= o$ bis zu einem über $\frac{1}{2}\pi$ hinausliegenden Werthe
ssen, was sich durch die einfache Bemerkung, dass
$= \frac{\pi}{2}$ diskontinuirlich wird, als unrichtig ausweist.
ein deutlicher Fingerzeig, dass kleinere Wurzeln der
$+ \cot x = o$ übersehen worden sind, und da dieselben
in können, so müssen sie imaginär sein. Und in der
man $x = zi$ setzt, so geht die Gleichung $x + \cot x$
ele über

$$\frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = o \text{ oder } z - 1 - \frac{2}{e^{2z} - 1} = o$$

besitzt eine reelle Wurzel zwischen 1 und 2, nämlich

$$z = 1{,}199678 \ldots .$$

Nennen wir dieselbe ξ, so ist jetzt $\xi = \xi i$ und die Gle
oder die folgende

101) $$x = \frac{1}{1'} A_1 y + \frac{1}{2'} A_2 y^2 + \frac{1}{3'} A_3 y^3 + \ldots$$

gilt von $y = o$ bis $y = mod\,\varphi(\xi) = mod\,\varphi(\xi i)$; mar
leicht

$$mod\,\varphi(\xi i) = mod\,\frac{\xi i}{cos\,(\xi i)} = \frac{2\xi}{e^{\xi} + e^{-\xi}} = 0{,}662$$

und folglich bleibt die Formel 101. von $y = 0$ bis $y =$
anwendbar.

Mit gleicher Leichtigkeit, wie aus der Gleichu
die Umkehrung $x = \psi(y)$ abgeleitet wurde, kann m
gegebene Funktion dieser Umkehrung, etwa $f(x) = f[\psi y$
Man hat zu diesem Zwecke nur nöthig, von den Fore

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1'} A_1 \varphi(x) + \frac{1}{2'} A_2 \varphi(x)^2 + \ldots$$

102) $$A_n = D^{n-1} \left\{ \left(\frac{x-a}{\varphi(x)} \right)^n f'(x) \right\}_{(x=o)}$$

auszugehen und wiederum $\varphi(x) = y$ zu setzen; es l

103) $$f(x) = f(a) + \frac{1}{1'} A_1 y + \frac{1}{2'} A_2 y^2 + \frac{1}{3'} \ldots y$$

oder

104) $$f[\psi(y)] = f(a) + \frac{1}{1'} A_1 y + \frac{1}{2'} A_2 y^2 + \ldots A$$

und damit ist das Problem gelöst. Die Bestimmung i
der Gültigkeit dieser Formeln geschieht ganz so v
würde zu berücksichtigen sein, dass durch eine Unr
Kontinuität, welche $f(x)$ innerhalb des vorhin ermitt
a bis b, etwa bei $x = \lambda$, erlitte, die Gültigkeitsgrä
bis $x = \lambda$ verengert werden. Ebenso wiederholt sich

t dem $\psi(y)$, welches die Gleichung 104. enthält, lediglich
r e aller möglichen Umkehrungen von $\varphi(x)$ zu verstehen ist.

w die Umkehrung der Funktionen nur eine einfache
lg der Bürmann'schen Formel, oder besser, eine kleine
ntion derselben unter verändertem Gesichtspunkte darstellt,
a h die von *Lagrange* gegebene Umkehrungsformel nicht
s ine etwas spezialisirte Darstellung von ihr bei veränderter
Die genannte Umkehrungsformel hat bekanntlich den
a einer Gleichung wie

$$y = x\chi(y) + a$$

u tion von x zu bestimmen, oder noch allgemeiner, etwa
r x auszudrücken. Vertauschen wir, um unmittelbar die
'he Reihe anwenden zu können, die Bezeichnung der
e so dass jetzt x ist, was bei *Lagrange* y heisst und
r so wäre aus der Gleichung

$$x = y\chi(x) + a$$

F) durch y ausgedrückt, zu entwickeln. Geben wir der
n Gleichung die Form

$$y = \frac{x - a}{\chi(x)}$$

n man auf der Stelle, dass die Aufgabe auf die vorige
n, wenn man $\frac{x-a}{\chi(x)}$ für $\varphi(x)$ setzt. Dabei verschwindet
Agemeinen für $x = a$ und wir haben daher

$$\text{'}(a) + \frac{1}{1'} A_1 \left(\frac{x-a}{\chi(x)}\right) + \frac{1}{2'} A_2 \left(\frac{x-a}{\chi(x)}\right)^2 + \ldots$$

$$A_n = D^{n-1} \left\{\chi(x)^n F'(x)\right\}_{(x=a)}$$

er der Gleichung 106.

108) $F(x) = F(a) + \frac{1}{1^2} A_1 y + \frac{1}{2^2} A_2 y^2 + \frac{1}{3^2} A_3$

Zur Bestimmung der Gültigkeitsgränzen ist die Auf
Gleichung $\varphi'(x) = o$, d. h.

$$\chi(x) = (x - a)\chi'(x)$$

erforderlich, deren kleinste Wurzel ξ heissen möge; die l
gilt dann von $y = 0$ bis $y = mod\varphi(\xi)$, d. h. von $y =$

$$y = mod \frac{\xi - a}{\chi(\xi)} = mod \frac{1}{\chi'(\xi)}$$

was mit der von *Cauchy* auf anderem Wege entwickelt
bestimmung völlig übereinstimmt.

Wenn man nach unseren hiermit beendigten Unt
über die Bürmann'sche Reihe zu dem Ausspruche be
dass dieselbe alle bisher bekannten nach Potenzen i
Hauptgrösse fortschreitenden Reihenentwickelungen al
Fälle in sich enthält, so wird man es nicht unpassend f
wir die Aufmerksamkeit der Analytiker wiederum au
verschollene Theorem hingeleitet und demselben ei
Erörterung gewidmet haben.

III.

Über approximative Quadraturen.

t'orie analytique des probabilités (Livre I., seconde partie,
l giebt *Laplace* eine Methode zur numerischen Berechnung
h h solcher bestimmter Integrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz$$

e die Funktion $f(z)$ sowohl für $z = \alpha$ als $z = \beta$
ct und innerhalb des Intervalles $z = \alpha$ bis $z = \beta$ nur
g Maximum oder Minimum erreicht, ohne diskontinuirlich
h ch zu werden, (geometrisch betrachtet, ist diess die
er mondförmigen Fläche, welche eine Kurve zwischen
i nderfolgenden Durchschnitten mit der Abscissenachse
r Methode besteht dem Wesentlichen nach in folgenden
e: Wenn die Funktion $f(z)$ für $z = \mu$, wo μ zwischen
l gt, ihr Maximum erreicht, so ist der Quotient $\frac{f(z)}{f(\mu)}$
s Intervalles $z = \alpha$ bis $z = \beta$ ein ächter Bruch,
s zur Null abnimmt, wenn man z entweder vorwärts von
d rückwärts von μ bis α gehen lässt; man kann daher
i end einer abnehmenden Funktion vergleichen, deren
o unbestimmt bleibt. *Laplace* setzt

$$\frac{f(z)}{f(\mu)} = e^{-y^2} \quad \text{oder} \quad f(z) = f(\mu)\,e^{-y^2}$$

und sieht nun y als die neue Variable der Integration noch dz durch dy auszudrücken ist. Denkt man sich die Gleichung nach z aufgelöst, so würde daraus etwa z $dz = \varphi'(y)\,dy$ folgen und das Integral in Nr. 1. folgende Form

$$f(\mu)\int e^{-y^2}\,\varphi'(y)\,dy$$

worin noch die für y geltenden Integrationsgränzen z sind. Aus Nr. 2. folgt aber für $z = \alpha$ und z $f(\alpha) = 0$ und $f(\beta) = 0$, dass an den Gränzen die (e

$$e^{-y^2} = 0$$

statt finden muss, woraus sich für y die Gränzwerth(y und $y = -\infty$ ergeben. Demnach wird

$$\int_\alpha^\beta f(z)\,dz = f(\mu)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\varphi'(y)\,dy$$

und hier lässt sich die Integration rechter Hand dadur dass man $\varphi'(y)$ in eine Reihe von der Form

$$C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + C_3 y^3 + \cdots$$

verwandelt; unter der doppelten Bemerkung, dass fi positives n

3) $$\int_{-\infty}^{\infty} y^{2n-1}\,e^{-y^2}\,dy = 0$$

4) $$\int_{-\infty}^{\infty} y^{2n} e^{-y^2}\,dy = \frac{1\,.\,2\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)}{2^n}\sqrt{}$$

findet man jetzt auf der Stelle

5) $$\int_\alpha^\beta f(z)\,dz = f(\mu)\sqrt{\pi}\left\{C_0 + \frac{1}{2}C_2 + \frac{1\,.\,3}{2^2}C_4 + \frac{3.}{2^3}\right.$$

r leicht bemerken, dass dieser Ableitung der Endformel, es allgemeine Schema der *Laplace*'schen Entwickelungen ne nicht unbedeutende stillschweigende Annahme zu gt; es wird nämlich vorausgesetzt, dass die für $\varphi'(y)$ ir Potenzenreihe für alle reellen y der Funktion $\varphi'(y)$ l, weil es ausserdem sehr zweierlei ist, ob man die zi formel $e^{-yy}\,\varphi'(y)\,dy$ oder die Reihe $e^{-yy}\,(C_0 + C_1 y$ a zwischen den Gränzen $y = -\infty$ bis $y = +\infty$ Diese Schwierigkeit hat *Laplace*, wie man aus der am s Kapitels befindlichen *remarque générale sur la convergence* s schliessen kann, zwar bemerkt aber nicht beseitigt, weil n ngen, unter denen eine Funktion mittelst einer Potenzen- g kehrt werden kann, zu jener Zeit noch unbekannt waren. n Untersuchungen der vorigen Abhandlung macht es keine i en Punkt zur vollständigen Klarheit zu bringen und wir ir im Folgenden eine neue Bearbeitung dieses Gegen- überhaupt, bei welcher wir jedoch die Auffassung so e ern, dass man den *Laplace*'schen Formeln beliebig e zur Seite stellen kann.

§. 1.

n eine Funktion $f(z)$ für $z = \mu$ ein positives Maximum, $= \nu$ ein negatives Minimum erreicht und von $z = \mu$ ν stetig verläuft, so muss sie innerhalb des genannten en Werth Null bekommen und es giebt also einen $= \beta$ zwischen μ und ν, für welchen $f(\beta) = 0$ wird. v zwischen μ und β noch ein Argument $z = \alpha$ ein, so $\mu < \alpha < \beta < \nu$ ist, so nimmt die Funktion $f(z)$ von s $= \beta$ fortwährend ab, und wenn wir uns vor der d ses Intervall beschränken, so ist $f(\alpha)$ der grösste und r kleinste vorkommende Werth der Funktion, ohne h (α) ein Maximum oder $f(\beta)$ ein Minimum wäre. Nach n kungen bildet in dem Integrale

6) $$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz$$

der Quotient $\frac{f(z)}{f(\alpha)}$ einen fortwährend abnehmenden Br
für $z = \alpha$ seinen grössten Werth 1 und für $z = \beta$ sei
Werth Null erreicht, und wir vergleichen daher jene
mit einer gleichfalls abnehmenden Funktion $F(y)$ inde

7) $$\frac{f(z)}{f(\alpha)} = F(y) \text{ oder } f(z) = f(\alpha)\,F(y)$$

setzen, Da uns die Wahl dieser Funktion vollkomm
so können wir sie unter der Form einer Potenzenrei
deren erstes Glied die Einheit ist, also etwa:

8) $$F(y) = 1 - L_1 y - L_2 y^2 - L_3 y^3 -$$

und es hat diese Annahme den Vortheil, dass dem Ve
der Werth $y = 0$ entspricht, wie man sogleich ei
wenn man die Gleichung 8. in die vorhergehende s
$z = \alpha$ setzt. Ist ferner $z = \beta$ geworden, so verwa
Gleichung 7. in $0 = F(y)$ und durch Auflösung diese
Gleichung findet man denjenigen Werth von y, etwa $y =$
dem Werthe $x = \beta$ entspricht. Wenn daher in d
y als neue Variable der Integration betrachtet wird, o
die Stelle der früheren Integrationsgränzen $x = \alpha$ u
neuen Gränzen $y = 0$ und $y = \eta$.

Um nun dz durch das Differenzial der neuer V
auszudrücken, könnte man sich des in der Einleitung be
Verfahrens bedienen, nämlich die Gleichung 7. na
und nachher differenziren; diess würde aber nur in ei
besonderen Fällen glücken. Die Funktion $f(z)$ nämli
als eine gegebene betrachten und können mithin nic
dass eine Gleichung wie $f(z) = u$ ohne weiteres na

ıfachen Fälle aber, in denen eine solche Umkehrung der
ı $f(z) = u$ leicht ausführbar wäre, sind gerade auch
ɐ bei welchen man die ganze Näherungsmethode selber
ɐhen wird, weil sich dann die Integration selbst gewöhnlich
nässt. Dagegen kann man die immer noch unbestimmte
$'(y)$ so wählen, dass sich eine Gleichung von der Form
leicht nach y auflösen lässt, und etwa giebt $y = E(q)$,
s unktionszeichen dient. Aus der Gleichung 7. folgt dann

$$y = E\left(\frac{f(z)}{f(\alpha)}\right)$$

a dz durch dy ausgedrückt zu erhalten, setzen wir

$$= 1_0 + \frac{1}{1'} A_1 E\left(\frac{f(\alpha + x)}{f(\alpha)}\right) + \frac{1}{2'} A_2 E\left(\frac{f(\alpha + x)}{f(\alpha)}\right)^2 + \ldots$$

s Anderes als die Anwendung des Bürmann'schen Satzes
$= E\left(\frac{f(\alpha + x)}{f(\alpha)}\right)$. Da wir schon wissen, dass für
$= 0$ wird, so folgt aus Nr. 9. für $z = \alpha$, $0 = E(1)$,
rgeht, dass die Funktion

$$\varphi(x) = E\left(\frac{f(\alpha + x)}{f(\alpha)}\right)$$

erschwindet. Die Bestimmung der Koeffizienten A in
geschieht daher mittelst der Formel 24. der vorigen
ür $a = 0$ und es ist daher:

$$A = 0, \quad A_n = D^{n-1}\left[\frac{x}{E\left(\frac{f(\alpha + x)}{f(\alpha)}\right)}\right]^n_{(x=0)}$$

ir n den Gleichungen 10. und 11. $x = z - \alpha$, so folgt

$$= \frac{1}{1'} A_1 E\left[\frac{f(z)}{f(\alpha)}\right] + \frac{1}{2'} A_2 E\left[\frac{f(z)}{f(\alpha)}\right]^2 + \ldots.$$

*

13) $$A_n = D^{n-1}\left(\frac{z-\alpha}{E\left[\frac{f(z)}{f(\alpha)}\right]}\right)^n_{(z=\alpha)}$$

und hier können wir wegen der Gleichung 9. auch sch

14) $$z - \alpha = \frac{1}{1'}A_1 y + \frac{1}{2'}A_2 y^2 + \frac{1}{3'}A_3 y^3 -$$

Es fragt sich nun noch, wie weit die Entwickelung 2 mit ihr identische 14. gültig bleibt. Diese Frage bea leicht durch folgende Bemerkungen. Vermöge der über $f($ Voraussetzungen nimmt diese Funktion ab von $z = \alpha$ also auch von $z = \alpha$ bis $z = \nu$, an welcher letztere ihr negatives Minimum erreicht; da ferner $F(y)$ eine Funktion bezeichnet, so nimmt y von Null an zu, wa α aus weiter schreitet und es erhält y sein Maximum, w Werth $z = \nu$ erreicht; daher ist auch

$$y = E\left[\frac{f(z)}{f(\alpha)}\right]$$

eine zunehmende Funktion, welche sich bei $z = \alpha$ n bei $z = \nu$ ihren Maximalwerth erhält, wie man auch a aus dem Differenzialquotienten von E ersehen kann. Z Bedingungen, welche wir über die Gültigkeit der Ent Reihe aufgestellt haben, besteht nun die Gleichung 1 v bis $z = \nu$ also, weil $\beta < \nu$, um so gewisser von $z =$ Dasselbe gilt von der Gleichung 14., bei welcher nur ge werden möge, dass dem Intervalle $z = \alpha$ bis $z = \beta$ las $y = 0$ bis $y = \eta$ entspricht. Durch Differenziation der lei wird nun für $\eta \geqq y \geqq 0$

15) $$dz = (A_1 + \frac{1}{1'}A_2 y + \frac{1}{2'}A_3 y^2 + \ldots)y$$

womit die Aufgabe gelöst ist dz durch dy auszudrücken. Su

li die Werthe von $f(z)$ und dz in das ursprüngliche
ɔ ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz$$

$$\int_{o}^{\eta} F(y)\left\{A_1 + \frac{1}{1'}A_2 y + \frac{1}{2'}A_3 y^2 + \ldots\right\} dy$$

leibt immer richtig, weil die Substitution 15. für alle
n Integrationszeichen 0 befindlichen y gültig ist. Hat
y) so gewählt, dass sich die Integration

$$\int_{o}^{\eta} F(y)\,y^m\,dy$$

sitive m ausführen lässt, so erhält man aus Nr. 16.
tion der einzelnen Summanden eine Reihe, in welcher
ten A nach Nr. 11. oder Nr. 13. zu bestimmen sind.

führung dieser allgemeinen Ideen wollen wir an einigen
en der willkührlichen Funktion $F(y)$ zeigen.

uerst $F(y) = 1 - y$ also

$$\frac{f(z)}{f(\alpha)} = 1 - y \text{ oder } f(z) = f(\alpha)\,(1 - y)$$

ehrt

$$y = 1 - \frac{f(z)}{f(\alpha)}$$

gemachten Voraussetzungen $f(\alpha)$ der grösste Werth
$f(z)$ während des Intervalles $z = \alpha$ bis $z = \nu$
a ferner $f(\beta) = 0$ ist, so entspricht dem Intervalle
$= \beta$ das neue Intervall $y = 0$ bis $y = 1$. Setzen

19) $$x = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \left\{1 - \frac{f(\alpha + x)}{f(\alpha)}\right\}$$
$$+ \frac{1}{2'} A_2 \left\{1 - \frac{f(\alpha + x)}{f(\alpha)}\right.$$

worin dem Bürmann'schen Satze zufolge

20) $$A_0 = 0, \quad A_n = D^{n-1} \left\{\frac{x}{\left\{1 - \frac{f(\alpha + x)}{f(\alpha)}\right\}}\right\}^n \quad (x =$$

ist, so gilt die Reihe 19. von $x = 0$ an bis dahin, wo
sein Maximum erreicht, d. h. bis $x = \nu - \alpha$, w
Falle der Subtrahendus $\frac{f(\alpha + x)}{f(\alpha)}$ sein Minimum $\frac{f)}{f)}$
Für $x = z - \alpha$ folgt aus Nr. 19., dass die Reihe

$$z - \alpha = \frac{1}{1'} A_1 \left\{1 - \frac{f(z)}{f(\alpha)}\right\} + \frac{1}{2'} A_2 \left\{1 - \frac{f(z)}{f(\alpha)}\right\}^2 +$$
$$= \frac{1}{1'} A_1 y + \frac{1}{2'} A_2 y^2 + \frac{1}{3'} A_3 y^3 + \ldots$$

von $z = \alpha$ bis $z = \nu$ also um so mehr von $z =$
d. h. von $y = 0$ bis $y = 1$ richtig bleibt. Dasselbe
Differenzialquotienten:

21) $$dz = (A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \ldots$$

und vermöge der Gleichungen 17. und 21. ist nun

$$\int_\alpha^\beta f(z)\, dz$$
$$= f(\alpha) \int_0^1 (1 - y) \left\{A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \cdot\right.$$

und durch Ausführung der einzelnen Integrationen

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz = f(\alpha)\left\{\frac{A_1}{2'} + \frac{A_2}{3'} + \frac{A_3}{4'} + \ldots\right\}$$

e Coeffizienten A nach der Formel 20. zu bestimmen sind.

ehmen wir $F(y) = e^{-y}$ also

$$\frac{f(z)}{f(\alpha)} = e^{-y} \text{ oder } y = lf(\alpha) - lf(z)$$

t, von $z = \alpha$ bis $z = \nu$, wo $f(z)$ sein Minimum erreicht
i elung

$$+ \frac{1}{1'} A_1 [lf(\alpha) - lf(\alpha + x)] + \frac{1}{2'} A_2 [lf(\alpha) - lf(\alpha + x)] + \ldots.$$

$= 0$, wo $lf(\alpha) - lf(\alpha + x)$ verschwindet, bis $x = \nu - \alpha$
$- lf(\alpha + x)$ sein Maximum erreicht und es ist dabei

$$= 0, \quad A_n = D^{n-1}\left[\frac{x}{lf(\alpha) - lf(\alpha + x)}\right]^n_{(x=0)}$$

$x = z$ folgt daraus, dass die Gleichung

$$= \frac{1}{1'} A_1 [lf(\alpha) - lf(z)] + \frac{1}{2'} A_2 [lf(\alpha) - lf(z)]^2 + \ldots$$

$$= \frac{1}{1'} A_1 y + \frac{1}{2'} A_2 y^2 + \frac{1}{3'} A_3 y^3 + \ldots\ldots$$

b $z = \nu$, also um so mehr von $z = \alpha$ bis $z = \beta < \nu$
n ntervalle die Gränzen $y = 0$ und $y = \infty$ entsprechen.
r on $y = 0$ bis $y = \infty$

$$lz = (A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \ldots)\,dy$$

Su stitution der für $f(z)$ und dz gleichgeltenden Werthe

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz$$

$$= f(\alpha)\int_{o}^{\infty} e^{-y}\left\{A_1 + \frac{1}{1'}A_2 y + \frac{1}{2'}A_3 y^2 + \right.$$

d. i. durch Ausführung der einzelnen Integrationen

26) $$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz = f(\alpha)\left\{A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\right.$$

worin die Koeffizienten nach der Formel 24. bestı müssen.

§. 2.

Die Entwickelungen des vorigen Paragraphen h sehr wesentliche Modifikation in dem Falle, wo μ c sondern gleich α ist, so dass also im Anfange de Ir intervalles $\alpha = \mu$ bis β die Funktion $f(z)$ ihr Maxiu Wollte man nämlich in dem nunmehrigen Integrale

27) $$\int_{\mu}^{\beta} f(z)\,dz$$

analog der Gleichung 7. die Substitution $f(z) = f(\mu)F($ so würde daraus folgen

28) $f'(z)\,dz = f(\mu)\,F'(y)\,dy$ oder $dz = \frac{f(\mu)F'y)}{f'(z}$

und da $f'(z)$ gleich im Anfange für $z = \mu$ verschwi et sich das Differenzial von z in diesem Falle unter d F stellen. In der That werden hier auch sämmtlhe bezeichnete Koeffizienten unendlich, wie wir kurz : d derselben zeigen wollen. Nach Formel 11. wäre nälich

$$A_1 = \frac{x}{E\left[\frac{f(\mu+x)}{f(\mu)}\right]} \text{ für } x = 0$$

hdem Taylor'schen Theoreme, welches hier wenigstens lhe kleine x anwendbar sein muss

$$= \frac{x}{E\left[1 + \frac{f'(\mu)}{f(\mu)}x + \frac{1}{2}\frac{f''(\mu)}{f(\mu)}x^2 + \ldots\right]}, \quad x = 0$$

$$= \frac{x}{E\left[1 + \frac{1}{2}\frac{f''(\mu)}{f(\mu)}x^2 + \ldots\right]}, \quad x = 0$$

$= 0$ ist. Berücksichtigen wir weiter, dass ebenfalls e Theoremes von *Taylor*, wenigstens innerhalb eines tvalles

$$1 \cdot q) = E(1) + E'(1)q + \frac{1}{2}E''(1)q^2 + \ldots$$

o haben wir wegen $E(1) = 1$,

$$\frac{x}{'(1)\left\{\frac{1}{2}\frac{f''(\mu)}{f(\mu)}x^2 + \ldots\right\} + \ldots\ldots}, \quad x = 0$$

$= \frac{1}{0}$, so dass also in diesem Falle die ganze Reihen-

g mendlich wird. Diesem Uebelstande kann man leicht ee gehen; erinnert man sich, dass dem Anfangswerthe u der Werth $y = 0$ entspricht, so folgt aus 28. für $= 0$, $0 = f(\mu)F'(o)dy$ d. h. $F'(o) = 0$; wenn in $F(y)$ die Form 8. beibehalten will, so muss jetzt ir also

$$F(y) = 1 - L_2 y^2 - L_3 y^3 - \ldots$$

h zu ein Paar Beispiele.

I. Die einfachste Supposition, welche über die Funktion $F(y)$ gemacht werden kann, wenn sie Form 29 genügen soll, ist offenbar $F(y) = 1 - y^2$ also in dem Integrale 27.

30) $$\frac{f(z)}{f(\mu)} = 1 - y^2$$

so folgt umgekehrt

31) $$y = \sqrt{1 - \frac{f(z)}{f(\mu)}}$$

Dem Werthe $z = \mu$ entspricht $y = 0$ und dem Wr $y = 1$, weil $f(\beta)$ verschwindet; es sind also $y =$ die für y geltenden Integrationsgränzen. Um nun auszudrücken, entwickeln wir erst wie folgt:

32) $$x = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \sqrt{1 - \frac{f(\mu + x)}{f(\mu)}} + \frac{1}{2'} A_2 \sqrt{1 - \frac{f(\mu +}{f(\mu}}$$

Darin bestimmen sich die Koeffizienten A mittelst le $x = 0$, weil dann die Grössen rechter Hand versch

33) $$A_0 = 0, \quad A_n = D^{n-1} \left\{ \left(\frac{x}{\sqrt{1 - \frac{f(\mu + x)}{f(\mu)}}} \right) \right.$$

Weil nun die Funktion

$$\sqrt{1 - \frac{f(\mu + x)}{f(\mu)}}$$

von $x = 0$ an, wo sie sich annullirt, bis $z = \beta -$ ihr Maximum erreicht, fortwährend wächst, so gilt die Entwic von $x = 0$ bis $x = \beta - \mu$; für $x = z - \mu$ folgt da die Gleichung

$$= \frac{1}{1'} A_1 \sqrt{1 - \frac{f(z)}{f(\mu)}} + \frac{1}{2'} A_2 \sqrt{1 - \frac{f(z)}{f(\mu)}}^2 + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{1'} A_1 y + \frac{1}{2'} A_2 y^2 + \frac{1}{3'} A_3 y^3 + \ldots\ldots$$

bis $z = \beta$, d. h. von $y = 0$ bis $y = 1$ richtig bleibt. lt jetzt von der Entwickelung

$$= (A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \ldots\ldots) \, dy$$

gende auch innerhalb des Integrationsintervalles $y = 0$ gebrauchen. Durch Substitution der Gleichungen 30. n 27. wird jetzt

$$\int_{\mu}^{\beta} f(z) \, dz$$

$$\mu \int_{0}^{1} (1 - y^2) \, (A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \ldots) \, dy$$

usführung der einzelnen Integrationen

$$\int^{3} f(z) \, dz = 2 f(\mu) \left\{ \frac{A_1}{1'.3} + \frac{A_2}{2'.4} + \frac{A_3}{3'.5} + \ldots \right\}$$

Koeffizienten A nach der Formel 33. zu bestimmen sind.

Die zweite der für $F(y)$ aufgestellten Bedingungen Annahme wäre $F(y) = e^{-yy}$ also

$$f(z) = f(\mu) e^{-yy}$$

gekehrt folgt

$$y = \sqrt{l f(\mu) - l f(z)}$$

ts rechen den Gränzen $z = \mu$, $z = \beta$ die für y geltenden $= 0$, $y = \infty$. Um nun dz durch dy auszudrücken, zunächst

*

38) $x = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \sqrt{lf(\mu) - lf(\mu + x)}$

$$+ \frac{1}{2'} A_2 \sqrt{lf(\mu) - lf(\mu +$$

worin die Koeffizienten nach der Formel bestimmt we

39) $A_0 = 0,\ A_n = D^{n-1} \left\{ \left[\frac{x}{\sqrt{lf(\mu) - lf(\mu + x)}} \right.\right.$

Es gilt dann die Entwickelung 38. von $x = 0$ bis
weil im ersten Falle die Funktion $\sqrt{lf(\mu) - lf(\mu + x)}$
und im zweiten ihr reelles Maximum erreicht. Für
wird nun innerhalb der Gränzen $z = \mu$ bis $z = \beta$,
bis $y = \infty$

$$z - \mu = \frac{1}{1'} A_1 \sqrt{lf(\mu) - lf(z)} + \frac{1}{2'} A_2 \sqrt{lf(\mu) -$$

$$= \frac{1}{1'} A_1 y + \frac{1}{2'} A_2 y^2 + \frac{1}{3'} A_3 y^3 +$$

folglich

40) $dz = (A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \ldots$

Durch Substitution von 36. und 40. in Nr. 27. folgt

$$\int_{\mu}^{\beta} f(z)\, dz$$

$$= f(\mu) \int_{\mu}^{\infty} e^{-yy} (A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 +$$

Hier lassen sich sämmtliche Integrationen ausführen
sich an die bekannten Formeln

$$\int_o^\infty y^{2n} e^{-yy}\, dy = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_o^\infty y^{2n+1} e^{-yy}\, dy = \frac{1}{2} \int_o^\infty t^n e^{-t}\, dt = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{2}$$

man erhält daher durch Sonderung der Glieder vom ungeraden Index

$$\int_\mu^\beta f(z)\, dz$$

$$(\mu) \left\{ A_1 + \frac{A_3}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{A_5}{2.4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{A_7}{2.4.6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots \right\}$$

$$A_2 + \frac{A_4}{3}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{A_6}{3.5}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{A_8}{3.5.7}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots \Big\}$$

effizientenbestimmung nach der Formel 39. geschieht. piel für diese Formel zu haben, sei

$$f(z) = (1 - z^2)^{s-\frac{1}{2}}$$

ine ganze positive Zahl, ferner $\mu = 0$ und $\beta = 1$, Bedingungen erfüllt sind, dass $f(\mu)$ ein Maximum sei chwinde. Der Werth des zu berechnenden Integrales ittelbar bekannt, nämlich

$$\int_0^1 (1 - z^2)^{s-\frac{1}{2}}\, dz = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2s-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2s)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{(s+1)\,(s+2)\,(s+3) \ldots (2s)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots s} \cdot \frac{\pi}{2^{2s+1}} = (2s)_s \frac{\pi}{2^{2s+1}}$$

von dem mittelsten Binomialkoeffizienten des Andererseits hat man nach Formel 39.

$$A_n = D^{n-1}\left\{\left(\frac{x}{\sqrt{-(s-\frac{1}{2})\,l(1-x^2)}}\right)^n\right\}_{(x=}$$

$$= \frac{1}{(s-\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}n}}\; D^{n-1}\left\{(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{4}x^6\right.$$

für $x = 0$

und hieraus geht hervor, dass A_n für jedes gerade n e
und mithin in Nr. 41. nur die erste Reihe rechter
bleibt. Nehmen wir $n = 2k + 1$, wo k eine be
positive Zahl ist und setzen ferner den rein numeri
von

43) $$D^{2k}\left\{(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{4}x^6+\ldots)^{-(k+\frac{1}{2})}\right\}_{(x=0)}$$

so ist

$$A_{2k+1} = \frac{P_{2k}}{(s-\frac{1}{2})^{k+\frac{1}{2}}} = \frac{P_{2k}}{(s-\frac{1}{2})^k\sqrt{s-}}=$$

und man findet nun aus der Formel 41.

$$\int_0^1 (1-z^2)^{s-\frac{1}{2}}\,dz$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s-\frac{1}{2}}}\left\{P_0 + \frac{P_2}{2.(2s-1)} + \frac{P_4}{2.4.(2s-}\right.^2$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\,\sqrt{2s-1}}\left\{P_0 + \frac{P_2}{2.(2s-1)} + \frac{P_4}{2.4.(2s-)^2}\right.$$

Vergleichung mit dem schon bekannten Werthe des (42) ergiebt sich jetzt

$$\frac{(2s)_s}{2^{2s}} =$$

$$\frac{}{-1)\pi}\left\{P_0 + \frac{P_2}{2.(2s-1)} + \frac{P_4}{2.4.(2s-1)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{P_6}{2.4.6.(2s-1)^3} + \ldots\ldots\right\}$$

tellt die linke Seite das Verhältniss des mittelsten Entwickelung $(1+1)^{2s}$ zur ganzen Entwickelung dar. ieses Resultat direkt verifiziren, weil sich die Gleichung

$$(1-z^2)^{s-1/2} = e^{-yy}$$

n Beziehung auf z auflösen lässt; für $\frac{1}{s-\frac{1}{2}} = \alpha$ ist

$$=\sqrt{(1-e^{-\alpha y^2})}$$

$$=\sqrt{\alpha}.y\sqrt{1-\frac{1}{2}\alpha y^2+\frac{1}{6}\alpha^2 y^4-\ldots.}$$

is sich das Radikal, dem Binomischen Satze zufolge, a Potenzen von y fortschreitende Reihe verwandeln, u ruck

$$-\frac{1}{6}\alpha^2 y^4+\frac{1}{24}\alpha^3 y^6-\ldots=\frac{1-e^{-\alpha y^2}}{\alpha y^2}$$

inheit überschreitet, wenn y das Intervall 0 bis ∞ m aber die Koeffizienten jener Entwickelung rasch e setzen wir mit *Laplace*

46) $$z = \sqrt{(1 - e^{-\alpha y^2})}$$

$$= \sqrt{\alpha} \cdot y(Q_0 + Q_2 \alpha y^2 + Q_4 \alpha^2 y^4 + Q^6 \alpha^3 y^6 -$$

nehmen beiderseits die Logarithmen und differenziren
auf y; es ergiebt sich so

$$\frac{\alpha y e^{-\alpha y^2}}{1 - e^{-\alpha y^2}} = \frac{Q_0 + 3 Q_2 \alpha y^2 + 5 Q_4 \alpha^2 y^4 +}{Q_0 y + Q_2 \alpha y^3 + Q_4 \alpha^2 y^5 +}$$

Hier kann man statt der auf der linken Seite v
Exponenzialgrösse die bekannte Reihe substituiren, n
Seiten auf gleichen Nenner bringen und zuletzt die
gleicher Potenzen von y vergleichen. Die Ausfü
leichten Rechnung führt zu der Rekursionsformel:

47) $$0 = 2k \cdot Q_{2k} - \frac{2k-3}{1.2} Q_{2k-2} + \frac{2k-6}{1.2.3} Q$$

$$- \frac{2k-9}{1.2.3.4} Q_{2k-6} + \frac{2k-12}{1.2.3.4.5} Q_{2k}$$

während $Q_0 = 1$ ist. Für $k = 1, 2, 3, \ldots$ lassen
der Reihe nach die Werthe von Q_2, Q_4, Q_6 etc
man findet so ohne Mühe:

$$Q_0 = 1, \quad Q_2 = -\frac{1}{4}, \quad Q_4 = +\frac{5}{96}, \quad Q_6 = -$$

Nachdem auf diese Weise die Werthe der mit Q
Koeffizienten bekannt sind, ergiebt sich aus Nr. 46.

$$dz = \sqrt{\alpha}(Q_0 + 3 Q_2 \alpha y^2 + 5 Q_4 \alpha^2 y^4 + \ldots) d$$

Vermöge dieser Gleichung und der unter Nr. 45. auf

$$\int_o^1 (1 - z^2)^{s-\frac{1}{2}}\, dz$$

$$\alpha \int_o^\infty e^{-yy} (Q_0 + 3\, Q_2 \alpha y^2 + 5\, Q_4 \alpha^2 y^4 + \ldots)\, dy$$

ührung der beiderseitigen Integrationen wird

$$\frac{(2s)_s}{2^{2s}}$$

$$\frac{\alpha}{\pi} \left\{ Q_0 + \frac{1.3}{2} Q_2 \alpha + \frac{1.3.5}{2^2} Q_4 \alpha^2 + \ldots\ldots \right\}$$

h Restitution des Werthes von α

$$\frac{(2s)_s}{2^{2s}}$$

$$\frac{2}{s-1)\pi} \left\{ Q_0 + \frac{1.3.Q_2}{2s-1} + \frac{1.3.5.Q_4}{(2s-1)^2} + \ldots. \right\}$$

unter Nr. 44. verzeichneten Gleichung identisch ist, h Vergleichung der beiderseitigen Reihenkoeffizienten

§. 3.

chten endlich den Fall, in welchem das Integral von en zwei Gränzen α und β genommen wird, an denen $f(z)$ verschwindet und zwischen welchen sie ein mum für $z = \mu$ erreicht. Es liegt übrigens keine in der Annahme, dass $f(\mu)$ ein Maximum sei, denn Minimum wäre, würde die Funktion $f(z)$ von $z = \alpha$ ativ sein und man könnte daher diesen Fall auf den en, indem man

$$\int_\alpha^\beta f(z)\, dz = -\int_\alpha^\beta [-f(z)]\, dz$$

setzte. Zerlegen wir das Integrationsintervall α bis β in
Theile α bis μ und μ bis β, so ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\mu} f(z)\,dz + \int_{\mu}^{\beta} f(z)\,dz$$

und hier setzen wir in dem ersten Integrale $z =$
zweiten $z = \mu + x$, wo x jedesmal eine neue Variable
es wird dann

$$\textbf{49)} \qquad \int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz = \int_{o}^{\mu-\alpha} f(\mu - x)\,dx + \int_{o}^{\beta-\mu} f(\mu +$$

Die beiden Integrale rechter Hand sind ganz von der
welche wir im vorigen Paragraphen betrachtet haben.
$f(\mu - z)$ erreicht nämlich für $x = 0$ ihr Maximum $f(\mu$
beständig ab, während x das Intervall $x = 0$ bis
durchläuft, bis sie für $x = \mu - \alpha$ verschwindet; ebe
zweiten Integrale $f(\mu + x)$ zu einem Maximum für x
ab von $x = 0$ bis $x = \beta - \mu$ und annullirt sich für
Es sind daher auf jedes der genannten Integrale die Trafo
anwendbar, welche wir im vorigen Paragraphen gezeig

I. Es sei nun zunächst wie vorhin $F(y) = 1 - y$
folgende Entwickelungen vorgenommen werden. Es s

$$\textbf{50)} \quad x = \dot{A}_0 + \frac{1}{1'}\dot{A}_1\sqrt{1 - \frac{f(\mu - x)}{f(\mu)}}$$

$$+ \frac{1}{2'}\dot{A}_2\sqrt{1 - \frac{f(\mu - x}{f(\mu)}}$$

so bestimmen sich die Koeffizienten, weil die Funkt
Hand für $x = 0$ verschwindet, mittelst der Formeln

$$\textbf{51)} \quad \dot{A}_0 = 0,\ \dot{A}_n = D^{n-1}\left\{\left(\frac{x}{\sqrt{1 - \frac{f(\mu - x)}{f(\mu)}}}\right)^n \right.$$

gt die Gleichung 37. von $x = 0$ bis $x = \mu - \alpha$. Für
$= z$ folgt daraus, dass die Entwickelung

$$= \frac{1}{1'} \grave{A}_1 \sqrt{1 - \frac{f(z)}{f(\mu)}} + \frac{1}{2'} \grave{A}_2 \sqrt{1 - \frac{f(z)}{f(\mu)}}^2 + \ldots\ldots\ldots$$

bis $z = \alpha$ Gültigkeit besitzt; nehmen wir noch

$$\sqrt{1 - \frac{f(z)}{f(\mu)}} = y \text{ oder } f(z) = f(\mu)\,(1 - y^2)$$

ı jetzt die Gleichungen

$$z = \frac{1}{1'} \grave{A}_1 y + \frac{1}{2'} \grave{A}_2 y^2 + \frac{1}{3'} \grave{A}_3 y^3 + \ldots$$

$$= -\left(\grave{A}_1 + \frac{1}{1'} \grave{A}_2 y + \frac{1}{2'} \grave{A}_3 y^2 + \ldots\ldots\right) dy$$

$z = \mu$ bis $z = \alpha$, d. h. von $y = 0$ bis $y = -1$
iss es hier $y = -1$ heissen und nicht $+1$, weil
zufolge der Gleichung 52. abnimmt, wenn man z von
n lässt, und mithin die bei Null anfangende Abnahme
s Gebiet des Negativen führen muss. Nach den für
gemachten innerhalb der Gränzen $z = \mu$ bis $z = \alpha$
bis $y = -1$ geltenden Substitutionen ist nun:

$$\int_{\alpha}^{\mu} f(z)\,dz$$

$$\int_{-1}^{o} (1 - y^2)\left(\grave{A}_1 + \frac{1}{1'} \grave{A}_2 y + \frac{1}{2'} \grave{A}_3 y^2 + \ldots\ldots\right) dy$$

er Hand nicht weiter ausführen wollen.

*

Auf ganz ähnliche Weise erhellt, dass die Gleich

$$x = A_0 + \frac{1}{1'} A_1 \sqrt{1 - \frac{f(\mu + x)}{f(\mu)}} + \frac{1}{2'} A_2 \sqrt{1 - \frac{f(}{}}$$

worin die Koeffizienten nach den Formeln

55) $$A_0 = 0, \quad A_n = D^{n-1} \left(\left[\frac{x}{\sqrt{1 - \frac{f(\mu + x)}{f(\mu)}}} \right]$$

zu bestimmen sind, von $x = 0$ bis $x = \beta - \mu$ g
mithin die folgende

$$z - \mu = \frac{1}{1'} A_1 \sqrt{1 - \frac{f(z)}{f(\mu)}} + \frac{1}{2'} A_2 \sqrt{1 - \frac{f(z)}{f(\mu)}}^2 +$$

für alle z von $z = \mu$ bis $z = \beta$ richtig bleibt. Nehm

56) $$\sqrt{1 - \frac{f(z)}{f(\mu)}} = y, \quad \text{oder} \quad f(z) = f(\mu)(1 - y^2$$

so gelten jetzt die Gleichungen

$$z - \mu = \frac{1}{1'} A_1 y + \frac{1}{2'} A_2 y^2 + \frac{1}{3'} A_3 y^3 +$$

und

57) $$dz = (A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \ldots) y$$

ebenfalls von $z = \mu$ bis $z = \beta$, d. h. von $y = 0$ bi y
Nach den Substitutionen 56. und 57. ist nun

58) $$\int_{\mu}^{\beta} f(z)\, dz$$

$$= f(\mu) \int_{0}^{1} (1 - y^2)\, (A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 +$$

dition der Gleichungen 41. und 45. würde man zu einer he für das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz$$

r die sich aber leicht vermeiden lässt, wenn man die n A_n und A_n vergleicht. Durch Einführung einer neuen $x' = -x$ erkennt man nämlich sehr leicht, dass $-A_n$ ist und mithin statt der Gleichung 41. die folgende eh werden kann:

$$\int_{\alpha}^{\mu} f(z)\,dz$$

$$= \int_{-1}^{0} (1-y^2)\,(A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \ldots)\,dy$$

an diese Gleichung mit der vorhergehenden, so ergiebt eh

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz$$

$$= \int_{-1}^{+1} (1-y^2)\,(A_1 + \frac{1}{1'} A_2 y + \frac{1}{2'} A_3 y^2 + \ldots)\,dy$$

h Ausführung der einzelnen Integrationen, wobei alle rschwinden, in denen ungerade Potenzen von y n

$$\int (z)\,dz = 4 f(\mu) \left\{ \frac{A_1}{1'.3} + \frac{A_3}{3'.5} + \frac{A_5}{5'.7} + \ldots \right\}$$

Ganz analog sind die Entwickelungen für den Fall . Zunächst erhellt nämlich sehr leicht, dass die

60) $$x = \grave{A}_0 + \frac{1}{1'}\grave{A}_1\sqrt{lf(\mu) - lf(\mu - x)}$$
$$+ \frac{1}{2'}\grave{A}_2\sqrt{lf(\mu) - lf(\mu -$$

von $x = 0$ bis $x = \mu - \alpha$ gilt, weil die Funktion $\sqrt{lf(\mu)}$
für $x = 0$ verschwindet und von da ab wächst,
$x = \mu - \alpha$ ihr reelles Maximum erreicht. Die K
bestimmung geschieht daher mittelst der Formeln

61) $$\grave{A} = 0, \quad \grave{A} = D^{n-1}\left\{\left(\frac{x}{\sqrt{lf(\mu) - lf(\mu - x}}\right.\right.$$

Es folgt weiter für $\mu - x = z$, dass die Reihe

$$\mu - z = \frac{1}{1'}\grave{A}_1\sqrt{lf(\mu) - lf(z)} + \frac{1}{2'}A_2\sqrt{lf(\mu) - f}$$

von $z = \mu$ bis $z = \alpha$ richtig bleibt und dass ferner,

62) $$\sqrt{lf(\mu) - lf(z)} = y \text{ oder } f(z) = f(\mu)e^{y}$$

gesetzt wird, die Gleichungen

$$\mu - z = \frac{1}{1'}\grave{A}_1 y + \frac{1}{2'}\grave{A}_2 y^2 + \frac{1}{3'}\grave{A}_3 y^3 +$$

und

63) $$dz = -\left(\grave{A}_1 + \frac{1}{1'}\grave{A}_2 y + \frac{1}{2'}\grave{A}_3 y^2 + \right.$$

ebenfalls von $z = \mu$ bis $z = \alpha$, d. h. von $y = 0$ b
richtig bleiben. Nach diesen Bemerkungen wird

64) $$\int_{\alpha}^{\mu} f(z)\,dz$$
$$= -f(\mu)\int_{-\infty}^{o} e^{-yy}\left(\grave{A}_1 + \frac{1}{1'}\grave{A}_2 y + \frac{1}{2'}\grave{A}_3 y^2\right.$$

ilerholen wir ganz ähnliche Schlüsse in Beziehung auf
il

$$l(+\frac{1}{1'}A_1\sqrt{lf(\mu)-lf(\mu+x)}$$

$$+\frac{1}{2'}A_2\sqrt{lf(\mu)-lf(\mu+x)}^2+\ldots\ldots$$

t ich, dass sie von $x=0$ bis $x=\beta-\mu$ gilt, wobei
ienten A nach den Formeln

$$=0,\ A_n=D^{n-1}\left\{\left(\frac{x}{\sqrt{lf(\mu)-lf(\mu+x)}}\right)^n\right\}_{(x=0)}$$

werden müssen. Für $\mu+x=z$ folgt weiter die
ler Reihe

$$=\frac{1}{1'}A_1\sqrt{lf(\mu)-lf(z)}+\frac{1}{2'}A_2\sqrt{lf(\mu)-lf(z)}^2+\ldots$$

er Gränzen $z=\mu$ bis $z=\beta$. Nehmen wir weiter

$$\sqrt{lf(\mu)-lf(z)}=y,\ \text{also}\ f(z)=f(\mu)e^{-yy}$$

n lie neuen Gleichungen

$$\mu=\frac{1}{1'}A_1y+\frac{1}{2'}A_2y^2+\frac{1}{3'}A_3y^3+\ldots.$$

$$z=(A_1+\frac{1}{1'}A_2y+\frac{1}{2'}A_3y^2+\ldots)\,dy$$

μ bis $z=\beta$, d. h. von $y=0$ bis $y=+\infty$ richtig
a n daher vermöge der Substitutionen 66. und 67.

$$\int_{\mu}^{\beta}f(z)\,dz$$

$$(\mu\int_{0}^{\infty}e^{-yy}(A_1+\frac{1}{1'}A_2y+\frac{1}{2'}A_3y^2+\ldots.)\,dy$$

Die Vereinigung der Gleichungen 64. und 68. würd
Doppelreihe für das zwischen den Gränzen α und β
Integral von $f(z)\,dz$ resultiren. Zufolge der Bem
$A_n = -A_n$ ist, welche man leicht durch die Substituti
verifiziren wird, kann man aber statt der Gleichung 64.
schreiben

$$\int_{\alpha}^{\mu} f(z)\,dz$$

$$= f(\mu)\int_{-\infty}^{o} e^{-yy}\left(A_1 + \frac{1}{1'}A_2 y + \frac{1}{2'}A_3 y^2 + \ldots\right.$$

aus deren Vereinigung mit Nr. 68. die nachstehende

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz$$

$$= f(\mu)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-yy}\left(A_1 + \frac{1}{1'}A_2 y + \frac{1}{2'}A_3 y^2 + \ldots\right.$$

Bei Ausführung der einzelnen Integrationen verschwinde
welche ungerade Potenzen von y enthalten und es bl

69) $$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz = \sqrt{\pi}\, f(\mu)\left\{A_1 + \frac{A_3}{1'}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{A_5}{2'}\right.$$

wobei das allgemeine Glied der eingeklammerten Rei

$$\frac{A_{2m+1}}{m'}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$$

dargestellt wird und für die Koeffizientenbestimmung e
zu benutzen ist.

Ein ebenso wichtiges als interessantes Beispiel hie
die numerische Berechnung des Integrales

$$\int_{o}^{\infty} e^{\mu}\, z^{-z}\, dz = \Pi(\mu) = \Gamma(\mu + 1)$$

e erste Bezeichnung rechter Hand von *Gauss* und die
n *Legendre* eingeführt worden ist. Die Funktion $z^{\mu} e^{-z}$
ilet nämlich sowohl für $z = 0$ als für $z = \infty$, wenn nur
sitive Grösse ist, und sie hat zwischen diesen Gränzen
es Maximum, welches für $z = \mu$ eintritt, so dass
$e^{-\mu} = \left(\frac{\mu}{e}\right)^{\mu}$ ist. Die Formel 65. giebt

$$A_n = D^{n-1}\left\{\left(\frac{x}{\sqrt{x - \mu l(1 + \frac{x}{\mu})}}\right)^n\right\}_{(x=o)}$$

$= \mu u$, wo u eine neue Variable bezeichnet

$$A_n = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^n}} D^{n-1}\left\{\left(\frac{u}{\sqrt{u - l(1+u)}}\right)^n\right\}_{(u=o)}$$

w nur ungerade Werthe von n in Anspruch nehmen, so
i $n = 2m + 1$ und haben dann bei Entwickelung von
$u)$

$$= \frac{\sqrt{\mu}}{\mu^n} D^{2m}\left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}u + \frac{1}{4}u_2 - \ldots.\right)^{-(m+1/2)}\right\}_{(u=o)}$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{2\mu}}{\mu^n} \cdot 2^m D^{2m}\left\{\left(1 - \frac{2}{3}u + \frac{2}{4}u^2 - \ldots\right)^{-(m+1/2)}\right\}_{(u=o)}$$

fi et man für $m = 0, 1, 2, 3$ etc. der Reihe nach

$$A = \sqrt{2\mu},\ A_3 = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2\mu}}{\mu},\ A_5 = \frac{1}{9}\frac{\sqrt{2\mu}}{\mu^2}$$

$$= -\frac{139}{135}\frac{\sqrt{2\mu}}{\mu^3},\ A_9 = -\frac{571}{405}\frac{\sqrt{2\mu}}{\mu^4},\ \text{u. s. w.}$$

i t sich aus der Gleichung 69. die Formel

71) $$\int_0^\infty z^\mu e^{-z} dz = \Pi(\mu) = \Gamma(\mu + 1)$$

$$= \sqrt{2\mu\pi}\left(\frac{\mu}{e}\right)^\mu \left\{1 + \frac{1}{12.\mu} + \frac{1}{288.\mu^2} - \frac{139}{51840.\mu^3} - \frac{248}{}\right.$$

wobei die eingeklammerte Reihe, der man auch die Fo

$$1 + \frac{1}{12\mu} + \frac{1}{2(12\mu)^2} - \frac{139}{30(12\mu)^2} - \frac{571}{120(12\mu)^4} -$$

geben kann, ausserordentlich stark konvergirt, sobald μ eine beträchtliche Grösse hat. Da nach einer sehr bekannten

$$\frac{\Pi(\mu + n)}{\Pi(\mu)} = \frac{\Gamma(\mu + 1 + n)}{\Gamma(\mu + 1)} = (\mu + 1)(\mu + 2) .$$

ist, so erhellt, dass die Formel 71. auch zur Berec Faktoriellen angewendet werden kann, indem man $\mu +$ Stelle von μ treten lässt und das so erhaltene Result obige dividirt.

Wir schliessen diesen Aufsatz mit der Bemerkung ihm hinreichend die Mittel angedeutet sind, um übh bestimmte Integral näherungsweise zu berechnen; der die Integrationsgränzen desselben nicht den drei von us Voraussetzungen entsprechen, so kann man das gegeb doch immer in eine Reihe anderer Integrale zerlegen, er unter eine der obigen drei Kategorieen fallen.

IV.

r ein Doppelintegral mit wei willkührlichen Funktionen.

---

e eine Form aller zwischen bestimmten Gränzen genommenen
rale ist bekanntlich

$$\int_a^b dx \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y)\, dy$$

t hier zuerst in Beziehung auf y zu integriren, wobei
nte Grösse figurirt, dann für y die Funktionen $\varphi(x)$
substituiren und nach geschehener Subtraktion die
iche Integration zwischen den Gränzen $x = b$, $x = a$
lligen. Erinnert man sich an die bekannte Zerlegungs-

$$\int_\alpha^\beta F(z)\, dz = \int_o^\beta F(z)\, dz - \int_o^\alpha F(z)\, dz$$

a das obige Integral zuerst in die beiden nachstehenden

$$\int dx \int_o^{\varphi(x)} f(x, y)\, dy - \int_a^b dx \int_o^{\psi(x)} f(x, y)\, dy$$

unter Anwendung desselben Prinzipes in die folgenden
ler gehen

$$\int dx \int_o^{\varphi(x)} f(x, y)\, dy - \int_o^a dx \int_o^{\varphi(x)} f(x, y)\, dy$$

$$\left. - \int_o^b dx \int_o^{\psi(x)} f(x, y)\, dy - \int_o^a dx \int_o^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \right]$$

Es würde also nur darauf ankommen, den Werth eine von der Form

$$\int_o^c dx \int_o^{\varphi(x)} f(x, \mu)\, dy$$

zu ermitteln und man deshalb das vorstehende Integ einfachere Schema der bestimmten Doppelintegrale ans

Eine allgemeine Formel, nach welcher sich die hr zweifache Integration auf eine einfache (Quadratur) liesse, existirt bekanntlich nicht; dagegen ist aber dies sehr leicht, wenn die Funktion $f(x, y)$ nur von y abh das fragliche Integral, dessen Werth S heissen möge Form steht:

1) $$S = \int_o^c dx \int_o^{\varphi(x)} f(y)\, dy$$

Diese Reduktion scheint um so bemerkenswerther, als e elementaren Mitteln ausgeführt werden kann und, unt Mechanik entnommenen Gesichtspunkte betrachtet, zu d Resultaten der Abhandlung VI. von selbst hinleitet.

Setzen wir zunächst $y = \varphi(x)t$, wo t die nie bezeichnet und $\varphi(x)$ als konstanter Faktor dier, $dy = \varphi(x)\,dt$ und den Integrationsgränzen $y = \varphi($ entsprechen jetzt die auf t bezüglichen neuen Gräze $t = 0$; hierdurch verwandelt sich die Gleichung 1. in

2) $$S = \int_o^c \varphi(x)\, dx \int_o^1 f[\varphi(x)t]\, dt$$

Führen wir ferner eine neue Variable u dadurch e $\varphi(x) = u$ setzen, so folgt hieraus zunächst, dass mg eine gewisse Funktion von u etwa $x = \psi(u)$ ist, un be

hr φ und ψ die Umkehrungen von einander; weiter ist
$= \psi'(u)\,du$ und wenn noch die Gränzen $x = c$, $x = 0$
lchung $\varphi(x) = u$ eingesetzt werden, so erhält u die
den Werthe $\varphi(c)$ und $\varphi(o)$ Nach diesen Bemerkungen
t

$$S = \int_{\varphi(o)}^{\varphi(c)} u\psi'(u)\,du \int_o^1 f(ut)\,dt$$

ir weiter das unbestimmte Integral

$$\int f(z)\,dz = F(z) + Const.$$

$$f(z) = F'(z)$$

u Nr. 4., wenn wir ut an die Stelle von z treten lassen
riabel u dagegen als konstant ansehen

$$u\int f(ut)\,dt = F(ut) + Const.$$

nführung hiervon wird aus Nr. 3.

$$S = \int_{\varphi(o)}^{\varphi(c)} \psi'(u)\,du \left\{F(u) - F(o)\right\}$$

tegral wenden wir die bekannte Formel der partiellen
:

$$\int UV du = U\int V du - \int dU \int V du$$

$= F(u) - F(o)$ und $V = \psi'(u)$ setzen; es wird
stimmter Integration

$$\int \left\{F(u) - F(o)\right\} \psi'(u)\,du$$

$$= \left\{F(u) - F(u)\right\} \psi(u) - \int F'(u)\,du\,\psi(u)$$

und durch Einführung der Integrationsgränzen $u = \varphi(c)$

7) $$S = \Big\{F[\varphi(c)] - F(o)\Big\}\,\psi[\varphi(c)] - \Big\{F[\varphi(o)] - F($$

$$- \int_{\varphi(o)}^{\varphi(c)} F'(u)\,\psi(u)\,du$$

Dabei ist zu berücksichtigen, dass aus den Gleichunge

$$\varphi(x) = a, \quad x = \psi(u)$$

sogleich folgt

$$\psi[\varphi(x)] = \psi(u) = x$$

so dass sich also die beiden entgegengesetzten Funktion aufheben; nach dieser Bemerkung nimmt die Gleich einfachere Form an

8) $$S = \Big\{F[\varphi(c)] - F(o)\Big\}\,c - \int_{\varphi(o)}^{\varphi(c)} F'(u)\,\psi(u)\,d$$

Endlich ist noch zu erinnern, dass nach Nr. 5. $F'(u) =$ zufolge von Nr. 4. und nach einer Definition des b Integrales überhaupt

$$F(\gamma) - F(o) = \int_o^{\gamma} f(z)\,dz$$

sein muss; wenden wir diess für $\gamma = \varphi(c)$ auf die ch an, so ist endlich

9) $$S = c\int_o^{\varphi(c)} f(z)\,dz - \int_{\varphi(o)}^{\varphi(c)} f(u)\,\psi(u)\,du$$

Hier setzen wir für S seine ursprüngliche Bedeutu; der Gleichförmigkeit wegen y für u und z und gelan n Reduktionsformel

$$\int_o^c dx \int_o^{\varphi(c)} f(y)\, dy$$

$$= c \int_o^{\varphi(c)} f(y)\, dy - \int_{\varphi(o)}^{\varphi(c)} f(y)\, \psi(y)\, dy$$

e die postulirte doppelte Integration auf die Differenz
hen Integrale und auf die Umkehrung der Funktion
urückgeführt wird.

s vielleicht nicht ohne Interesse eine geometrische
ler obigen allgemeinen Formel zu sehen. Denken wir
y z als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes im
vird durch die Gleichung

$$z = Ax + F(y)$$

eine beliebige Funktion bezeichnet, eine cylindrische
kterisirt, wie man sogleich aus dem Umstande ersieht,
i konstantes $y = k$ die Gleichung der geraden Linie
ein kommt und folglich die Fläche von allen der
ene xz parallelen Ebenen in Geraden geschnitten
sämmtlich parallel laufen und mit der Ebene xy einen
, dessen trigonometrische Tangente $= A$ ist. Wenden
Fläche die bekannte Komplanationsformel an

$$= \int dx \int dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

$\left(\frac{dz}{dx}\right) = A$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = F'(y)$ und mithin

$$= \int dx \int dy \sqrt{1 + A^2 + \left\{F'(y)\right\}^2}$$

12) $$S = \int dx \int dy f(y)$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

13) $$f(y) = \sqrt{1 + A^2 + \left\{F'(y)\right\}^2}$$

Hier sind nun die für x und y geltenden Integrationsg bestimmen und diess soll auf folgende Weise geschehn Koordinatenebene xy (Fig. 3.) ziehen wir in der $OC = c$ eine Parallele zur Achse der y, ferner ei Kurve, welche CD schneidet, und durch die Gleichung y charakterisirt werden möge, und setzen nun voraus, da desjenigen Theiles $TUVW$ der Cylinderfläche bestim soll, wovon das theilweis krummlinig begränzte Vier die Horizontalprojektion bildet. Sind nun $OM =$ und $NP = z$ die rechtwinkligen Koordinaten eines P k Fläche, so steht dem x der Spielraum von Null bis C ferner dem y der Spielraum von Null bis $MQ = \varphi(M$ d. h. 0 und c sind die Gränzen für x, 0 und $\varphi($ womit die Gleichung 12., in welcher nunmehr $S = T$ völlig mit der Gleichung 1. zusammenfällt. Schroe Gleichung 9. in der Form

14) $$S = \int_o^{\varphi(c)} cf(\xi)\,d\xi - \int_{\varphi(o)}^{\varphi(c)} f(\xi)\psi(\xi)\,d\xi$$

so bedeutet diess geometrisch, dass die doppe cylindrische Fläche jederzeit als die Differenz zwei Flächen betrachtet werden kann, von welchen die ers Abscisse $\varphi(c)$ steht in eine Kurve, deren Gleichung rechtwinkligen Koordinaten $\eta = cf(\xi)$ ist, und d Strecke $\varphi(c) - \varphi(o)$ der Abscissenachse zur Basis oberhalb durch eine Kurve begränzt wird, deren $\eta = f(\xi)\psi(\xi)$ heisst. Nehmen wir z. B.

$$z = Ax + By^2$$

$$c = r,\ \varphi(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

e Cylinder ein parabolischer und die Projektion $OCDL$ lnt des mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreises; d n

$$f(y) = \sqrt{1 + A^2 + 4B^2y^2}$$

g aus $\sqrt{r^2 - x^2} = y$ umgekehrt

$$x = \psi(y) = \sqrt{r^2 - y^2}$$

N 14.

$$S = \int_o^o r\sqrt{1 + A^2 + 4B^2\xi^2}\, d\xi$$

$$-\int_r^o \sqrt{1 + A^2 + 4B^2\xi^2}\ \sqrt{r^2 - \xi^2}\, d\xi$$

c ndet das erste Integral wegen der gleichen Integrations- i zweiten Integrale giebt die Vertauschung der Gränzen

$$S = \int_o^r \sqrt{(1 + A^2 + 4B^2\xi^2)\,(r^2 - \xi^2)}\, d\xi$$

i demnach S gleich der ebenen Fläche, welche über s r stände, wenn man sich die durch die Gleichung

$$\eta = \sqrt{(1 + A^2 + 4B^2\xi^2)\,(r^2 - \xi^2)}$$

sie Kurve gezeichnet denkt.

ei zweites Beispiel nehmen wir

$$z = Ax + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y^2}$$

$$c = a,\ \varphi(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$$

*

so ist der Cylinder ein elliptischer und die Projekt
komplanirenden Flächenstückes ein Quadrant mit dem H
In diesem Falle haben wir

$$f(y) = \sqrt{1 + A^2 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{a^2 - y^2}}$$

$$= \sqrt{A^2 + \frac{a^4 - (a^2 - b^2)\,y}{a^2(a^2 - y^2)}}$$

und durch Einführung der numerischen Excentricität ε =

$$f(y) = \sqrt{A^2 + \frac{a^2 - \varepsilon^2 y^2}{a^2 - y^2}} = \sqrt{\frac{(A^2 + 1)\,a^2 - (}{a^2 - y^2}}$$

ferner folgt aus $\varphi(x) = \sqrt{a^2 - x^2} = y$ umgekehrt

$$x = \psi(y) = \sqrt{a^2 - y^2}$$

Die Formel 14. giebt jetzt

$$S = \int_0^a \sqrt{(A^2 + 1)\,a^2 - (A^2 + \varepsilon^2)\,\xi^2}\, d\xi$$

was sich bekanntlich mit leichter Mühe integriren lässt
eine nette Bedeutung hat, als

$$\eta = \sqrt{(A^2 + 1)\,a^2 - (A^2 + \varepsilon^2)\,\xi^2}$$

wiederum die Gleichung einer Ellipse ist.

V.

die Bestimmung der Masse bei ungleichförmiger Dichtigkeit.

er durchaus homogenen Körper hat die Massenbestimmung s ren Schwierigkeiten als die Kubatur, weil hier die Rgel der Mechanik gilt, dass die Masse dem Produkte igeit und Volumen gleich ist; anders dagegen wird die e die Dichtigkeit im Innern des Körpers nicht überall bl bt, sondern sich von Punkt zu Punkt nach einem el nen Gesetze ändert. Nennen wir x, y, z die recht- bordinaten eines im Innern des Körpers liegenden n sehen wir die an dieser Stelle vorhandene Dichtigkeit o der drei Koordinaten an, so wird die Masse des im y befindlichen Körperelementes durch ein Produkt von $\Delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ dargestellt, worin $\Delta(x, y, z)$ eine Fnktion von x, y, z (die Dichtigkeit) bezeichnet. Die na e des Körpers ist demnach gleich dem dreifachen

$$\iiint \Delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

I egrationen so zu leiten sind, dass sie sich nur auf n en des Körpers liegenden Punkte erstrecken. Für e Halbmesser r beschriebene Kugel, z. B. würden die e Integrationen nur auf diejenigen positiven und negativen u eziehen sein, welche der Bedingung

$$r^2 \geqq x^2 + y^2 + z^2 \geqq 0$$

Genüge leisten und aus dieser Bemerkung leitet man die Integrationsgränzen ab:

$$z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \text{ bis } z = +\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{„ } y = +\sqrt{r^2 - x}$$

$$x = -r \quad \text{„ } x = +r$$

aus welchen noch hervorgeht, dass die in Nr. Integrationen nicht in beliebiger Ordnung vorgenom dürfen, sondern dass man bei der auf z bezüglich anzufangen und mit der für x geltenden aufzuhören h.

Will man statt rechtwinkliger Koordinaten sic Polarkoordinaten bedienen, was allerdings in vielen Fäl ist, so nehme man in Fig. 4. OX, OY und OZ a x, y, z, ferner $OM = x$, $MN = y$, $NP = z$ als und $OP = \varrho$, $\sphericalangle POX = \vartheta$ und $\sphericalangle PMN =$ Koordinaten des Punktes P; das Volumen des befindlichen Körperelementes ist dann $PU \,.\, PV \,.\, PW$

$$PU = d\varrho, \quad PV = \varrho\, d\vartheta, \quad PW = PM\, d\omega =$$

mithin das Volumen des in Rede stehenden Körperem

$$\varrho^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varrho\, d\omega$$

und wenn wir die im Punkte P stattfindende Dichtig $\Delta(\varrho, \vartheta, \omega)$ bezeichnen, so ist die Masse des Körpers

3) $$\iiint \Delta(\varrho, \vartheta, \omega)\, \varrho^2 \sin\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\omega$$

Die Integrationsgränzen sind hier wieder durch die Be bestimmen, dass nur solche Elemente, welche Körpers liegen, in Rechnung gebracht werden dürfen. vor Allem nöthig, dass man die in rechtwinklig

Gleichung der Körperoberfläche in Polarkoordinaten
, was mittelst der Formeln

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta\cos\omega \\ z = r\sin\vartheta\sin\omega \end{cases}$$

erigkeiten hat, und aus der neuen Gleichung zwischen
die Gränzen bestimme, zwischen denen ϱ, ϑ und ω
ü en, wenn P nicht ausserhalb des Körpers fallen soll.

d sen Andeutungen erhellt, dass die Aufgabe von der
stimmung eines Körpers von ungleicher Dichtigkeit jederzeit
rionen erfordert, bei welchen im Allgemeinen zwei
h Funktionen der drei Koordinaten vorkommen; die
r unktionen bestimmt das Gesetz der Dichtigkeitsänderung
t Punkt, die andere charakterisirt die Oberfläche des
e nden Körpers. — Es bedarf wohl kaum der besonderen
, dass sich die genannten Rechnungsoperationen in
lgemeinheit, d. h. ohne wenigstens eine jener Funktionen
s en, nicht ausführen lassen, dagegen ist es aber sehr
w th, dass die obige dreifache Integration in der That
v den kann, wenn der Körper von einer Cylinder- oder
Rotationsfläche begränzt wird und wenn man ausserdem
, dass sich die Dichtigkeit nicht von Punkt zu Punkt,
o Schicht zu Schicht ändere. Die vollständigen Ent-
n ür diese Fälle sind folgende.

Massenbestimmung von Cylindern.

Axe der z legen wir parallel zur Mantelfläche des
e Koordinatenebene xy senkrecht darauf; letztere
i t den Cylinder in einer Kurve (der Leitlinie), in
r bscisse x die Ordinate $\varphi(x)$ gehören möge, so dass
, $MQ = \varphi(x)$ ist. (Fig. 5.) Nennen wir ferner g

die Strecke OA, in deren Endpunkte A die Leitlinie der x durchschneidet und h die Höhe NH des Cy gelten für die Koordinaten $OM = x$, $MN = y$, NP im Inneren des Körpers liegenden Punktes P folge bestimmungen. Dem x steht der Spielraum von $x = OA = g$ offen, dem y das Intervall $y = 0$ bis $y =$ dem z endlich der Spielraum von $z = 0$ bis $z = M$ Demnach sind $x = 0$, $x = g$, $y = 0$, $y = \varphi(x)$, z die Integrationsgränzen für die nachherige dreifache Lassen wir nun die Dichtigkeit von Schicht zu Schicht so besteht der Körper gewissermaassen aus einer Fol dünner Lamellen, von denen jede für sich homogen t von einer Lamelle zur anderen eine Dichtigkeitsänder Ueber die Lage dieser Lamellen können natürlich die artigsten Voraussetzungen gemacht werden; wir be diesen aber nur zwei, indem wir annehmen, dass ie entweder senkrecht auf dem Mantel des Cylinders te ihm parallel laufen.

I. Bei senkrecht auf dem Cylindermantel stehere ist die Dichtigkeit für alle Punkte einer zu xy pall dieselbe und hängt also nur von der Höhe der Ele Koordinatenebene xy ab, d. h. die Dichtigkeit ist in von z allein etwa $\Delta(z)$. Die Masse des im Punkte P Körperelementes wird demnach durch $\Delta(z)\,dx\,dy\,dz$ ang die Masse des Cylinders, welche M heissen möge, t vorhin bereits ermittelten Integrationsgränzen:

$$M = \int_0^g \int_0^{\varphi(x)} \int_0^h \Delta(z)\,dx\,dy\,dz$$

oder

5) $$M = \int_0^g dx \int_0^{\varphi(x)} dy \int_0^h \Delta(z)\,dz$$

c: Werth des auf z bezüglichen Integrales von x und y
i; spielt also rücksichtlich der nachfolgenden Integrationen
e iner Konstante, so dass man auch schreiben kann

$$M = \left[\int_o^g dx \int_o^{\varphi(x)} dx\right] \cdot \left[\int_o^h \Delta(z)\, dz\right]$$

e man die auf y bezügliche Integration ausführt

$$M = \left[\int_o^g \varphi(x)\, dx\right] \cdot \left[\int_o^h \Delta(z)\, dz\right]$$

h leicht, den einfachen Sinn dieser Gleichung zu finden,
ie Formel 5. erst einmal auf den Fall eines aus den
e a, b, c konstruirten rechtwinkligen Parallelopipedes
an hat dann $g = a$, $\varphi(x) = b$, $h = c$ also für die
s Parallelopipedes:

$$\int_o^a dx \int_o^b dy \int_o^c \Delta(z)\, dz = ab \int_o^c \Delta(z)\, dz$$

rt man weiter, dass der erste Faktor in Nr. 6. die
des Cylinders ausdrückt, so sagt die Formel 6., dass
Cylindermasse gleich der Masse eines Parallelopipedes
mit dem Cylinder gleiche Grundfläche und gleiche
t und in welchem sich die Dichtigkeit nach demselben
rt.

Wnn zweitens die Lamellen dem Mantel des Kegels
un, so ist die Dichtigkeit für alle diejenigen Punkte
lche sich in einer parallel zur Achse der z gelegten
ren; nehmen wir diese Ebene parallel der Kordinaten-
ie es die Figur zeigt, so hängt die Dichtigkeit im
y nur von y ab und wäre demnach mit $\Delta(y)$ zu
. Aus der Integration des Produktes $\Delta(y)\, dx\, dy\, dz$
jzt die Formel

$$M = \int_o^g dx \int_o^{\varphi(x)} \Delta(y)\, dy \int_o^h dz$$

worin sich die auf z bezügliche Integration sogleich be
lässt; es bleibt dann

7) $$M = h \int_o^g dx \int_o^{\varphi(x)} \Delta(y)\, dy$$

Dieses Doppelintegral steht unter der Form des
Aufsatze behandelten Integrales Nr. 1. und daher
Stelle

8) $$M = gh \int_o^{\varphi(g)} \Delta(y)\, dy - h \int_{\psi(o)}^{\varphi(g)} \Delta(y)\, \psi(y)\, dy$$

Auch hiervon kann man sich leicht eine Interpretati
wenn man erst den einfachen Fall eines Parallelbi
$g = a$, $\varphi(x) = b$, $h = c$, betrachtet. Zufolge e
wird nämlich die Masse des Parallelopipedes durch

$$c \int_o^a dx \int_o^b \Delta(y)\, dy = ac \int_o^b \Delta(y)\, dy$$

ausgedrückt, was unmittelbar auf das erste Integral i
dabei kann a die Breite, c die Höhe und b die Tie
lopipedes heissen. Aehnlich würde

$$ac \int_\beta^b \Delta(y)\, dy = ac \int_o^b \Delta(y)\, dy - ac \int_o^\beta \Delta(y)\, dy$$

die Differenz der Massen zweier Parallelopipede bez
die Tiefen b und β haben; diess ist nichts Andere al
eines Parallelopipedes mit der Tiefe $b - \beta$, des
nicht in 0 fällt, sondern um β davon absteht. Geh
Formel 8. die Gestalt:

$$M = gh \int_{o}^{\varphi(g)} \Delta(y)\, dy - gh \int_{\varphi(o)}^{\varphi(g)} \frac{\Delta(y)\psi(y)}{g}\, dy$$

n wir sie auf folgende Weise in Worte übertragen:

Jer den hinsichtlich der Dichtigkeit gemachten Voraussetzungen ist die Masse des fraglichen Cylinders die Differenz zwischen den Massen zweier rechtwinkligen Parallelopipede, welche mit dem Cylinder gleiche Breite und Höhe besitzen. Das erste dieser Parallelopipede hat die Tiefe $\varphi(g)$ und in ihm herrscht dasselbe Gesetz der Dichtigkeitsänderung wie im Cylinder; das zweite Parallelopiped steht um $\varphi(o)$ von der Achse der x ab, hat die Tiefe $\varphi(g) - \varphi(o)$ und in ihm wird das Gesetz der Dichtigkeitsänderung durch $\frac{\Delta(y)\,\psi(y)}{g}$ ausgedrückt, wobei $\psi(y)$ die Umkehrung der Funktion $\varphi(x)$ bezeichnet.

Allgemeinheit dieses Theoremes erlaubt sehr zahlreiche ungen desselben, je nachdem man der einen oder anderen willkührlichen Funktionen $\varphi(x)$ und $\Delta(y)$ eine besondere ebt. Nehmen wir z. B.

$$\varphi(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad g = a$$

Cylinder ein elliptischer mit den Halbachsen a und b

$= \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ folgt $x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$

er zweite Ausdruck für $\psi(y)$ zu substituiren und die ebt jetzt

$$M = ah \int_o^o \Delta(y)\,dy - ah \int_b^o \frac{\Delta(y)\sqrt{b^2 -}}{b}$$

wobei das erste Integral verschwindet und im zwei die Gränzen vertauscht werden müssen um das positi zu erhalten. Die Formel

$$M = ah \int_o^b \Delta(y) \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}\, dy$$

welche den vierten Theil der ganzen über der s konstruirten Ellipse stehenden Cylindermasse angiebt, t auch die Masse eines rechtwinkligen Parallelopipedes d a, b und h zu Kanten hat und worin die Dichtiglit Gesetze $\Delta(y) \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$ veränderlich ist. Mlt die obige Gleichung mit 4, so giebt sie folgele Theorem:

> Die Masse eines geraden elliptischen Cylile Halbachsen a, b und der Höhe h, in w Dichtigkeit durch die Funktion $\Delta(y)$ besm der Masse des umschriebenen rechtwinlig lopipedes gleich, wenn sich in dem le Dichtigkeit nach dem Gesetze $\Delta(y)$ / ändert.

So wie hier die Funktion $\varphi(x)$ spezialisirt wde Allgemeinheit von $\Delta(y)$ zu stören, so könnte man uch für $\Delta(y)$ eine besondere Substitution machen und $\rho($ lassen; doch giebt diess weniger elegante Resultat

Massenbestimmung der Rotationskörper.

v durch den in Nr. 3. verzeichneten Ausdruck bereits
lnnen, unter welcher die Masse enthalten ist, sobald
c· Polarkoordinaten bedient, so handelt es sich zunächst
e immung der für den Fall eines Rotationskörpers ein-
tegrationsgränzen. Denken wir uns (Fig. 6.), eine
ue, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten
(heissen möge, werde um die Abscissenachse herum-
s entsteht eine Rotationsfläche, welche von jeder auf
ehten Ebene in einem Kreise QPT geschnitten wird.
$= x$, $MN = y$, $NP = z$ ist

$$\overline{MT}^2 = \overline{MP}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NP}^2$$

$$[F(x))]^2 = y^2 + z^2$$

lan sich die Gleichung nach x aufgelöst denkt, so
n Resultat von der Form

$$x = f(y^2 + z^2)$$

ate allgemeine Gleichung der Rotationsflächen, bezogen
lige Koordinaten. Substituiren wir für x, y, z die
verzeichneten Werthe, so tritt an die Stelle der
1 die Polargleichung der Rotationsfläche nämlich

$$\cos\vartheta = f(r^2 \sin^2\vartheta \cos^2\omega + r^2 \sin^2\vartheta \sin^2\omega)$$
$$= f(r^2 \sin^2\vartheta)$$

rschwindet ω völlig aus der Gleichung, was auch aus
chen Gründen leicht erhellt. In der Gleichung

$$\cos\vartheta = f(r^2 \sin^2\vartheta) = f(r^2 - r^2 \cos^2\vartheta)$$

er r durch ϑ ausdrücken, so dass ein Resultat von

11) $r = \varphi(\cos\vartheta)$

zum Vorschein kommt, welches wir als allgemeine Il
der Rotationsflächen ansehen dürfen.

Wenn es nun darauf ankommt, die Masse des Rot
zu bestimmen, welche von der Rotationsfläche einer
den positiven Theilen der Koordinatenebenen anderer
wird, so finden sich die für ϱ, ϑ, ω geltenden Integ
sehr leicht durch die einfachen Bemerkungen, dass e
Spielraum von $\varrho = 0$ bis $\varrho = r = \varphi(\cos\vartheta)$ freistel,
zu einem Punkte der Oberfläche gehörende Radiusv
dass ferner für ϑ und ω die Gränzen 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ gl

Die Abhängigkeit, in welcher ϱ von ϑ steht, nötl
die auf ϱ bezügliche Integration zuerst vorzunehm
deshalb

$$M = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{\varphi(\cos\vartheta)} \varrho^2 \Delta(\varrho,\ \vartheta,\ \omega)$$

Wir setzen nun weiter voraus, dass die Dichtigk
nicht aber von ϑ und ω abhängig sei, so dass also
in allen von 0 gleichweit entfernten Punkten dies
kann sich in diesem Falle den Rotationskörper a
unendlich dünner Kugelschaalen zusammengesetzt
jede solche Schaale für sich homogen ist, während
von Schicht zu Schicht wechselt. Bezeichnen w
Entfernung ϱ stattfindende Dichtigkeit einfach mit $\Delta(\varrho)$

$$M = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{\varphi(\cos\vartheta)} \varrho^2 \Delta(\varrho)$$

Hier ist der Umstand von Vortheil, dass ϱ, ϑ und $\varphi(\cos\vartheta)$
unabhängig sind, man wird dadurch in die Möglich

a bezügliche Integration unmittelbar auszuführen; man

$$M = \frac{1}{2}\pi \int_o^{\frac{1}{2}\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_o^{\varphi(\cos\vartheta)} \varrho^2 \Delta(\varrho)\, d\varrho$$

ir eine neue Variable $t = \cos\vartheta$ einführen, so wird $= -dt$ und mithin unter Rücksicht darauf, dass den $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ die neuen Gränzen $t = 1$ und ts echen

$$-\pi \int_1^o dt \int_o^{\varphi(t)} \varrho^2 \Delta(\varrho)\, d\varrho = \frac{1}{2}\pi \int_o^1 dt \int_o^{\varphi(t)} \varrho^2 \Delta(\varrho)\, d\varrho$$

multiplizirte Doppelintegral steht unter der Form des

g Abhandlung betrachteten Integrales Nr. 1. und wird g ich, wenn man sich t, ϱ, $\varrho^2\Delta(\varrho)$ an die Stelle des , $f(y)$ gesetzt denkt. Zufolge der Formel 10. in IV.

$$= \frac{1}{2}\pi \int_o^{\varphi(1)} \varrho^2 \Delta(\varrho)\, d\varrho - \frac{1}{2}\pi \int_{\varphi(o)}^{\varphi(1)} \varrho^2 \Delta(\varrho)\, \psi(\varrho)\, d\varrho$$

d Problem auf blose Quadraturen zurückgeführt.

lt es sich um die Massenbestimmung eines Kugel- it dem Halbmesser r, so wäre die obere Integrations- ϱ in Nr. 12. konstant $= r$ und mithin die Masse der

$$\left[\int_o^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta\right] \left[\int_o^r \varrho^2 \Delta(\varrho)\, d\varrho\right] = \frac{1}{2}\pi \int_o^r \varrho^2 \Delta(\varrho)\, d\varrho$$

Ebenso würde das Integral

$$\frac{1}{2}\pi \int_{r'}^{r} \varrho^2 \Delta(\varrho)\, d\varrho$$

$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{r} \varrho^2 \Delta(\varrho)\, d\varrho - \frac{1}{2}\pi \int_{0}^{r'} \varrho^2 \Delta(\varrho)\, d$$

die Differenz zwischen den Massen zweier konzentri
oktanten, d. h. die Masse eines Kugelschaalenoktan
welcher r zum äusseren und r' zum inneren Hal
Wenden wir diese Bemerkungen auf die Formel 13. a,
wir zu dem folgenden Theoreme:

> Wenn $r = \varphi(\cos\vartheta)$ die Polargleichung er
> eines Rotationskörpers bezeichnet, inn
> die Dichtigkeit in der Entfernung ϱ vom M
> der Koordinaten durch $\Delta(\varrho)$ bestimmt w
> die Masse des zwischen den positive
> Koordinatenebenen liegenden Körperstüces
> Differenz unter den Massen eines Kugl
> eines Kugelschaalenoktanten; die Kugelha
> Halbmesser und in ihr ändert sich ie
> gleichfalls nach dem Gesetze $\Delta(\varrho)$, d
> besitzt die Radien $\varphi(1)$ und $\varphi(0)$ unddie
> in ihr wird durch die Funktion $\Delta(\varrho)(\varrho$
> wobei $t = \psi(\varrho)$ die Umkehrung der Funkti
> bezeichnet.

Wir wollen die Formel 13. noch auf das für di
Astronomie bedeutsame Beispiel des Rotationsellipsoi
Die Gleichung des dreiachsigen Ellipsoides ist bekannt

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

woraus für $c = b$ die Gleichung des Rotationsellipsoi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

r t zugleich die Drehungsachse bezeichnet. Als Polar- s Ellipsoides ergiebt sich hieraus durch Substitution 1. 4. verzeichneten Werthe

$$r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2\vartheta + b^2 \cos^2\vartheta}}$$

$$= \frac{ab}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\vartheta}} \quad \text{oder} \quad r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2\vartheta}}$$

m t grösser oder kleiner ist; hiermit haben wir unmittelbar d Funktion $\varphi(\cos\vartheta)$. Aus $\varphi(t) = \varrho$, d. h.

$$\frac{ab}{\sqrt{\quad - (a^2 - b^2)t^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)t^2}} = \varrho$$

u gekehrt

$$= \frac{a}{\varrho}\sqrt{\frac{\varrho^2 - b^2}{a^2 - b^2}} \quad \text{oder} \quad t = \frac{a}{\varrho}\sqrt{\frac{b^2 - \varrho^2}{b^2 - a^2}}$$

m grösser oder kleiner als b; hiermit ist die Form von n t.

ö der Substitutionen für $r = \varphi(\cos\vartheta) = \varphi(t)$ und e iebt sich jetzt aus der Formel 13., dass der Oktant t ckten Rotationsellipsoides ($a > b$) durch

$$\int_0^a \Delta(\varrho)\, d\varrho - \frac{1}{2}\frac{\pi a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \int_b^a \varrho\, \Delta(\varrho) \sqrt{\varrho^2 - b^2}\, d\varrho$$

xt wird, und wenn demnach E die Masse des ganzen s ezeichnet, so ist

$$E = 4\pi \int_o^a \varrho^2 \Delta(\varrho)\, d\varrho - \frac{4\pi a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \int_b^a \varrho \Delta(\varrho) \sqrt{}$$

oder wenn wir die numerische Excentricität des Ell
ε bezeichnen, wo

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

16) $$E = 4\pi \int_o^a \varrho^2 \Delta(\varrho)\, d\varrho - \frac{4\pi}{\varepsilon} \int_b^a \varrho \Delta(\varrho) \sqrt{\varrho^2 -}$$

Hier ist das zweite Integral rechter Hand noch ein
Transformation fähig; für

$$\varrho = \sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sigma^2} \text{ also } d\varrho = \frac{\varepsilon^2 \sigma\, d\sigma}{\sqrt{b^2 + \varepsilon^2}}$$

entsprechen nämlich den Gränzen $\varrho = b$, $\varrho = a$ die zu
$\sigma = 0$, $\sigma = a$ und so verwandelt sich das Integral in

$$4\pi\varepsilon^2 \int_o^a \sigma^2 \Delta(\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sigma^2})\, d\sigma$$

Schreiben wir der Gleichförmigkeit wegen wieder s
substituiren in Nr. 16., so wird

17) $$E = 4\pi \int_o^a \varrho^2 \Delta(\varrho)\, d\varrho - 4\pi \int_o^a \varrho^2 \varepsilon^2 \Delta(\sqrt{b +}$$

d. h. in Worte übertragen;

> Die Masse eines aus den Halbachsen a und b l
> gestreckten Rotationsellipsoides ($a > b$ ist
> Differenz zwischen den Massen zweier Ku
> beide mit der grossen Halbachse (Un
> beschrieben sind; für die erste Kugel i w

Ellipsoide in der Entfernung ϱ vom Mittelpunkte die Dichtigkeit gleich $\Delta(\varrho)$, in der zweiten Kugel dagegen indet an derselben Stelle die Dichtigkeit $\varepsilon^2 \Delta(\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \varrho^2})$ tatt.

le Fall eines abgeplatteten Rotationsellipsoides, wo also , benutzen wir die zweiten Formen von $r = \varphi(t)$ und as Nr. 14. und 15.; die Gleichung 13. giebt dann für llipsoid

$$\pi \int_0^a \varrho^2 \Delta(\varrho)\, d\varrho + \frac{4\pi a}{\sqrt{b^2 - a^2}} \int_a^b \varrho \Delta(\varrho) \sqrt{b^2 - \varrho^2}\, d\varrho$$

s Vorzeichen des zweiten Integrales geändert haben, össere Integrationsgränze zugleich die obere werde. leichförmig die grosse Achse mit a bezeichnen zu er uschen wir a und b gegen einander und haben dann, ih ng der Bezeichnung

$$\eta = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

$$= \pi \int_0^b \varrho^2 \Delta(\varrho)\, d\varrho + \frac{4\pi}{\eta} \int_b^a \varrho \Delta(\varrho) \sqrt{a^2 - \varrho^2}\, d\varrho$$

er Substitution $\varrho = \sqrt{a^2 - \eta^2 \sigma^2}$ verwandelt sich das ri in

$$\Delta(\sqrt{a^2 - \eta^2 \sigma^2})\, d\sigma = 4\pi\eta^2 \int_0^b \sigma^2 \Delta(\sqrt{a^2 - \eta^2 \sigma^2})\, d\sigma$$

vi wiederum ϱ für σ und substituiren, so wird

$$= 4\pi \int_0^b \varrho^2 \Delta(\varrho)\, d\varrho + 4\pi \int_0^b \varrho^2 \eta^2 \Delta(\sqrt{a_2 - \eta^2 \varrho^2})\, d\varrho$$

or n ausgedrückt:

Die Masse eines aus den Halbachsen a und
abgeplatteten Rotationsellipsoides ($a >$
der Summe von den Massen zweier Ku
beide mit der kleinen Halbachse (Umd
beschrieben sind; für die erste Kugel ist
Ellipsoide in der Entfernung ϱ vom Mi
Dichtigkeit gleich $\Delta(\varrho)$, in der zweiten K
derselben Stelle die Dichtigkeit $\eta^2 \Delta($
statt.

Dieses Beispiel möge genügen, um die Leichtig
mit welcher man aus dem allgemeinen Theorem
viele spezielle Sätze, welche sich auf diese oder
Rotationskörpern beziehen, ableiten könnte.

Fig.1.

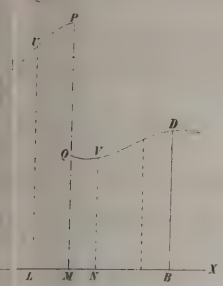


Fig.2.

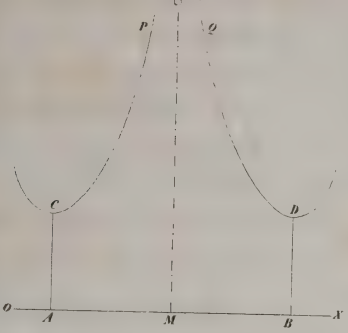


Fig.3.

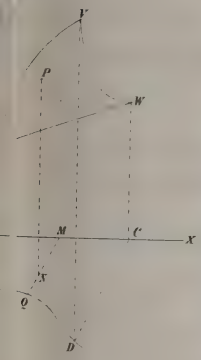


Fig.4.

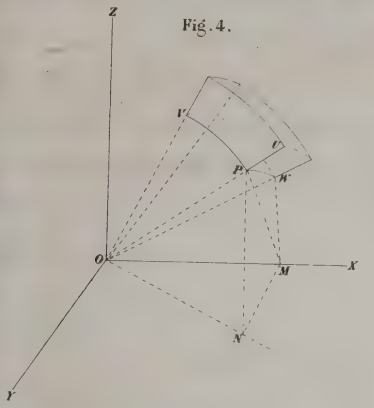


Fig.5.

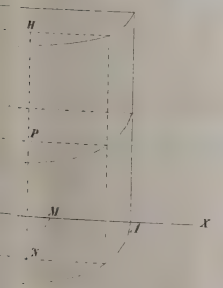
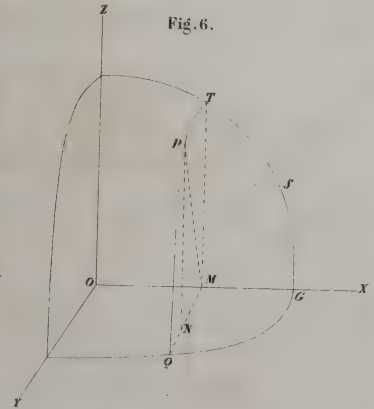


Fig.6.



Verbesserungen.

2. v. u. statt *Conchy* lies *Cauchy*.

3. v. o. statt $OM - \frac{1}{2}\pi$ lies $OM = \frac{1}{2}\pi$.

3. v. u. statt tritt lies wird.

). v. o. statt e_{ti} lies e^{ti}.

5. v. u. fehlt = zwischen $\varphi(x)$ und x.

). v. u. ist die 1 hinter $\varphi(x)$ zu streichen.

). v. u. ebenso Z. 4. v. u. statt $\frac{\sqrt{-1}}{3}$ lies $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{3}}$

5. v. u. statt 1 . 2 . 2 lies 1 . 2 . 3.

Formel 79. ist das letzte Glied $(x - a)^2$

. v. o. statt kekannte lies bekannte.

5. v. u. statt $xF(x)$ lies $F(x)$

. v. u. statt der lies den.

. v. u. statt $\int_{\mu}^{\infty}$ lies $\int_{o}^{\infty}$

. v. u. statt $e^{\mu} z^{-z}$ lies $z^{\mu} e^{-z}$.

. und Z. 5. v. u. statt μ^n lies μ^m.

. v. u. statt VI. lies V.

. v. o statt $\sqrt{a^2 - y^2}$ lies $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Formel 8. statt $\psi(o)$ lies $\varphi(o)$.

. gehört der Buchstabe L an den Durchschnitt der
d DQ.

Druck von E. H. R. Roempler in Dresden.

THE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

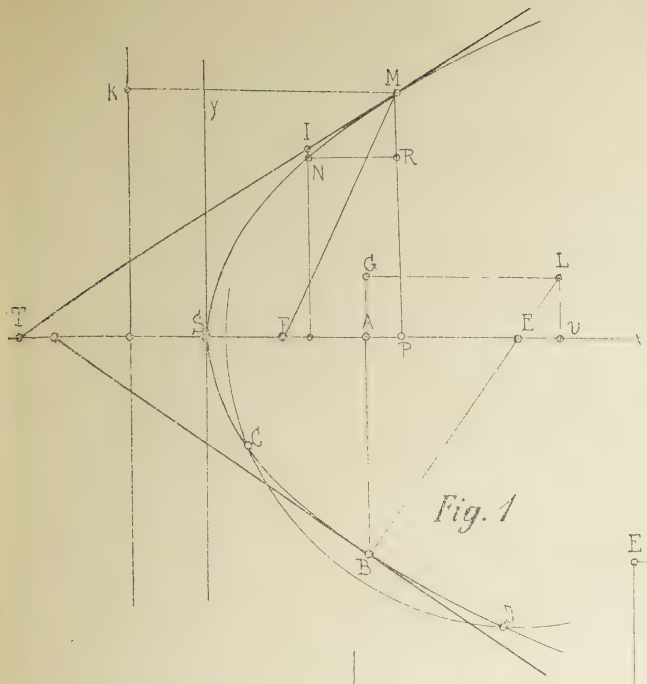


Fig. 1

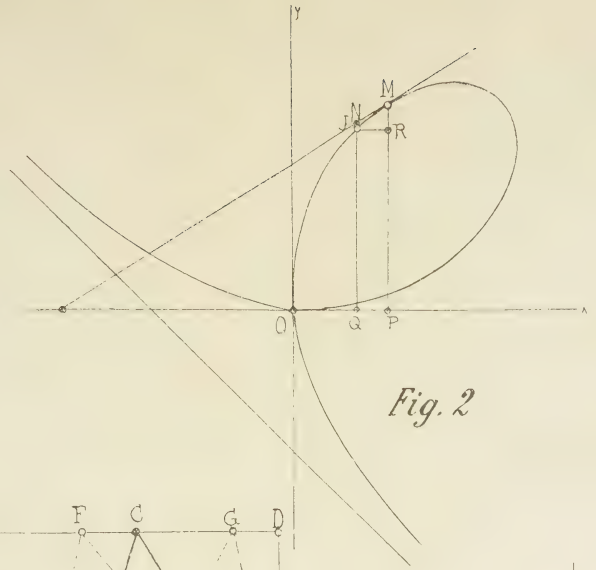


Fig. 2

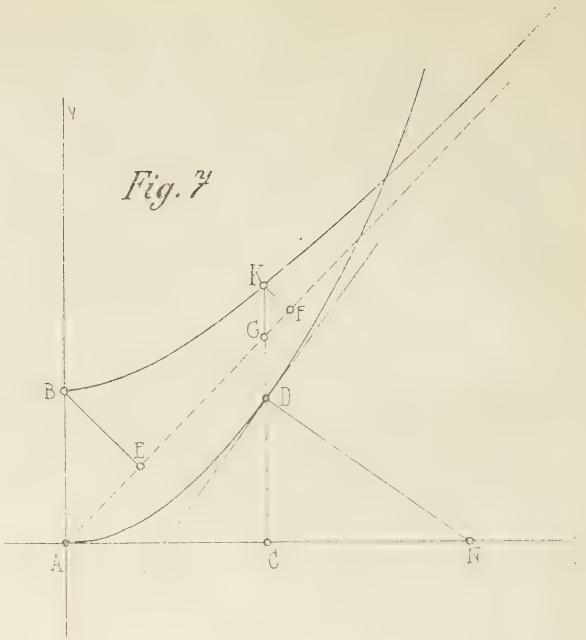


Fig. 7

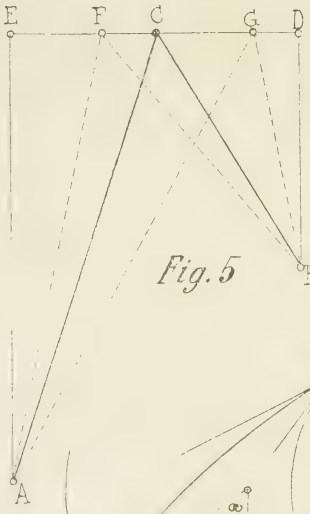


Fig. 5

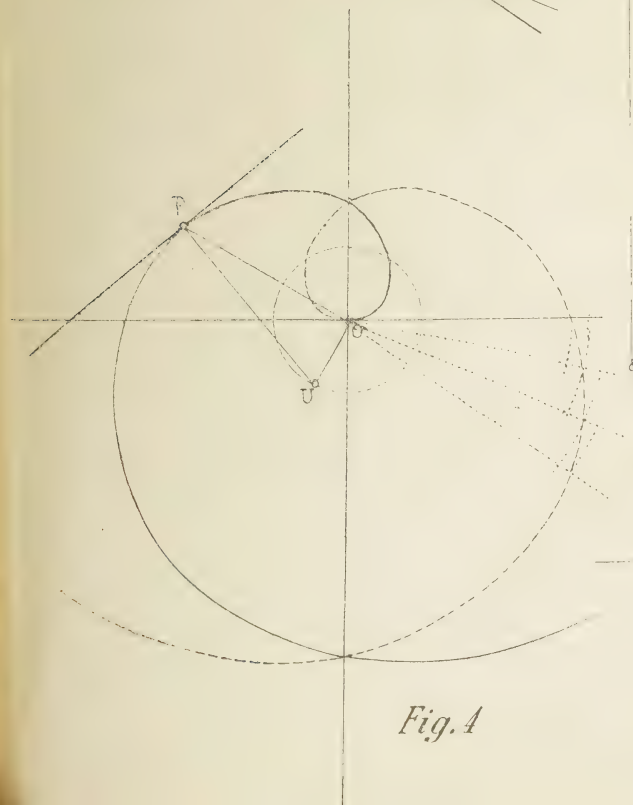


Fig. 4

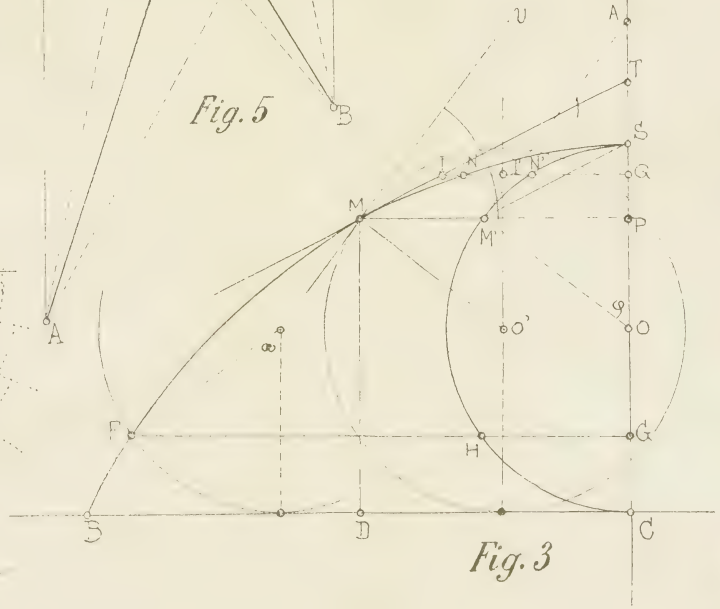
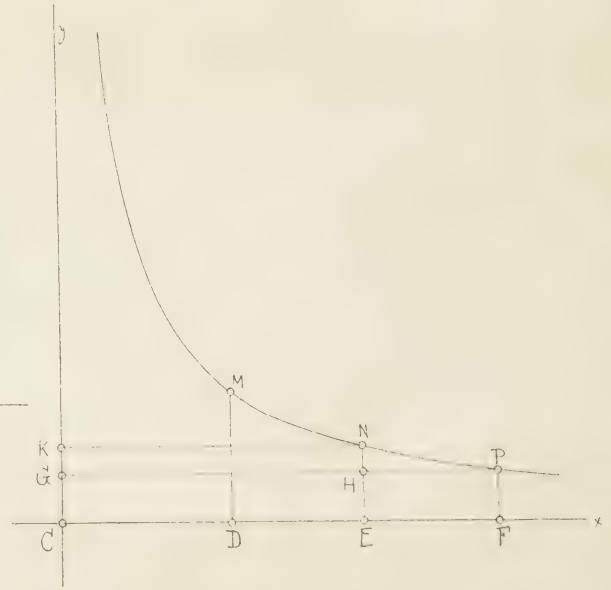


Fig. 3



Fünfter Jahresbericht

über die

K. STAATS-REALSCHULE

im IX. Wiener Gemeindebezirke

(IX, Grüne Torgasse 11).

o

Veröffentlicht am Schlusse des Schuljahres 1908/9.

INHALT:

Infinitesimalkalkül. Von Josef Schmidt.
Nachrichten. Vom Direktor.

o

WIEN 1909.
Selbstverlag der k. k. Staats-Realschule.

Der Infinitesimalkalkül.

Von Josef Schmidt.

I. Genesis der infinitesimalen Vorstellungen.

er neue Normallehrplan der Realschulen schreibt für die se das „Herausarbeiten der im bisherigen Lehrstoff der natik und Physik gegebenen Anwendungen einfachsten nzierens und Integrierens“ vor und gibt in den beigefügten tungen auch eine Direktive für die methodische Behandlung ire vom Differentialquotienten.

s sei „vor dem Mißverständnisse gewarnt“, heißt es da, ndle es sich um ein systematisches Differenzieren auch er elementaren Funktionen (geschweige denn Funktionen nktionen). Vielmehr sollen jene Anfangsgründe des Diffe- ens (und Integrierens), die in diesem Jahrgange in Form wendungen auf den schon bisher gepflegten Lehrstoff dem zum deutlichen Bewußtsein gebracht werden, nachdem er früher (z. B. im Physikunterricht bei den Geschwindig- nd Beschleunigungen) Vorblicke auf den Begriff des Diffe- uotienten getan hat, nicht als ein eigentlich neuer, auf Fall aber als ein den Schüler mehr belastender Lehrstoff elt werden, sondern eine Vertiefung und dadurch sogar reinfachung des bisher Verlangten bilden“.

ie Einverleibung der elementarsten Sätze der Infinitesimal- g in das mathematische Lehrpensum soll also nach den nen der Unterrichtsverwaltung nicht zu einer Vermehrung rstoffes führen, sondern sie soll eine neue Art des Unter- ufdecken. Damit ist auch schon gesagt, daß der Weg den hulen nicht zu empfehlen ist, den der Hochschulunterricht nen einleitenden Betrachtungen einschlägt. Der Gelehrte n nur den Postulaten der Wissenschaft gerecht zu werden, idagogen aber, dessen Beruf es ist, Einsicht in die Kultur- lung der Menschheit zu gewähren, obliegt nicht so sehr tematische Aufbau als die der Auffassung seiner Schüler chendste Darbietung seines Gegenstandes. Er wird sich or Augen halten müssen, daß die Mathematik nicht nur eine in ist, welche aus gegebenen Prämissen nach logischen Schlüsse zu ziehen hat, sondern, daß in ihr zwei Kräfte n sind: die schaffende Phantasie und die zügelnde Ver-

nunft. Er soll es auch nicht verschmähen, gewisse Wa
induktiv finden zu lassen und der Deduktion erst dann
Rechte verhelfen, wenn das Bedürfnis nach ihr geweckt
kann sich zur Rechtfertigung seines Verfahrens auf die hi
Entwicklung seiner Disziplin unter dem Hinweis auf
genetische Grundgesetz berufen. Jedenfalls aber soll de
gang einer Wissenschaft bei methodischen Erwägungen m
Gewichte zur Geltung kommen.

Aus den vorstehenden pädagogischen Leitsätzen er
die Disposition unserer Arbeit von selbst. Wir haben
die Genesis der infinitesimalen Lehre zu betrachten, um
Grund der Kritik derselben die Normen für ihre me
Behandlung aufzustellen. Wir hoffen so zu einer natu
Methodik zu gelangen, welche die Fassungskraft der Sch
die Forderungen der Wissenschaft in gleicher Weise berüc
so daß wir nicht mit Fontaine gezwungen sind, unser päda
Bekenntnis in dem Satze zusammenzufassen: „Admett
finement petits comme une hypothèse, étudiez la pra
calcul et la foi vous viendra."

1. Das Tangentenproblem.

Es kann nicht in unserer Absicht liegen, die histor
wicklung dieses Problems in allen Einzelheiten zu verfol
Stellung zu nehmen zu den verschiedenen Streitfrage
die Autorschaft der einzelnen Sätze betreffen. Es gn
unsere Zwecke, die Gedanken, welche zu dem Infinitesn
hinleiten, kennen zu lernen, wobei wir uns behufs lei
ständigung der modernen Schreibweise bedienen wolle.

Wir können davon absehen, die Sätze, welc
Archimed und Apollonius über Tangenten und ihre Kons
ausgesprochen haben, anzuführen, und können unsere
samkeit gleich Descartes zuwenden. Descartes (1596—6
handelt das Tangentenproblem als Normalenaufgabe, n
die Normale als Radius des Kreises bestimmt, welch
treffende Kurve in dem gegebenen Punkte berührt.
fahren wollen wir an dem Beispiel der Parabel kenn
Es sei (Fig. 1) $ED = r$ und $SE = z$; dann ist

$$(x - z)^2 + y^2 = r^2.$$

Soll der Kreis die Parabel im Berührungspunkt de
berühren, so muß die Diskriminante der Bestimmung
für y:

$$y^4 - 2\,(2p\,z - 2p^2)\,y^2 = 4p^2\,(r^2 - z^2)$$

verschwinden und es folgt dann für y^2 der Wert $2p$
daher für z: $x + p$, womit die Aufgabe erledigt ist.

Wesentlich mehr als die Kartesianische Metho
schon bei rationalen Kurven höheren Grades versagt, ei
welche Fermat (1601—1665) zur Lösung des Tangent

n hat. Fermat schlägt, um die Tangente in dem Punkte rtesianischen Blattes (Fig. 2) mit der Gleichung

$$1.) \ldots\ldots x^3 + y^3 = 3axy$$

en, folgenden Weg ein. Er stellt für einen M benachbarten N zufolge der Kurvengleichung die Beziehung auf:

$$(x - e)^3 + NQ^3 = 3a\ (x - e)\ NQ$$

stituiert in dieser Gleichung für NQ den davon wenig denen Wert:

$$2.) \ldots\ldots JQ = \frac{y\,(s - e)}{s}$$

elation, welche bei festgehaltener Bezeichnung für jede enützt werden kann) und erhält unter Berücksichtigung und mit Vernachlässigung von Gliedern mit e^2:

$$s = \frac{axy - y^3}{x^2 - ay.}$$

t Recht hebt Fermat die Vorzüge seiner Methode gegen- von Descartes hervor, nämlich daß sie die direkte Ver- der Kurvengleichung erlaubt und daß sie auch auf dente Kurven Anwendung finden kann, wie er unter anderem ykloide zeigt. Wenn (Fig. 3) die Bezeichnungen $OM' = r$, ', $AP = s'$, $SP = x$, $MP = y$ gebraucht werden, ist der gsgang im wesentlichen folgender:

nächst ist die Kurvengleichung:

$$y = r\varphi + r \sin \varphi$$

lich auch:

$$QN = r.\varphi - \text{arc } M'N' + N'Q$$

enähert:

$$JJ = r\varphi - M'J' + J'Q = r\varphi - \frac{t'\,e}{s'} + \frac{r \sin \varphi}{s'}\,(s' - e).$$

raus folgt mit Rücksicht auf die Kurvengleichung und

$$s = \frac{y\,s'}{t' + r \sin \varphi}.$$

il nun

$$\frac{t'}{r \sin \varphi} = \frac{s' - x}{x}, \text{ also:}$$

$$\frac{t' + r \sin \varphi}{s'} = \frac{r \sin \varphi}{x} = \frac{y}{s} \text{ ist,}$$

$T \parallel M'S$ und damit die Tangente gefunden.

Grundgedanke der Fermat'schen Methode kann kurz sgesprochen werden, daß die Gleichung:

$$\frac{s}{s + e} = \frac{y}{QJ}$$

rgeht in:

$$\frac{s}{s + e} < \frac{y}{QN} \text{ bezw. } \frac{s}{s + e} > \frac{y}{QN}$$

daß aber für sehr kleine e

$$\frac{s}{s+e} = \frac{y}{QN}$$

angenommen werden kann.

Wir sehen also, daß die Leistungsfähigkeit der Fr
Methode zur Lösung des Tangentenproblemes außer
setzt ist. Nur das ist zu bemängeln, daß sie ohne
verwendet wird.

Noch mehr tritt das Rezeptartige in dem Verfahr
René François de Sluse (1622—1685) befolgt, hervo
für die Auffindung der Subtangente s einer rationalerk
Regel auf, welche aus den zwei folgenden Beispiele
gelesen werden kann. Wenn gegeben ist:

$$x^{n+1} - cx^n + by^n = o,$$

so schreibe man:

$$(n+1)\, x^n s - n c s x^{n-1} = -b n y^n,$$

für

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

aber bilde man zunächst

$$x^3 - 3axy$$

und

$$-y^3 + 3axy$$

und verfahre dann ähnlich wie beim ersten Beispie
die Bestimmungsgleichung ersten Grades für s:

$$3x^2 s - 3asy = -3y^3 + 3axy$$

zu erhalten.

Auf Grund von Ueberlegungen mechanischer a
Roberval (1602—1675) dem Tangentenprobleme liz
indem er zur Tangentenkonstruktion den von ihr
Satz vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten ini
Kurven, deren Entstehung leicht auf die Zusammens z
Bewegungen zurückgeführt werden kann, war der ob
Gedanke von überraschender Einfachheit.

Bei der Zykloide zum Beispiel (Fig. 3) ist er
zwei gleichförmigen Bewegungen in der Richtung W
unterworfen, folglich ist die resultierende Bewegung ic
somit die Tangente durch die Halbierende MT des Vi
gegeben. Ebenso leicht ergibt sich nach diesem eri
Tangentenkonstruktion im Punkte P der Archimedi ch
(Fig. 4).

Bei anderen Kurven, wo die Geschwindigkesv
der zu komponierenden Bewegungen nicht so gut u
sind, führt es nicht so rasch zum Ziele und kann, w: es
selbst bei den Tangentenkonstruktionen der Kegsch
widerfuhr, zu nicht gerechtfertigten Folgerungen ve eit

Exakter als Roberval ging Barrow (1630—177
beweist den Satz, daß jeder Punkt M einer Kurve (Fi

Geschwindigkeit bewegend gedacht werden kann, welche zu komponierenden Geschwindigkeiten TP und PM re- der mit anderen Worten, daß der die Kurve beschreibende l sich im betreffenden Moment mit der Tangential- digkeit weiter bewegt. Barrow hat auch als erster die g des später sogenannten charakteristischen Dreieckes annt. Bei seiner Berechnung gebraucht er die Bezeich- MR = a, NR = e und nimmt beim Grenzübergang

$$e : a = s : y \ldots . \quad 3.)$$

Rechnung selbst führt er in folgender Weise durch: Koordinaten des Punktes N : x', y', so ist wegen MF

$$(x' + e + \frac{p}{2})^2 = (x' - e - \frac{p}{2})^2 + (y' - a)^2,$$

n höhere Potenzen von e und a fortgeworfen werden:

$$2 a y' = 2 p e$$

gen 3.), da dann statt x' und y', resp. x und y zu ist:

$$s = \frac{y^2}{p} = 2 x.$$

rübrigt noch, ein Wort über die Inversion des Tangenten- s zu sagen. Da ist zunächst Kepler (1571—1630) zu der folgenden Satz beweist: „Wird die eine Kathete htwinkligen Dreieckes halbiert und auch im Verhältnis ren Dreiecksseiten geteilt und gehen durch den Scheitel gegenüberliegenden Winkels verschiedene Kegelschnitte derart, daß sie sich gegenseitig berühren und die Hy- als Tangente haben und daß ihr Hauptscheitel auf der Kathete liegt, so sind alle Kegelschnitte zwischen dem Punkt und dem Halbierungspunkt Hyperbeln; die Kurve, durch den Halbierungspunkt geht, ist eine Parabel; dieser und dem Punkte der proportionalen Teilung ufrechte Ellipsen jeder Art; durch den Teilungspunkt Kreis; endlich die Kegelschnitte von hier ab bis zur Kathete sind liegende Ellipsen von jeder Art." (Neue trie der Fässer, übersetzt von R. Klug.)

voller Klarheit hat Beaune (1601—1652) die Frage- bei der Umkehrung des Tangentenproblemes erfaßt. Er nach ihm benannte inverse Tangentenaufgabe: Die r der Kurve zu finden, für welche die Beziehung Gel- en soll:

$$y : s = a : (y - x),$$

e beliebige gegebene Strecke ist und die anderen Buch- e frühere Bedeutung haben; er gab damit den Mathe- ein Problem, dessen Schwierigkeiten zu bewältigen erst 1646—1716) gelang.

2. Diorismus.

Schon frühzeitig hatten die griechischen Geometer
behandelt, ob eine Aufgabe bei den gegebenen Best
stücken lösbar sei, wieviel Lösungen sie zulasse un
welcher Grenze eine gegebene Größe sich ändern di
daß die gestellte Aufgabe illusorisch würde. Zu Pla
wurde auch für derlei Untersuchungen der Kunstausdruc
Diorismus (lat.: Determination).

Die einfachste Funktion, welche Anlaß zu einer Det
gibt, ist in der Form

$$y = ax^2 + bx + c$$

gegeben. Sie wurde auch zuerst determiniert, nämlich
(um 300 v. Chr.), der geometrisch bewies, daß x (a
$x = \frac{a}{2}$ seinen größten Wert erhält.

Archimedes (287—212 v. Chr.) behandelt bereits
gabe 3. Grades: Eine Kugel durch eine Ebene so zu
daß sich die Volumina der Segmente wie a : b verh
Apollonius (um 200 v. Chr.) bewältigt Aufgaben 3. und
mit staunenerregender Gewandtheit. Ein Beispiel, das
löst, soll hier skizziert werden. Es sei anzugeben, wie
malen von einem Punkte innerhalb einer Parabel an die
werden können. Apollonius gibt folgenden Diorismu
(Fig. 1) SM = f und UL = g. Ist $f < p$, so ist an der
eine Normale möglich. Ferner können keine oder eine
Normalen zu dem Kurvenstück jenseits der Achse gefül

je nachdem $g \gtreqless K$ ist, wo K als 4. geometrische Pro

zwischen p, $\frac{2}{3}(f - p)$ und $\sqrt{\frac{2p}{3}(f - p)}$ zu bestimme

Daß Apollonius die Aufgabe richtig determiniert
wir leicht auf folgende Weise: Offenbar besteht die

$$(g + y) : (f - x) = y : p$$

oder unter Benützung von

$$y^2 = 2p\,x$$

als Gleichung geschrieben:

$$y^3 - 2p(f - p)y + 2p^2 g = o.$$

Für $f < \frac{a}{2}$ hat die Gleichung eine negative Wurzel,

nur eine Normale diesseits der Achse möglich. Für f

die Uebereinstimmung der Proportion des Apollon
Diskriminante unserer Gleichung die Richtigkeit seiner F

Von den Untersuchungen Pappus' (Ende des 3. J
n. Chr.) über Maximal- und Minimalaufgaben erwähn
eine Zahl a in 2 Teile so zu zerlegen, daß ihr Produkt

lt. Ist der kleinere Teil $x = \frac{a}{2} - y$, der größere somit
) ist augenscheinlich:

$$x(x + 2y) < (x + y)^2, \text{ also kleiner als } \frac{a^2}{4},$$

eder Teil von $\frac{a}{2}$ verschieden ist.

Kepler beschäftigt sich mit Aufgaben über extreme
s sei nur folgender Satz angegeben: „Unter allen Zy-
t gleicher Diagonale ist derjenige der größte, dessen
ımesser sich zur Höhe verhält wie $\sqrt{2}:1$ (Neue Stereom.).
is dieses Satzes läßt sich nach dem Fermat'schen Ver-
:ht liefern. Sind D, h, d, beziehungsweise Diagonale,
Zylinders und Durchmesser seines Basiskreises, so ist:

$$V = \frac{\pi}{4} (D^2 - h^2) h.$$

: man für h $h + e$ ein und vernachlässigt zweite und
tenzen von e, so ergibt sich

$$D^2 = 3 h^2, \text{ also}$$
$$h^2 : d^2 = 1 : 2.$$

ag darauf hingewiesen werden, daß damit auch die
ledigt ist, wie das Verhältnis der Dicke und Höhe eines
ı wählen ist, damit der Balken möglichst stark werde,
usgesetzt ist, daß die Stärke desselben proportional
ukt der Dicke und dem Quadrat der Höhe ange-
/ird.

hier ist wieder zu sagen, daß Fermat viele Aufgaben
ne Werte, deren Schwierigkeiten vor ihm nicht über-
ırden, bewältigen konnte, daß er aber die Begründung
fahrens schuldig blieb.

mechanisch verfuhr Hudde (17. Jahrhundert), der ohne
einen Beweis hiefür zu versuchen, einfach die Vorschrift
einzelnen Termen eines rationalen Polynoms mit der
nden Gradzahl der Veränderlichen zu multiplizieren, um
timmungsgleichung für die Werte der Veränderlichen
ı, für welche die gegebene Funktion einen Maximal-
nalwert erreicht.

als Fermat und Hudde ging Huygens (1629—1695)
auf den Grund, wenn er auch nicht zur vollen Einsicht
ei Aufgaben über extreme Werte zutage tretenden Ver-
elangen konnte. Huygens stellte sich die Aufgabe, den
Fig. 5) so zu bestimmen, daß $\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$ ein Minimum
enn ein solcher Punkt C existiert, so müssen 2 Punkte
in der Umgebung von C ausfindig gemacht werden
r welche die Relation

$$\overline{AF}^2 + \overline{BF}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 > \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

Bei Benützung der Bezeichnungen: AE = a, BD = b,

ED = c, EF = x und FG = e haben wir als
$a^2 + b^2 + c^2 - 2ex + 2x^2 = a^2 + b^2 + e^2 - 2cx^2 + 2x^2 - 2ec$
oder in Funktionszeichen:

$$f(x) = f(x + e) = f(x) + e\varphi(x) + e^2\psi(x)$$

oder:

$$\varphi(x) + e\psi(x) = o.$$

Fallen nun F und G mit C zusammen, ist also e =
$\varphi(x) = o$ und damit ist die Entfernung des Punkte
durch eine Gleichung bestimmt. Daß dieses Verfahr
liebige rationale Funktionen (auch auf gebrochene, w
zeigte) übertragen werden kann, ist ohneweiters ei
Die Gleichung im Funktionszeichen zeigt uns, wie na
dem Kernpunkt der Sache war.

3. Exhaustion.

Zu allen Zeiten brachten die Mathematiker beso
esse jener Art von Aufgaben entgegen, welche die
krummer Linien mit Strecken (Streckung, Rektifikation
ebener Flächen mit Quadraten (Quadratur), der Vo
Würfeln (Kubatur), krummer Flächen mit Ebenen (Eb
planation) verlangen.

In der Aufstellung solcher metrischen Beziehungen
geometrischen Gebilden zeigten vor allem die griechis
thematiker einen bewunderungswürdigen Scharfsinn, de
fähigte, mit dem geringen Rüstzeug, das der damalige
schaft zu Gebote stand, die schwierigsten Problem
An erster Stelle ist die Euklid'sche Methode zu nen
wesentlichen Inhalt wir an dem folgenden Beispiele kn
wollen:

Es sei nachzuweisen, daß sich die Flächen zwe
wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten. Man
einem der Kreise das eingeschriebene Quadrat, dan
vier Segmenten die vier eingeschriebenen gleichschenkli
ecke, von den übrigbleibenden Segmenten wieder d
schriebenen gleichschenkligen Dreiecke usw. bis er
bende Rest (also die Differenz zwischen dem Kre
entsprechend eingeschriebenen regelmäßigen n-ecke k
als eine beliebig vorgegebene Fläche. Bezeichnen wir
Flächen der zu vergleichenden Kreise mit K_1 und K_2, ih
messer mit d_1 und d_2 und die Flächen der eingeschrieb
lichen Polygone mit V_1 und V_2 (für welche also $V_1 V_2$
gilt), so kann man mit Benützung des vorgeschickten Sa
nachweisen, daß

$$K_1 : K_2 = d_1^2 : d_2^2 \text{ ist;}$$

denn wäre das nicht der Fall, also etwa

$$K_1 : K_2 < d_1^2 : d_2^2,$$

rte gewiß eine Fläche F, welche der Verhältnisgleichung:

$$K_1 : F = d_1^2 : d_2^2$$

wo $F < K_2$ wäre. Denken wir nun dem Kreis K_2 ein ges Vieleck $V_b > F$, was nach dem früheren möglich ist, ieben, so müßte, wenn das im Kreis K_1 eingeschriebene, ıe Polygon mit V_a bezeichnet wird, die Proportion be-

$$V_a : V_b = K_1 : F,$$

en $V_a < K_1$ auch $V_b < F$ sein, was mit der Voraussetzung ı Widerspruch steht. Daher ist

$$K_1 : K_2 < d_1^2 : d_2^2$$

Ebenso läßt sich zeigen, daß auch

$$K_1 : K_2 > d_1^2 : d_2^2$$

somit nur

$$K_1 : K_2 = d_1^2 : d_2^2$$

in kann. Das Verfahren, das wir soeben an einem Bei- ınen gelernt haben und welches zur Grundlage den ıen Satz (10. Buch, 1) hat: „sind zwei ungleiche Größen und nimmt man von der größeren mehr als die on dem Rest wieder mehr als die Hälfte u. s. f., ıt man irgend einmal auf einen Rest, welcher kleiner die gegebene noch so kleine Größe“, wurde auch ufig zum Nachweis geometrischer Sätze benützt. Auch es befolgt das Euklid'sche Verfahren noch in vielen duktionen, er sah sich aber wegen des Umstandes, daß len Fällen zu Irrtümern verleiten könne, veranlaßt, es ıe logisch ganz einwandfreie Methode zu ersetzen, die e Exhaustionsmethode, die den Gebrauch des modernen riffes vorbereitet und zu dem Integralkalkül, von dem tlich nur formal verschieden ist, hinleitet.

Wichtigkeit der Sache rechtfertigt es, wenn wir in einem s ausführlicher auf den Archimedischen Syllogismus ein- Wir wählen das Beispiel von der Quadratur der nach nnten Schneckenlinie. Archimedes beweist zunächst fol- ilfssatz (περὶ Ἑλίκων, übersetzt von Ernst Nizze): „Wenn willkürliche Anzahl von Linien annimmt, die nach der iche Unterschiede haben, so daß die kleinste dem Unter- elbst gleich ist und wenn eine ebenso große Anzahl inien angenommen wird, welche einzeln der größten von ich sind, so wird die Summe aller Quadrate von denen, er größten gleich sind, nebst dem Quadrate der größten l dem Rechteck unter der kleinsten und einer Linie, welche ist, als die Summe aller um gleiche Unterschiede ver- en, dreimal soviel betragen, als die Summe aller Quadrate gleiche Unterschiede verschiedenen Linien. . . . . Wenn ähnliche Figuren auf allen Linien beschrieben werden, auf denen, deren Unterschiede gleich sind, als auf denen, ler Größten gleich sind, so wird die Summe der Figuren,

welche auf den der Größten gleichen Linien beschrie
kleiner sein, als das Dreifache der Summe der auf
mit gleichen Unterschieden beschriebenen Figuren“ u
die Fläche, welche von einer beim ersten Umlaufe bes
Schneckenlinie und von der ersten geraden Anfang
schlossen wird, angenommen ist, so läßt sich un
eine ebene, aus ähnlichen Ausschnitten bestehende
eine andere darin beschreiben, so daß die äußere
innere um weniger übertrifft als irgendein vorgelegte
raum.“ (Siehe Fig. 4.) Diese zwei Sätze dienen dem B
Satzes: „Die Fläche der ersten Schneckenlinie ist dem
des ersten Kreises gleich“ zur Grundlage. Es sei
dieses Kreises F, die Summe der eingeschriebenen Kreis
die der umschriebenen U, die Fläche des ersten Kreise
Wäre nun

$$F > \frac{K}{3},$$

so könnte man nach dem vorhergehenden Satze U —
machen; dann wäre aber wegen $E < F$ auch $U < \frac{K}{3}$
spruch mit $U > \frac{K}{3}$.

Analog läßt sich die Unhaltbarkeit der Annah
nachweisen, folglich ist, wie behauptet:

$$F = \frac{K}{3}.$$

Die Archimedische Betrachtungsweise wurde in de
Jahrhunderten von den Geometern fleißig geübt un
manchen neuen Errungenschaften. So hat Pappus d
funden, daß die Fläche, welche von der sphärischen p
der Basis eines Kugelquadranten begrenzt ist, dem Qa
Durchmessers der Kugel gleich ist. Infinitesimale Be
führen ihn zur Aufstellung der baryzentrischen Rege
male Betrachtungen liegen auch dem Beweise zugu
Kepler für ihre Richtigkeit gibt. Kepler denkt sich
durch Rotation irgend einer Kreis- oder elliptischen Fl
eine vertikale Achse entstehenden Körper durch Ebe
die Achse enthalten, in sehr viele und sehr kleine Sc
also gleichsam abgeschrägte Zylinder zerlegt. Je
Scheibchen zwischen je zwei benachbarten Ebenen, ets
nebeneinander gelegt, geben einen Zylinder und die Sm
kleinen Zylinder den Inhalt des Rotationskörpers.
von derartigen infinitesimalen Betrachtungen gesagt
sie die logische Schärfe, das hervorstechendste Attrib
medischen Verfahrens, missen lassen und daß sie selbst

und Verallgemeinerung der Exhaustion nichts beitrugen.
'alieri (1591?—1647) ging, was das Formalprinzip der
on anbelangt, uber Archimedes hinaus, was ihm zum
erdienst angerechnet werden muß, trotzdem seinen Dar-
die wünschenswerte Evidenz fehlt.
; Fundament seiner Geometrie kennzeichnet Cavalieri mit
ten: „Um das Verhältnis zweier ebener oder räumlicher
kennen zu lernen, genügt es, das Verhältnis der Gesamt-
er von irgend einer regula aus beginnenden Geraden oder
zu finden." (Cantor, Geschichte der Mathematik.) So ver-
ch zum Beispiel zwei zur Basis parallele Schnittflächen
ramide wie die Quadrate der zugehörigen Höhen und
mtheiten dieser Flächen (eigentlich untersinnlich vorstell-
smen, Indivisibilien) verhalten sich zum Prisma mit der-
Basis und derselben Höhe wie 1 : 3, wie Cavalieri auf
em geometrischen Wege feststellt. Führt die oben ge-
egula zu Kuben oder Biquadraten, so lautet das Ver-
1 : 4, beziehungsweise 1 : 5.
sehen also, daß Cavalieri von der Existenz eines für
gaben gleichlautenden Formelprinzipes wußte, während
nur die einzelnen Fälle 1 : 2, 1 : 3 kannte, ohne an die
einerungsfähigkeit seiner Ideen zu denken.
dem Wege, den Cavalieri gewiesen, ging Torricelli
647) weiter. So gelang ihm die Kubatur der hyper-
Körper. Besonders erwähnenswert ist die von ihm
ie Quadratur der Zykloide wegen der großen Einfachheit,
uszeichnet. Es sei PS = CG (Fig. 3), dann ist

$$FH = a\,(\pi - \omega)$$
$$MM' = a\,\omega$$
$$FH + MM' = a\,\pi,$$

Fläche $BCHM'SMFB = a^2\pi$ und somit die Zykloiden-
$a^2\pi$.

Gegensatze zu Cavalieri suchte John Wallis (1616—1703)
hmetischem Wege jene für die Auflösung der mannig-
Aufgaben wichtigen Verhältniszahlen 1 : 3, 1 : 4 usw.,
er quadratischen, kubischen . . . regula entsprechen, zu
. Er berechnete nämlich $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, $\frac{0+1^2+2^2}{2^2+2^2+2^2} =$
$\frac{0+1^2+2^2+3^2}{3^2+3^2+3^2+3^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$ usw. und schloß aus der Ab-
er Reihe $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18} \ldots$, daß

$$\lim_{r=\infty} \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + r^2}{r^2 + r^2 \ldots + r^2} = \frac{1}{3}.$$

diesem induktiven Wege fand er die allgemeine Be-

$$\lim_{r=\infty} \frac{1^K + 2^K + \ldots + r^K}{r^K + r^K + \ldots + r^K} = \frac{1}{K+1},$$

deren Richtigkeit er auch für irrationale Werte von K e

Damit hatte Wallis das Problem der Quadratur in e gemeinen Weise erledigt, wie es selbst Fermat (siehe Geschichte der Mathematik, II.) nicht imstande war. I Falle allerdings versagte seine Methode, im Falle K = bei der Quadratur der gleichseitigen Hyperbel $xy = a^2$.

Diese hatte aber bereits im Jahre 1647 Gregorius Vincentio (1584—1667) gefunden, und zwar durch den Log der Abszisse, wenn a und a^2 als Längen- beziehungsv Flächeneinheit gewählt wird.

Brouncker (etwa 1620 — 1684) hatte im Jahre 16 Hyperbelfläche durch eine Reihe darzustellen verstander Schlußfolgerungen sind in einer von ihm allerdings nicht ge Verallgemeinerung die folgenden: Ist CD = m, DF = ED = EF, xy = 1, so gelten die Gleichungen:

$$MD = \frac{1}{m}, \quad PF = \frac{1}{m+n}, \quad NE = \frac{2}{2m+n}, \quad NH = \frac{}{(m+n)^2}$$

$$NHGK = \frac{n^2}{2(m+n)(2m+n)}.$$

$$\text{area } DFPNMD = \frac{n}{m+n} + \frac{n^2}{2(m+n)(2m+n)} -$$

$$+ \frac{n}{4} \cdot \frac{\frac{n}{2}}{(m+\frac{n}{2})(2m+\frac{n}{2})} + \frac{n}{4} \cdot \frac{\frac{n}{2}}{(m+n)(2n+3\frac{n}{2})} +$$

also zum Beispiel:

$$\lg 2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \ldots.$$

Erwähnt sei noch, daß Mercator (1668) die Reihen lung für den Logarithmus dadurch gewann, daß er die y gleichung in der Form $y = \frac{1}{1+x}$ annahm und die Divi

$$1 : (1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

nach der gewöhnlichen Regel ausführte (was erlaubt t, $x < 1$ ist); durch Integration jedes einzelnen Termes fa

$$\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots.$$

Zum Schlusse dieses Kapitels sei noch die Rekif onsmethode angeführt, welche Heuraet im Jahre 165 ge hatte. Er zeigte nämlich, daß man die Rektifikation e er (zum Beispiel der Parabel) auf die Quadratur einer andern führen kann, wenn die Proportion gilt (Fig. 7):

$$a : KC = DC : DN,$$

wo a eine beliebige Strecke bedeutet. Für die Parabel au Proportion:

$$a : KC = 1 : \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}};$$

st für $a = p$

$$y^2 - x^2 = p^2.$$

kann man nach dem früher angegebenen Satze von ; area A C K B leicht berechnen. Es ist nämlich:

$$ACBK = (ACG + AEB - GFK) + EB\,KF =$$

$$= \frac{1}{2}\, x \sqrt{p^2 + x^2} + \frac{1}{2}\, p^2 \lg (x + \sqrt{p^2 + x^2});$$

der Parabelbogen A D nach dem Satze von Heuraet:

$$\frac{x}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{p}\right)^2} + \frac{p^2}{2} \lg \left[\frac{x}{p} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{p}\right)^2}\right].$$

(Fortsetzung folgt.)

SCHULNACHRICHTEN.

I. Lehrplan.

ht wurde nach dem Normallehrplan vom 28. April 1898 erteilt

Stundenübersicht.

rgegenstände	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	Summe
. . . . .	2	2	2	2	2	2	1	13
ssprache (Deutsche e)	4	4	4	4	3	3	4	26
he Sprache	6	5	5	3	3	3	3	28
Sprache	—	—	—	—	3	3	3	9
e	3	2	2	2	—	—	—	9
e	—	2	2	2	3	3	3	15
ik	4	3	3	3	5	4	5	27
hichte	2	2	—	3	2	2	3	11
. . . . .	—	—	—		3	2	—	8
. . . . .	—	—	3	2	—	4	4	13
ches Zeichnen	—	2	2	3	3	3	2	15
eichnen	4	4	4	4	3	2	3	24
. . . . .	1	1	—	—	—	—	—	2
. . . . .	2	2	2	2	2	2	2	14
Summe . . .	28	29	29	30	32	33	33	214

Unobligate Lehrgegenstände.

in zwei Kursen zu je 2 Stunden wöchentlich (IV. u. V. Klasse).
wei Kursen zu 2 und 1 Stunde wöchentlich.

die deutschen Aufsätze in der V. Klasse. 1. Wie entsteht eine (H.) 2. Das Wasser als Wohltäter. (S.) Der Stein im Dienste enschheit. (S.) Nach Wahl. 3. Welchen Einfluß haben die geo- schen Verhältnisse des alten Griechenlands auf die Entwicklung riechischen Nation genommen? (H.) 4. Welche Hindernisse hat eus auf Ithaka zu überwinden, bevor er wieder in den Besitz alten Güter kommt? (S.) 5. Rom ist nicht an einem Tage erbaut n. (H.) 6. Das Meer als Freund und Feind des Menschen. (H.) lankengang der Elegie: Pompeji und Herkulanum. (S.) 8. Was treibt enschen in die Ferne? (H.) 9. Welche Vorteile bietet der Auf- t in einer Großstadt? (S.) Willst du, daß wir mit hinein — In aus dich bauen — Laß es dir gefallen, Stein, — Daß wir dich en. (Rückert.) Nach Wahl. 10. Im Unglück halt aus, im Glück in. (H.)

türe. V. Klasse. Lektüre epischer und lyrischer Dichtungen prosaischer Musterstücke aus dem Deutschen Lesebuche von Jelinek-Streinz. Auswahl aus der altklassischen Literatur und Homer, Vergil, Ovid. Ferner Schillers „Jungfrau von Orleans", rzers „König Ottokars Glück und Ende", Otto Ludwigs „Zwischen el und Erde" und Immermanns „Oberhof".

II. Lehrmittelsammlungen.

Die Unterrichtsbehelfe haben im Schuljahre 1908/9 nachst
zeichnete Vermehrung erhalten:

1. Geographisch-historische Lehrmittelsammlu

Ankauf. Sydow-Habenicht, England, Spanien, Rußlan
haus, Chart of the world. — Bamberg, Geologische Karte v
land. — Reichel, Carte de France. — Umlauft, Wandplan v
Pendl, Vogelschauplan von Wien. — Lehmann, 2 kulturg
Bilder.

Geschenk des k. k. M. f. K. u. U.: Landkarte des österr. Llo
Verwalter: Prof. Dr. Erwin H

2. Naturhistorische Lehrmittelsammlung.

Ankauf. Pturtscheller, 8 zool. Wandtafeln. — Schmi
Wandtafel. — Jung, 10 botan. Wandtafeln. — 1 Sammlung von
Flechten. — 1 Blasentang (Spirituspräp.). — 2 Mikroskope. 3
Präparate. 1 Mikroskopbesteck. — 1 Karton f. exot. Schmetterlin

Geschenke. 14 Stück Mikrostereogramme (M. f. K. u. U.).
bussard (Herr akad. Fechtmeister Otto Soyka). — 2 See
Bruno, Ia).

Verwalter: Prof. A. I

3. Physikalische Lehrmittelsammlung.

Ankauf. Heliostat, 2 sphärische Spiegel, 2 Spektraltafeln A
Totalreflexion, Nebenapparate zur Influenzmaschine, Stoßappar
maschine, Apparat für den Druck im Innern von Flüssigkeiten, la
kraftapparat, Zahn- und Lochsirene, 1 Vorlesungs-Voltmeter,
Ampèremeter, 1 Lot, 1 Dosenlibelle, 1 Endosmoseapp., 1 Sirene, ei
Orgeltisch, 1 Akkumulatorenbatterie, 3 Zugfedern, 2 Druckfede
lampe, 1 Blechschere, 1 Satz Korkbohrer, 1 Stoppelglas, 1 Glasrit
stoppelflasche, 5 Schachteln für Apparate, Bechergläser, Kochfla
gläser, 2 Zangen, 1 Bund Glasröhren.

Geschenke. 1 Dynamomaschine (R. v. Hitzinger, III
motor (Rys, III a).

Verwalter: Prof. Jos. Schmidt (I. Sem). Franz Knap

4. Lehrmittel für Geometrie.

Ankauf. 4 Modelle für den Projektionsapparat (schnei
parallele Gerade, kreuzende Gerade, 1 Dreieck mit projiziere
1 Modell zur Erklärung der Drehung eines Punktes und ein
Raume, 3 Modelle zur Demonstration stereometrischer Lehrsät
Pyramide, 1 vierseitiges Prisma.

Verwalter: Prof. Erns

5. Lehrmittel für Chemie und Mineralog

Ankauf. Chemie: 3 Kühler, 1 Trockenschrank aus Ei
verkleidung und Vierfuß, großer Verbrennungsofen, Stativ na
Universalstativ, 2 Gasometer, Kippscher Apparat, 3 Waschflaschen
4 Woulffsche Flaschen, 5 Auffangzylinder, 10 Reagenzkelche, 5 trul
7 Retorten, 6 Erlenmayer-Kolben, 4 Vorlagen, 23 Kugelröhren,
4 Verbrennungsröhren, 9 harte Eprouvetten, 3 Glastrichter, 7 Ftor
Glasröhren, 6 Kolben, 4 Chlorkalziumzylinder, 1 Satz Bech
Uhrgläser, 8 U-Röhren, 5 T-Stücke, 2 Schalen aus Berliner P
zellantiegel, Reibschale mit Pistill, 6 Porzellandreiecke, 5 Schm

nteller, 20 Quetschhähne, 1 Schere, Platindrähte und Platinasbest, , Gummistöpsel, Korkplatten, Gummiblasen, Filtrierpapier, Curcuma- ntien.

r a l o g i e: Doppelspat-Island, Pyrit-Orawicza, Pyrit-Elba, Cölestin- t-Felsöbanya, Apatit-Kanada, Granat-Oetztal, Malachit-Ural, Rauch- hard, Hessonit-Piemont, Sandstein-Fontainebleau, Aragonit-Herren- -Frizzington, Blausalz-Staßfurt, 3 Spaltungsstücke von Steinsalz, aryt-Frizzington, 3 Steinsalzstücke rot und grau von Wieliczka, eno, Markasit-Siegen, Kalzitzwilling-Egremont, Eisenglanz-Elba, les, Bernstein mit Insekteinschluß, 3 Topase für Härteskala, alle-Brasilien, Gipszwilling-Montmartre, Torf-Freiberg, Lignit- unkohle-Böhmen, kristallisiertes Steinsalz-Staßfurt, Schungit- linenkalk-Japan, 31 Gesteinsstufen, 34 Kristallmodelle, Mineralien- tiketten u. s. w. zur Aufstellung und Einordnung der Mineralien.

nke. Vom k. k. naturhistorischen Hofmuseum in Wien: Eisenspat-Quarz-Warstein, Wismut-Joachimstal, Staurolith, Carneol, Band- Topas-Brasilien, Zirkon-Miask, Spinell-Ceylon, Zinnober-Idria, an, Anthophyllit-Dürnstein, Vesuvian-Csiklowa, 2 Bergkristalle- ramit, Schörl-Dürnstein, Eisenspat-Piemont, Schörl-Hafredal, Pech- Ruinenmarmor-Klosterneuburg, Serpentin-Klopfberg, 37 schöne

Verwalter: Prof. Franz N e u g e b a u e r.

6. Lehrmittel für Freihandzeichnen.

ıe & G é r ô m e, 55 Vorlagen für das Kopfzeichnen. — 1 Bussard ır). — The studio. Jahrg. 1909.

Verwalter: Prof. Hugo S o y k a.

ittel für den Turnunterricht und die Jugendspiele.

2 Fußbälle, 8 Fahnen, 2 Netze.

Verwalter: Jos. P a t r y.

8. Lehrmittel für den Gesangsunterricht.

autogr. Abzüge von: Oesterreich, mein Vaterland, von F i b y; n R. H a n k e; Grüße aus der Heimat von K r a m e r; Landluft reundschaft von Haydn; Violinstimmen zur Schubertmesse.

Verwalter: Rud. H a n k e.

III. Bibliothek.

Lehrerbibliothek.

I. Zeitschriften.

Zeitschrift für französische Sprache und Literatur, Bde. XXXII – Zeitschrift für das Realschulwesen, Bd. XXXIV. — Zeitschrift höhere Schulen, Bd. XX. — Zeitschrift für österreichische Gym- . — Zeitschrift für Schulgeographie, Bd. XXX. — Zeitschrift alischen und chemischen Unterricht, Bd. XXII. — Jahrbuch der und Elektronik, Bd. V. — Oesterreichische Rundschau, X. — Oesterreichische botanische Zeitschrift, Bd. LIX. — Bulletin athématiques, T. XXXIII. — Sprachwissenschaft für alle, Bd. I. gen der k. k. Geographischen Gesellschaft in Wien, Bd. VII. — s Allgemeinen deutschen Sprachvereins, Bd. XXIV. — Wiener

Urania, Bd. II. — Germanisch-Romanische Monatsschrift, Bd. I. Zeitung, Bd. XXXIII. — Deutsche Erde, Bd. VIII.

Geschenke. Vom k. k n.-ö. Landesschulrate: Vierteljahrschr liche Erziehung, Bd. IV. — Vom Schüler Grau: Oesterreichisc Zeitung, Bde. XIV, XXVIII und XIX.

2. Werke.

Ankauf. Die Mittelschul-Enquête. — Loos, Sach- und Pe zur Mittelschul-Enquête. — Ostwald, Vorlesungen über Nat — Foerster, Schule und Charakter. — Metzger-Ganzma der franz. Sprache auf Grundlage der Handlung und des Erlebniss Boerner, Histoire de la littérature française. — Quiehl, fra sprache und Sprachfertigkeit. — Walter M., Schriften und Muret-Sanders, Enzyklopädisches englisch-deutsches und lisches Wörterbuch. — Schmidt, Shakespeare-Lexikon. — Sprachleben und Sprachschäden. — Wendt, Enzyklopädie der richts. — Meyer-Lübke, historische Grammatik der französi Bd. 1. — Chamber's Cyclopaedia of English Literature, Bd. — Bleibtreu, Geschichte der englischen Literatur. — Könn atlas zur Geschichte der deutschen Nationalliteratur. — Scobel, Handbuch. — Kirchhoff, Unser Wissen von der Erde. — Die Kultur der Renaissance in Italien. — Friedrich, Allgemein Wirtschaftsgeographie. — Grube, Geographische Charakterbild Charakterbilder aus der Geschichte und Sage. — Neumayer, — Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, Fe — Enriques, Vorlesungen über projektive Geometrie. — Analysis für Ingenieure. — Klein, Anwendung der Differenzial rechnung auf Geometrie. — Seliwanoff, Lehrbuch der Differ — Markoff, Differenzenrechnung. — Cantor, Vorlesungen der Mathematik. — Czuber, Einführung in die höhere Mathema Mathematisches Vokabularium, französisch-deutsch und deutsch Perry, Angewandte Mechanik. — Fournier d'Albe, Die Elektr — Voigt, Magneto- und Elektrooptik. — La Cour und App auf Grund der geschichtlichen Entwicklung. — Hégi, Illustr Mitteleuropa, Lief. 13—17. — Vierhapper und Linsbau Leben der Pflanzen. — Linsbauer L. und Linsbauer K Pflanzenphysiologie. — Tschermak, Lehrbuch der Mineralo busch, Elemente der Gesteinslehre. — Grubenmann, Schiefer. — Wiedersheim, Vergleichende Anatomie der Strasburger, Das botanische Praktikum. — Heumann-Kühn zum Experimentieren. — Ost, Lehrbuch der chemischen Van't Hoff-Meyerhoffer: Stereochemie. — Van't Hoff über theoretische und physikalische Chemie. — Plattner, Lo dem Lötrohre. — Fresenius, Anleitung zur qualitativen chersc — Fresenius, Anleitung zur quantitativen chemischen Analy bein, Entwicklungsgeschichte der Schule Gabelsbergers. — R buch der deutschen Stenographie nach Fr. X. Gabelsberger Cornelius, Elementargesetze der bildenden Kunst. — Jahrbuch Unterrichtswesens 1909.

Geschenke. Wissenschaftliche Mitteilungen aus Bosnien govina, Bd. VII (k. k. Ministerium für Kultus und Unterricht). — Einige Weihnachts- und Neujahrsbräuche der Rumänen (G. Verwalter: Prof. Ph

Schülerbibliothek.

Ankauf. Bienenstein, Erlebnisse eines Wiener Freiwilligen städter, Erichs Ferien. In der Schule. Jugendzeit. Das Rote Dingen. Friedel findet seine Heimat. — Brüning, Wanderunge Natur. — Claretie, Pierille. — Contes de Fées. — Domni Wissenschaft. — Erckmann-Chatrian, Deux contes popula pides statt: Iphigenie auf Tauris. — Frenssen, Peter Mor

Gagnebin, Soeur Vic. — Gleichen-Rußwurm, Die Wartburg
nger. — Goethe, Achilleis. Briefe. Clavigo. Dichtung und Wahrheit
mont. Faust, I. Teil. Faust, II. Teil. Gedankenlyrik. Gedichte. Götz
ıgen. Hermann und Dorothea. Iphigenie auf Tauris. Italienische Reise.
chs. Schriften zur Kunst. Torquato Tasso. — Grillparzer, Die
ın Bruderzwist im Hause Habsburg. Gedichte und Prosa. König
ick und Ende. Sappho. Der Traum ein Leben. Das goldene Vlies.
der lügt — Gudrun. — Hagen-Lenschau, Mittelhochdeutsche
ische Epiker (2 Bde.). — Hebbel, Die Nibelungen. — Heinrich,
dichte. — Henningsen, Erzählungen neuerer deutscher Dichter,
Meistererzählungen fremder Dichter (französische Dichter). Meister-
fremder Dichter (englische Dichter). — Herder, Abhandlungen
ɛr Cid. Ideen zur Philosophie der Geschichte der Menschheit. —
s. Odyssee. — Immermann, Oberhof. — Kahl, Deutsche mund-
ıtungen. — Keller, Die Zeit der Verfolgungen. — Kern, Selbst ist
— Kleist, Die Hermannsschlacht. Der Prinz von Homburg. —
Oden. Der Messias. — Körner, Zriny. — Kradolfer, Wie die
Erde erobert hat. — Lessing, Abhandlungen über die Fabel.
tti. Hamburgische Dramaturgie. Laokoon. Minna von Barnhelm.
ampson. Nathan der Weise. Philotas und Dichter der Friederizia-
. — Loti, Impressions de voyage. — Luther, Auswahl (2 Bde.).
Sans famille. — Möser, Patriotische Phantasien. — Müller,
ɛr Dichterkreis. — Aus Natur und Geisteswelt, Germanische
Der Bau des Weltalls. Dampf und Dampfmaschine. Schrift und
in alter und neuer Zeit. Am sausenden Webstuhl der Zeit. Die
mekraftmaschinen. Das Eisenhüttenwesen. Das Auge des Menschen
esundheitspflege. Die Lehre von der Wärme. Wind und Wetter.
op. Deutsche Schiffahrt und Schiffahrtspolitik der Gegenwart. Die
der Elektrotechnik. Die Funkentelegraphie. Das Licht und die
Stereoskop und seine Anwendung. Das Zeitalter der Entdeckungen.
Der Mond. Die optischen Instrumente. Neuere Fortschritte auf dem
Wärmekraftmaschinen. Bilder aus der Ingenieurtechnik. Die Eisen-
htbare und unsichtbare Strahlen. Der Kalender. Luft, Wasser, Licht
. Schöpfungen der Ingenieurtechnik der Neuzeit. Das Postwesen.
ɔbil. Die technische Entwicklung der Eisenbahnen der Gegenwart.
wicklung in Deutschland (1800—1900). Das deutsche Handwerk in
ɛrgeschichtlichen Entwicklung. Moleküle, Atome, Weltäther. Die
sarten der Gegenwart. Hebezeuge Das Heben fester, flüssiger und
Körper. Bilder aus der chemischen Technik. Natürliche und künst-
ɜn und Tierstoffe. Die Telegraphie in ihrer Entwicklung und Be-
eutschlands Stellung in der Weltwirtschaft. Geschichte des Welt-
undzüge des Versicherungswesens. Das astronomische Weltbild im
Zeit. — Nibelungen, Auswahl im Urtext. Auswahl in neuhoch-
ɜprache. — Nieritz, Der Rattenfänger von Hameln. Lingg von
ein deutscher Biedermann. — Pariselle, Sieben Erzählungen. —
Die Helden der deutschen Wanderzeit. — Platen, Auswahl. —
Les cerises du vallon de Gueuroz. — Reuper, Andreas Hofer und
ıen. — Roland, Eroberer der Lüfte. Zeppelin, ihr Beherrscher. —
Gedichte (2 Bde). — Hans Sachs und andere Dichter. — Saint-
Pour une épingle. — Schiller, Abfall der Niederlande. Die Braut
ı. Briefe. Demetrius. Don Carlos. Fiesko. Gedankenlyrik. Gedichte.
des 30jährigen Krieges. Jungfrau von Orleans. Kabale und Liebe.
:t. Die Räuber. Philosophische Schriften. Wallenstein. Wilhelm Tell.
erbüchlein. — Schmid, Der Jägerwirt von München. —
are, Julius Cäsar. Hamlet. Heinrich IV., I. und II. Teil. Der Kauf-
enedig. Koriolan. König Lear. Macbeth. Richard III. — Sophokles,
ɔne. König Oedipus. — Souvestre, L'esclave und L'apprenti. —
deutschen Romantiker. Die Lyrik des XIX. Jahrh. — Steinhausen,
e Kultur in der Urzeit. — Stevens, Die Reise ins Bienenland. —
tudien und bunte Steine. — Strzemcha, Deutsche Dichtung in
. — Tacitus, Germania. — Tanera, Wolf, der Husar des alten

Fritz. — Tecklenburg, Deutscher Sagenschatz. — Thetter, Friedl. — Uhland, Gedichte. Ernst, Herzog von Schwaben. Ludwig — Das neue Universum, 29. Bd. — Voß, Louise. — Walter Vogelweide. — Wieland, Oberon. — Windel, Dichter der Free Göttinger Dichterbund — Wohltat, Die klassischen Schuldramen. Kulturverhältnisse des deutschen Mittelalters. Germanische Götter und

Geschenke. Bessé, Nouveau choix de contes et nouvelle (Schulrat Dir. Pejscha). — Hoffmann, Mylord Cat (Gröger IIa Crusoe (Huber, IIIa). — Hummel, Bilder aus der Weltkunde (Gutsce — Kamberg: Gullivers Abenteuer (Huber IIIa). — Laurie, Mé collégien (Schulrat Dir. Pejscha). — Norden, Robinson (Thom — Pennersdorfer, Wanderungen durch Wien (Friedlände Rothenberg, Auf dem Kriegspfade (Estermann, IIIa). — Han Sann, Mit Gott für Kaiser und Vaterland (Wetzel, IIIb). — verre d'eau (Schulrat Dir. Pejscha). — Zapf, Das Nibelungenli Dir. Pejscha).

Verwalter: Prof. Dr. Hugo Grh

IV. Unterstützungswesen.

Barvermögen der Schülerlade vom Schuljahre 1907/8 . . .	1624 17
Interessen von der k. k. Postsparkasse und der Währinger Sparkasse	4 10
Stifterspende des Herrn Joh. Rys, Fabrikanten	5 —
„ der Familie Albert Stern	100 —
„ der Frau Vilma Edlen von Hitzinger	5 —
Ueberschuß von Schülerausflügen	50
Ungenannt	10 —
Spende des Herrn Heinrich Spitzer	40 —
„ „ „ Siegfried Komor	3 70
„ der Kunsthandlung Artaria & Co.	1
„ des Herrn Friedrich Kraus, Holzhändlers	1 70
„ „ Schülers Paul Stern	1 —
Von Kirchenkarten und -liederbüchern	40
10% Nachlaß von Schulheften (Firma Baumgartner) . . .	22
Spende des Herrn Prof. Dr. Jakob Weiß	60
Ueberschuß vom Eintrittsgelde zu einem französ. Vortrage	50

Von den Schülern der Anstalt, und zwar

I. Klasse A.

Zett	1 —
Finder, Steiner je 5 K	1 —
Kraus, Uher je 3 K	—
Engel, Gyri, Proschek, Springer, Spurny, Strojil je 2 K . .	
Asiel, Farkas, Figdor, Hermann, Hilberger, Kainz, Kurzmann, Malirsky, Mandel, Paskusz, Schischa, Weicht, Zilsel je 1 K	1 —

Uebertra

	K	K
I. Klasse B. Uebertrag		2045·59
. . . . .	7·—	
Landau, v. Perko, Rink je 5 K	20·—	
0 h). Lienhart (4 K), Guth (3 K 30 h), Klein (3 K),		
! K 40 h)	16·80	
s, Jellinek, Soyka je 2 K	8·—	
! 30 h), Huppert (1 K 20 h), Hörner (1 K 10 h),		
K 10 h)	4·70	
mayer, Fraiß, Gefäll, Goldscheider, Kleander,		
n, Nowak, Raimann, Schiller, Türk je 1 K . .	11·—	
h), Golant (60 h)	1·50	69·—
II. Klasse A.		
. . . . .	5·—	
:h, Wanka, Zwillinger je 2 K	8·—	
)rel, Clauer, Deutsch, Figdor, Freiberger, Fried-		
Hollowitsch, Jetilek, Jokl, Kohn, Kollmer, Langer,		
Parnaß, Reich, Sandig, Schiller, Schmetterling,		
, Wieland je 1 K	21·—	
. . . . .	—·60	
. . . . .	—·50	35·10
II. Klasse B.		
:r	20·—	
. . . . .	5·—	
. . . . .	4·—	
Siegert, Stenitzka je 3 K	9·—	
ling, Hofbauer, Paul, Pick, Plihal, Pollak, Novy,		
tzer, Reininger, Schreiber, Schulhof, Weiß, Wol-		
2 K	28·—	
un, Fillinger, Fritsch, Goldschmid, Handowsky,		
nn, Neumann, Schay, Schiff, Schönmann, Strodl,		
ıček je 1 K	13·—	
Sammlung unter den Schülern	11·50	90·50
III. Klasse A.		
er, Lorenz, Melaun, Völker je 5 K	25·—	
. . . . .	4·—	
. . . . .	3·80	
. . . . .	3·—	
Gutschera, Kohn, Pálfi, Pick, Scheu, Schleifer,		
, Thomastik je 2 K	18·	
ıschka, Keiß, Klinger, Kohn, Lamplot, Leitkep,		
ser, Waldmann, Weißenberger je 1 K	10·—	63·80
III. Klasse B.		
ıobel, Raetz je 10 K	30·—	
. . . . .	5·—	
hild, Tenschert je 4 K	12·—	
ler, Spitzer, Welzel je 2 K	8·—	
dič, Grau, Kärpel, Klepetarsch, Lam, Máša, Postrá-		
je 1 K	8·—	63·—
Uebertrag		2366·99

IV. Klasse A.

Uebertrag

Kreiner 10
Freisinger, Kopal, Schmid, Schöfer je 5 K 20
Kubai 4
Eder, Göbbel je 3 K 6
Ankwicz, Comploier, Endlicher, Hermann, Hünerasky, Kaspar, Kaufmann, Knöpfelmacher, Nadel, Polak, Schiller, Schwarz, Steskal, Thomasberger, Thürriegl je 2 K . . 30
Baruch, Brasser, Györi, Krasny, Moser, Stiasny, Weinberger, Wieland je 1 K . . . . . —

IV. Klasse B.

Richer 2
Werth . . . . . —
Blahy, Fonovits, Stürzer je 3 K . . . . . —
Benesch, Binder, Duda, Eckstein, Hantschl, Hofbauer, Kalkhauser, Kettner je 2 K 1
Blatt, Cohn, Farkas, Feil, Flekles, Frank, Fruhstorfer, Kärpel, Kornfeld, Lenardo, Malkovsky, Melzer, Moser, Pawliček, Schenk, Thieberg, Zach je 1 K 1
Winkler 2
Winternitz 6

V. Klasse.

Kropf . . . . . —
Spitzer . . . . . —
Eislitzer, Fürth, Kohl, Schmutzer, Steiner Leo je 5 K . . —
Bader, Goldschmid, Neubauer, Opawa, Pichler, Schlegel, Weinreb je 2 K . . . . . —
Hausner, Mayer je 1 K . . . . . —

Summa

Ausgaben:

Für den Ferienhort der Bezirksgruppe Alsergrund . . . . .
„ „ Einkauf von Büchern bei Hölder (10%) . . . . .
„ „ „ „ „ „ Reichmann . . . . .
„ Drucksorten (Empfangsbestätigungen) . . . . .
„ 1 Paar Turnschuhe . . . . . |
An Porti, Zustellungsgebühren, Trinkgeldern . . . . . |
Unterstützung an 2 Schüler (Ausflug) . . . . . |

Summa

Ergebnis:

Barvermögen vom Schuljahre 1907/8 . . . . . |
Einnahmen „ „ 1908/9 . . . . . |

Summa

Ausgaben vom Schuljahre 1908/9 . . . . . |

Rest an Barvermögen

Davon sind in der k. k. Postsparkassa . . . . . |
„ „ Währinger Kommunalsparkassa . . . . . |
Barkassarest . . . . . |

iesem Schuljahre wurden auf Kosten der Schülerlade 100 Schülern 790 Lehrbücher zur Verfügung gestellt.

Bücherspenden.

Schulbücherverlag	40	Bände,
a Alfred Hölder	48	„
A. Pichlers Witwe und Sohn	34	„
F. Tempsky	20	„
F. Deuticke	13	„
Ig. v. Kleinmayr und Ferd. Bamberg in Laibach	12	„

Ed. Hölzel: 3 Exemplare Kozenn, Geogr. Atlas,
C. Gerolds Sohn: 4 Bde. Wretschko-Heimerl, Vorschule der Botanik.
so erfolgten auch Bücherspenden seitens einiger Professoren und Anstalt.

nterzeichnete Verwaltung entbietet hiemit allen P. T. Gönnern der den innigsten Dank für das derselben bewiesene Wohlwollen. urde ja so vielen Schülern das Studium ermöglicht, resp. erleichtert. n in Zukunft edle Herzen unseres so humanen Werkes gedenken

midt,	F. Pejscha,	F. Engel,
app,	k. k. Direktor.	Verwalter.
sprüfer.		

V. Chronik der Anstalt.

Veränderungen im Lehrkörper.

em Lehrkörper schieden die Supplenten: Viktor Kerbler, der ehrer an der II. Deutschen Staatsrealschule in Prag ernannt wurde; kawa, dem eine wirkl. Lehrstelle am Staatsgymnasium in Arnau rde; Franz Scharff, der eine Supplentenstelle an der Staats- n XV. Wiener Gemeindebezirk erhielt, und der Assistent Alexander n den Lehrkörper traten neu ein: der wirkl. Lehrer Dr. Hugo Groh- der Staatsrealschule in Teschen (6./6. 1908, Z. 17.572/M. K. U., Z. 1083/6-I/L. Sch. R.); Prof. Franz Neugebauer vom Kaiser Franz iums-Real-Gymnasium in Korneuburg (29./8. 1908, Z. 32.361/M. K. U., Z. 487/4-I/L. Sch. R.) und der wirkliche Lehrer Dr. Josef Zuck Deutschen Staatsrealschule in Prag (9./6. 1908, Z. 12.138/M. K. U., . 277/15-I/L. Sch. R.).

Prof. Josef Schmidt wurde mit dem Erl. des k. k. n.-ö. Landes- om 9./2. 1909, Z. 320/1-I, der angesuchte Urlaub für das II. Semester eine gesamte Lehrverpflichtung übernahm der mit dem Erl. des ndesschulrates vom 15./2. 1909, Z. 852-I, bestellte Supplent Franz it dem Erl. des k. k. n.-ö. Landesschulrates vom 19./11. 1908 wurde Dr. Heinrich Jelinek, und mit dem Erl. derselben Behörde 1909, Z. 4265/1-I, Dr. Alexander Fränkel zur Ableistung des Probe- nstalt zugewiesen.

ufnahmsprüfungen in die I. Klasse fanden am 6. Juli 1908 statt. nschreibungen, Aufnahms-, Wiederholungs- und Nachtragsprüfungen 16. September vorgenommen.

7. September fand der Eröffnungsgottesdienst für die katholischen .

8. September wurde die Eröffnungskonferenz des Lehrkörpers

9. September begann der regelmäßige Unterricht.

. Oktober wurde das Namensfest Seiner Apostolischen Majestät des ch einen Festgottesdienst gefeiert.

). November wurde für weiland Ihre Majestät die Kaiserin Elisabeth nt abgehalten, dem die katholischen Schüler und sämtliche Lehrer

Am 26. November wohnte der Herr k. k. Landesschulinspektor rat Hans Januschke dem realistischen Unterrichte in mehreren Kla

Am 2. Dezember wurde aus Anlaß des 60jährigen Regierung festes Seiner k. u. k. Apostolischen Majestät des Kaisers eine Sch anstaltet, bestehend aus Festgottesdienst, Gesang, passenden De und einer Festrede.

Der 2. Jänner 1909 wurde zufolge Erl. des k. k. n.-ö. Land vom 24./12. 1908, Z. 4532-I, schulfrei gehalten.

Am 20. Februar besuchte Herr Landesschulinspektor Dr. K. Anstalt und wohnte in einer Klasse dem Geschichtsunterrichte be

Am 23. April inspizierte Herr Rabbiner Dr. Elieser Dawid den i Religionsunterricht.

Am 29. April starb nach kurzer Krankheit der zu schöner berechtigende Schüler der II. Klasse A, Robert Gröger. Die Schüle ehrten das Andenken ihres braven Mitschülers durch eine Kran gaben ihm mit mehreren Professoren das letzte Geleite.

Am 19. Mai, einem schulfreien Tage, unternahmen mehr Exkursionen unter Leitung von Professoren.

Am 3. Juni inspizierte Herr Prälat Dr. Ferdinand Wimmer lischen Religionsunterricht.

Am 8. Juli wurde das Schuljahr mit einem Gottesdienste und verteilung geschlossen.

VI. Körperliche Ausbildung der Jugen

Wie in den früheren Jahren wurde auch im abgelaufene fast der gesamte Unterricht auf die Zeit von 8 bis 1 Uhr verl wurde es den Schülern ermöglicht, nicht bloß ihre häuslichen u Tageslicht zu machen, sondern auch für die Erholung im Freien ze gewinnen. Um die Staubentwicklung hintanzuhalten, wurden die halten, ihr Schuhwerk an den im Vorhause befindlichen Ko reinigen. Dreimal während des Schuljahres wurden sämtlich gründlich gereinigt und die Fußböden mit Stauböl eingelassen. zimmer wurden täglich ausgekehrt und sowohl vor als auch na richte und während der Ruhepausen hinlänglich gelüftet.

Zum Schlittschuhlaufen haben die meisten Schü laufplatz des nahegelegenen Augartens benützt. Daselbst und auf wiese im Prater wurden im Frühjahr und Sommer Jugendspiele ab

Den Schülern wurde ganz besonders auch das Schwimm dessen Pflege durch die Preisermäßigung im Dianabad begünstig Laufe des Sommers wurden unter der Leitung der Profess en Ausflüge in die herrliche Umgebung Wiens unternommen.

Um einer Anzahl von würdigen, aber bedürftigen Schüle aufenthalt in den Hauptferien 1909 zu ermöglichen, wurde dan lichen Entgegenkommen der Direktion der Volksoper von der „Alsergrund“ des Vereines Ferienhort für bedürftige Gymnasi schüler die Oper „Zar und Zimmermann“ aufgeführt. Hiebei zahlungen die Herren: Fabrikant Joh. Rys 20 K, Kaufmann J. Magazinsinspektor K. Kohl K 4·40, Postexpeditor Duda 2 K, Kaufm J. Zwillinger und Anton L. je K 1·50, Rechnungsrat Tenschert, Inge Kaufmann L. Strodl je 1 K, R. Sp. 70 h.

Die Direktion spricht an dieser Stelle all die zur Förderung des leiblichen Wohles der st Jugend der Anstalt auf irgendwelche Weise beigetr den innigsten Dank aus.

Besuch der Eislaufplätze und Bäder.

	Klasse									Zu-sammen
	I A	I B	II A	II B	III A	III B	IV A	IV B	V	
welche bereits das Schlittschuhlaufen konnten	15	20	17	19	23	23	30	24	30	201
lie es erst in diesem Jahre en	9	4	3	5	1	4	1	—	1	28
von besuchten:										
Eislaufplatz im Augarten . .	20	17	13	18	14	17	18	10	20	147
e Eislaufplätze	4	7	7	6	10	10	13	14	11	82
welche bereits schwimmen ten	17	14	13	18	18	18	30	25	32	185
lie es erst in diesem Jahre n	8	7	7	1	1	9	1	–	1	35
von besuchten:										
las Dianabad	3	7	7	4	4	15	7	6	14	67
ndere Bäder	22	14	13	15	15	12	24	19	19	153

Summarische Uebersichtstabelle.

Von den Schülern der Klasse sind		Von den Schülern d. Klasse leben auf dem Lande		Anzahl der Schüler der Klasse
Eisläufer	Schwimmer	In den letzten Wochen des Schuljahres	während der Ferien	
24	25		38	43
24	21	4	33	42
20	20	2	30	36
24	19	1	32	40
24	19	4	30[1]	41
27	27	—	33	40
31	31	1	38	45
24	25	3	29	39
31	32	1	31	50
229	219	16	294	376[1]

usammenwirken zwischen Schule und Haus.

die Realschule nicht bloß eine Unterrichts- sondern auch eine nstalt sein, bedarf sie einer kräftigen Unterstützung des Elternie Lehrer ihre Schüler meist nur vom Unterrichte her kennen, so Aufschlüsse über die Eigenart der Schüler recht willkommen. Für üssen dagegen Aufklärungen der Schule über das Verhalten ihrer nicht selten von dem in der Familie wesentlich verschieden ist, n. Daher werden gewissenhafte Eltern mit der Schule in einem hr stehen, um über alle Vorkommnisse in der Schule unterrichtet in allen Fällen, wo es notwendig ist, rechtzeitig auf ihre Söhne n können. Zur Erleichterung dieses erwünschten Verkehrs wurden zelnen Lehrkräfte Sprechstunden angesetzt und das Verzeichnis f dem Gange des Schulgebäudes angebracht. Da es jedoch nicht möglich war, in den festgesetzten Sprechstunden zu erscheinen, ie Mitglieder des Lehrkörpers nach Maßgabe des Stundenplanes alb der Sprechstunden bereitwilligst Auskünfte über die Schüler

— Die Daten für die Zensurkonferenzen wurden zu Beginn jed den Schülern bekannt gegeben und den Eltern das Ergebnis der Z Schulnachrichten mitgeteilt.

Bei besonders wichtigen Vorkommnissen wurden die Eltern lich verständigt. Durch diese Vorkehrungen war es möglich, n erfolg im Fortgange hintanzuhalten und manches sittliche Gebrech zu ersticken.

Daher ergeht an die Eltern oder deren Stellvertreter die d forderung, im Interesse ihrer Kinder auch in Hinkunft in einem r mit der Schule zu bleiben.

VIII. Personalstand.

a) Lehrer und Lehrfächerverteilung.

1. Direktor.

Pejscha Franz, VI. Rangsklasse, Ritter des Franz Joseph-Ord lehrte Französisch in IV B (3 St.)

2. Professoren.

Derganc Anton, Professor, VII. Rangsklasse, Verwalter der nat Sammlungen, lehrte Naturgeschichte in I A, I B, II A, II B d

Engel Franz, katholischer Religionslehrer, IX. Rangsklasse, Verwa lerlade, lehrte katholische Religion in allen Klassen un tator. (20 St.)

Gasparin Philipp, Professor, IX. Rangsklasse, Verwalter der L und Klassenvorstand in III A, lehrte Deutsch in IV A, Fr III A, IV A und V. (15 St.)

Grohmann Hugo, Phil. Dr., wirklicher Lehrer, IX. Rangsklasse, e Schülerbibliothek und Klassenvorstand in II A, lehrte Dts IV B, V; Französisch in II A; Englisch in V. (19 St.)

Hanslik Erwin, Phil. Dr., Professor, IX. Rangsklasse, Verwalter der historischen Sammlung und Klassenvorstand in IV B, leh in I B, II A, III A, IV B; Geschichte in II A, III A, IV B, V.

Neugebauer Franz, Professor, IX. Rangsklasse, Verwalter d Kabinettes und Klassenvorstand in I B, lehrte Arithmeti trische Formenlehre in I A und I B; Chemie in IV A, IV B, V.

Schmidt Ernst, wirklicher Lehrer, IX. Rangsklasse, Verwalter der Lehrmittelsammlung und Klassenvorstand in IV A, lehrte III A, IV A; Geometrie in III A, III B, IV A, IV B; darstelle in V. (19 St.)

Schmidt Josef, Professor, VIII. Rangsklasse, Verwalter des physi nettes und Klassenvorstand in V, lehrte im I. Semester IV B, V; Physik in III A, III B, IV A, IV B (18 St.); im I urlaubt.

Soyka Hugo, Professor, VII. Rangsklasse, Verwalter der Lehrmitt Freihandzeichnen, lehrte Freihandzeichnen in I A, II A, II V. (23 St.)

Zuck Josef, Phil. Dr., wirklicher Lehrer, IX. Rangsklasse, Klassenv I A, lehrte Deutsch und Französisch in I A, III B. (19 St

3. Supplenten.

Bayer Emil, Volksschullehrer, suppl. Turnlehrer, lehrte vom . Turnen in V. (2 St.)

ann, Phil. Dr., Klassenvorstand in II B, lehrte Deutsch und Fran-h in I B und II B. (19 St.)

lehrte Freihandzeichnen in I B, II B und III B. (12 St.)

, Klassenvorstand in V, übernahm im II. Semester die Lehrver-ung des beurlaubten Professors Josef Schmidt.

Volksschullehrer, suppl. Turnlehrer, lehrte Turnen in allen Klassen usnahme der V. Klasse, welche vom 1. Februar an Emil Bayer ihm. (16 bezw. 14 St.)

Phil. Dr., Klassenvorstand in III B, lehrte Geographie und Ge-te in II B, III B, IV A; Deutsch in II A und Schönschreiben in I A B. (18 St.)

Albert, techn. Dr., lehrte Geographie in I A; Mathematik in II A, II B; Geometrie in II A, II B und Schönschreiben in II A und II B .)

4. Israelitischer Religionslehrer.

ritz, Phil. Dr., lehrte israelitische Religion in I A, I B, II A und B nd B, IV A und B, V. (12 St.)

5. Lehrer der nicht obligaten Lehrgegenstände.

', Volksschullehrer, lehrte Gesang in 2 Abteilungen und leitete den ngesang. (4 St.)

rg Artur, Ritter von, k. k. Richter, lehrte Stenographie in 2 Ab-en. (4 St.)

6. Assistenten.

vie oben, assistierte beim Turnunterricht. (10 St.)

nn, assistierte beim Freihandzeichnen. (24 St.)

ıssistierte beim Freihand- und geometrischen Zeichnen. (12 St.)

, Volksschullehrer, assistierte beim Turnunterricht. (8 St.)

7. Probekandidaten.

nder, Phil. Dr.
ch, Phil. Dr.

b) Dienerschaft.

f. Schuldiener.
, Aushilfsdiener.

sef, Heizer.

IX. Statistik der Schüler.

	Klasse							
	I A	I B	II A	II B	III A	III B	IV A	IV
1. Zahl.								
Zu Ende 1907/8	47	51	43	43	51	44	33	3
Zu Anfang 1908/9	44	43	45	43	42	42	46	4
Während d. Schuljahres eingetreten	2	1	—	-	—	—		
Im ganzen also aufgenommen	46	44	45	43	42	42	46	4
Darunter neu aufgenommen u. zw.:								
Durch Aufnahmsprüfung	43	41	—	1	1	—	—	
Aufgestiegen	—	—	4	2	2	1	2	
Repetenten	1	—	—	—	—	—	1	
Wieder aufgenommen u. zw.:								
Aufgestiegen			38	39	35	34	39	3
Repetenten	2	3	3	1	4	7	4	
Während d. Schuljahr. ausgetreten	3	2	9	3	1	2	1	
Schülerzahl zu Ende 1908/9	43	42	36	40	41	40	45	3
Darunter: Oeffentliche Schüler	43	42	36	40	41	40	45	3
Privatisten	—	—	—	—	1	—	—	
2. Geburtsort (Vaterland).								
Wien	29	34	27	33	33	31	36	3
Niederösterreich (außer Wien)	2		2	—	—	1	1	
Oberösterreich	1	—	—	—	—	—	—	
Steiermark	1	—	—	—	—	—	—	
Kärnten	—	—	—	—	—	—	1	
Istrien	—	—	—	—	—	1	2	
Böhmen	1	2	2	4	3	1	1	
Mähren	1	1	1	1	1	1		
Schlesien	1	1	—	1	—	—	1	
Galizien	1	2	3	—	—	2	—	
Bukowina		1	—	—	—	—	—	
Ungarn	2	—	—	1	3	3	3	
Bosnien	1	—	—	—	1	—	—	
Serbien	—	—	1	—	—	—	—	
Rumänien	—	1	—	—	—	—	—	
Bayern	—	—	—	—	—	—	—	
Holland	1	—	—	—	—	—	—	
Persien	—	—	—	—	—	—	—	
Südamerika	1	—	—	—	—	—	—	
Japan	1	—	—	—	—	—	—	
	43	42	36	40	41	40	45	
3. Muttersprache.								
Deutsch	42	42	35	40	35	33	45	
Tschechoslavisch	—	—	—	—	3	3	—	
Polnisch	—	—	—	—	—	1	—	
Italienisch	—	—	—	—	—	—	—	
Ungarisch	-	—	—	—	2	2	—	
Serbokroatisch	—	—	1	—	1	—	—	
Spanisch	1	—	—	—	—	—	—	
Englisch	—	—	—	-	—	1	—	
	43	42	36	40	41	40	45	
4. Religionsbekenntnis.								
Katholisch des latein. Ritus	18	18	17	18	21	22	32	7
„ „ griech. „		—	—	—	—	—	—	
Griechisch-orientalisch	-	—	—	—	—	—	-	
Evangelisch A. K.	—	3	—	5	2	1	3	
„ H. K.	—	—	—	—	2	—	—	
Israelitisch	25	21	19	17	16	17	10	2
	43	42	36	40	41	40	45	

	Klasse									Zusammen
	I A	I B	II A	II B	III A	III B	IV A	IV B	V	
Lebensalter.										
t	8	14	–	–	–	–	–	–	–	22
	31	19	13	13	–	–	–	–	–	76
	4	7	17	25	10	12	–	–	–	75
	–	2	4	2	19	20	5	10	–	62
	–	–	1	–	8[1]	6	22	19	12	68
	–	–	1	–	3	1	15	6	23	49
	–	–	–	–	1	1	2	4	10	18
	–	–	–	–	–	–	1	–	3	4
	–	–	–	–	–	–	–	–	1	1
	–	–	–	–	–	–	–	–	1	1
	43	42	36	40	41[1]	40	45	39	50	376[1]
ort der Schüler.										
k	41	38	32	33	31	33	38	25	33	304
	–	–	2	2	0[1]		–	4	1	9[1]
	–	–	–	1	2	1	–	1	4	9
	–	1	–	–	3	–	–	–		4
	–	–	–	–	–	–	–	–	1	1
	–	–	–	–	–	–	–	–	1	1
	–	–	–	–	–	–	–	–	1	1
	–	–	–	–	–	–	1	–	1	2
	–	1	–	–	–	–	–	–	1	2
	–	–	1	–	–	–	–	–	1	2
	–	1	–	1	–	2	3	3	1	11
	–	1	–	3	4	4	3	3	4	22
	2	–	–	–	–	–	–	1	1	4
urg	–	–	1	–	1	–	–	1	–	3
	–	–	–	–	–	–	–	1	–	1
	43	42	36	40	41[1]	40	45	39	50	376[1]
assiffikation.										
s Schuljahres 1908/9:										
eeignet, in die nächste										
fzusteigen	2	2	2	6	6	2	2	2	7	31
die nächste Klasse										
en	38	29	23	23	27[1]	33	36	29	24	262[1]
net, in die nächste										
fzusteigen	2	8	8	6	4	4	6	2	14	54
Wiederholungsprüfung										
	1	3	3	5	4	1	1	6	4	28
chtragsprüfung krank-										
r zugelassen	–	–	–	–	–	–	–	–	1	1
	43	42	36	40	41[1]	40	45	39	50	376[1]
n Schuljahre 1907/8:										
gsprüfungen waren										
	1	4	5	4	6	2	4	1	–	27
haben	–	2	4	4	6	1	4	1	–	22
rochen haben (oder										
hienen sind)	1	2	1	–	–	1	–	–	–	5
ifung. waren bewilligt	–	–	–	–	–	1	1	–	–	2
as Ergebnis f. 1907/8:										
ngsklasse mit Vorzug	6	8	7	1	3	–	5	2	–	32
ngsklasse	33	34	29	35[1]	42	37	21	25	–	256[1]
gangsklasse	8	8	4	4	5	6	4	5	–	44
angsklasse	–	1	3	3	1	–	2	–	–	10
ieben	–	–	–	–	–	1	1	–	–	2
	47	51	43	43[1]	51	44	33	32	–	344[1]

	Klasse									Zusammen
	I A	I B	II A	II B	III A	III B	IV A	IV B	V	
8. Geldleistungen der Schüler.										
Das ganze Schulgeld zahlten: im I. Semester	30	31	12	25	24	21	22	14	21	200
im II. Semester	25	17	14	25	24	18	21	13	28	185
Zur Hälfte befreit: im I. Semester	—		—	1	—	1	3	3	3	11
im II. Semester	1	1	—	1	—	1	2	2	2	10
Ganz befreit: im I. Semester	12	12	33	17	18	20	20	25	28	185
im II. Semester	17	25	23	14	18	21	22	25	21	186
Das Schulgeld betrug: im I. Semester K	1500.—	1550.—	600.	1275.—	1200.—	1075.—	1175.—	775.—	1125.—	10275.—
im II. Semester K	1275.—	875.—	700.—	1275.	1200.—	975.—	1100.	700	1450.—	9500.—
Aufnahmstaxen à K 4.20 . . . . . K	184.20	172.20	16.80	12.60	12.60	4.20	12.60	8.40	42.—	466.20
Lehrmittelbeiträge à 4 K . . . . . h	184.—	176.—	180.—	172.—	168.—	168.—	184.—	168.	208.—	1608.—
Beiträge zur Deckung der Auslagen für die Jugendspiele à 80 h . . . . . K	36.80	35.20	36.—	34.40	33.60	33.60	36.80	33.60	41.60	321.60
9. Besuch des Turnunterrichtes.										
Am Unterrichte nahmen teil	38	38	34	37	35	37	41	36	41	337
Befreit waren	5	4	2	3	6	3	4	3	9	39
10. Besuch der nicht obligaten Unterrichtsgegenstände.										
Den Gesangsunterricht besuchten: in der I. Abt.	17	18		—	—	—	—	—	—	35
in der II. Abt.	—	—	14	16	6	6	1	—	—	43
Den Stenographieunterricht besuchten:										
in der I. Abt.	—	—	—	—	—	—	24	15	—	39
in der II. Abt.	—	—		—	—	—	—	—	25	25

X. Wichtige Erlässe.

nisterial-Verordnung vom 11. Juni 1908, Z. 26.651, betreffend das lassifizieren an Mittelschulen.

nisterial-Erlaß vom 7. Mai 1908, Z. 8831, gibt Weisungen über die am 2. Dezember 1908 stattfindenden 60jährigen Regierungsjubik. u. k. Apostolischen Majestät zu veranstaltende Schulfeier.

nisterial-Verordnung vom 21. Juni 1908, Z. 23.151, betreffend die r Absolventen höherer Gewerbeschulen und verwandter Anstalten ung an Realschulen.

nisterial-Erlaß vom 17. Jänner 1909, Z. 2010, regelt mit Bedachtie Bestimmungen der Verordnung des Ministeriums für Kultus und etreffend das Prüfen und Klassifizieren an Mittelschulen den Sti- der Mittelschüler.

nisterial-Erlaß vom 2. Jänner 1909, Z. 51.190 ex 1908, gibt neue über Privatisten-Prüfungen.

nisterial-Erlaß vom 13. Jänner 1909, Z. 49.996, enthält Durchführten zur Ministerialverordnung betreffend das Prüfen und Klassi-

rschrift Nr. 20 des n.-ö. Landesschulrates (Z. 831—I) bezüglich über den Abschluß des I. Semesters.

nisterial-Verordnung vom 7. März 1909, Z. 8890, betreffend das Mittelschulen.

nisterial-Verordnung vom 8. April 1909, Z. 14.741, brachte einen llehrplan für Realschulen.

inisterial-Verordnung vom 29. März 1909, Z. 1997, betreffend rungen im Berechtigungswesen der Mittelschulen.

inisterial-Erlaß vom 25. April 1909, Z. 17.149, ordnet den Schluß nen Schuljahres für den 8. Juli an, wogegen der Samstag vor und nach dem Pfingstsonntag als Ferialtage zu entfallen hatten.

XI. Verzeichnis

ier Schüler am Schlusse des Schuljahres 1908/9.

zeichneten Schüler sind vorzüglich geeignet, in die höhere Klasse aufzusteigen.)

I. Klasse A, 43 Schüler.

s
ert
ctor

el
ch
Paul

edrich
d
ard

Kurzmann Fritz
Malirsky Anton
Mendl-Felsenburg Otto
Mund Paul
Paskusz Salomon
Proschek Robert
Rosset Walter
Schatz Herbert
Schiller Bruno
Schiller Julius
Schindler Friedrich
Schischa Fritz
Sonnek Othmar
Springer Robert
Spurny Karl
Steiner Wilhelm
Steinfeld Egon
Strojil Karl
Uher Albert
Wachs Samuel
Wagner Albert
Waldmann Ernst
Weicht Franz
Zett Josef
Zilsel Paul
Komor Heinrich
Herrmann Robert
Kraus Robert.

I. Klasse B, 42 Schüler.

Areli Heinrich
Binder Artur
Blum Paul
Denzel Alois
Duschnitz Alexander
Felmayer Rudolf
Fraiß Karl
Gefäll Josef
Gelles Artur
Golant Albert
Goldscheider Georg
Gottlieb Friedrich
*Guth Bruno
Haas Felix
Hansinger Josef
Hörner Viktor
Huppert Heinrich
Jellinek Karl
Kalinka Othmar
Kleander Karl
Klein Felix
Kosarz Max
*Krames Josef
Landau Louis
Langsam Moritz
Lienhart Hans
Löw Philipp
Ludwig Franz
Mandl Emanu
Manhardt Hug
Mayer Hans
Mayer Josef
Moritz Johann
Nowak Erich
Polak Franz
Raiman Stanis
Rink Otto
Schiller Hans
Soyka Romual
Szamek Fritz
Türk Eduard
Perko Friedric

II. Klasse A, 36 Schüler.

Berman Viktor
*Borel Gustav
Clauer Siegmund
Deutsch Karl
Elger Karl
Figdor Karl
Freiberger Paul
Friedländer Ludwig
Hirsch Ernst
Hoffenreich Paul
Hollowitsch Paul
Jetilek Ferdinand
Jokl Paul
Kimmel Wilhelm
Kölch Anton
König Karl
Kohn Leo
Kollmer Anton
Langer Friedrich
Lazar Hans
Melzer Gustav
*Nidetzky Franz
Parnaß Siegfried
Polke Franz
Reich Anton
Rosenberg Osk
Sandig Eduar
Schiller Jakob
Schmetterling
Spiegler Ludw
Stiasny Ernst
Türk Josef
Wachsmann H
Wanka Johan
Wieland Ludw
Zwillinger Osk

II. Klasse B, 40 Schüler.

Becke Hans
*Braun Hermann
Cohn Erwin
Engel Wilhelm
Fillinger Artur
Friederici Emil
Goldschmid Robert
Gröger Johann
*Grieß Friedrich
Großmann Viktor
Hajek Leo
Hammer Georg
Handowsky Paul
Hedding Egon
Hofbauer Friedrich
Kurzmann Leo
Landesberger Alfred
Landesmann Erwin
Neumann Alexander
Nový Josef
Ostersetzer Gustav
Paul Karl
Pick Rudolf
Plihal Eduard
Pollak Felix
Psenička Friedrich
Reininger Friedrich
Schay Franz
*Schiff Georg
Schönmann Ed
Schreiber Fra
Schulhof Vikt
*Siegert Joha
*Stefan Eduar
*Stenitzka Heir
Strodl Ludwig
Fritsch-Schöpf
Weiß Otto
Wollisch Egon
Wondraček Jo

III. Klasse A, 41[1] Schüler.

Barborka Johann
Berger Karl
*Ehrmann Friedrich
Estermann Heinrich
Fleischer Otto
Frank Max
Garfein Emanuel
*Gogoditsch Karl
Gutschera Ferdinand
Hitzinger Johann, R. v.
Hoffmann Max
Huber Christoph
Huschka Franz
Keiß Erich
*Klinger Franz
Kohn Karl
Kohn Max
Kubat Karl
Kürt Richard
Lamplot Eduard
*Leitkep Oskar
Lorenz Zdenko
Mathis Ernst
Melaun Martin
Mokre Josef
Nagy Karl, von
Pálfi Johann
*Pick Viktor
Rösner Karl
Rys Johann
Salz Johann
Scheu Ernst
Schleifer Frie
*Spitzer Hans
Stern Paul (P
Stowasser Joh
Thomastik Alf
Vettermann K
Völker Franz
Waldmann Em
Weishut Felix
Weissenberger

III. Klasse B, 40 Schüler.

Heiß Philipp
Heller Fritz
Henzel Adam
Höferer Richard
Kärpel Hans
Klepetarsch Robert
Lam Siegfried
Lenobel Edmund
Löblich Richard
Mätischl Julius
Máša Gustav
Müller Hans
*Nadler Gustav
Postránecký Josef
Raetz Heinrich
Sakač Stephan, von
Schild Alois
Schlegel Julius
Schön Hermann
Sojka Hubert
Spitzer Rudolf
Suchanek Johann
Szamek Andor
Tenschert Franz
Waldmann Adolf
Welzel Richard.

IV. Klasse A, 45 Schüler.

Herrmann Karl
Hünerasky Erwin
Kaspar Richard
Kaufmann Karl
Knöpfelmacher Paul
Kopal Georg
Krasny Franz
Kreiner Edwin
Kubai Alexander
Kunzenbach Karl
Matouschek Josef
Moser Gustav
*Nadel Otto
Pollak Johann
Prochaska Franz
Schaffner Leopold
Schiller Karl
Schmid Alois
Schöfer Otto
Schwarz Heinrich
Spieß Otto
Spitzer Heinrich
Steskal Felix
Stiasny Johann
Storch-Hager Hans
Thomasberger Wilhelm
Thürriegl Rudolf
Vogth Julius
Weinberger Paul
Wieland Johann.

IV. Klasse B, 39 Schüler.

Fruhstofer Johann
Hantschel Leopold
Hofbauer Heinrich
Infeld Otto, R. v.
Kalkhauser Friedrich
Kärpel Ernst
Kettner Gustav
Kornfeld Otto
Kubat Franz
Lange Anton
Lenardo Alois
Malkovský Alois
Melzer Franz
Moser Anton
*Pawliček Rudolf
Richer Hermann
Schenk Adalbert
Stüpel Franz
Stürzer Eduard
Thieberg Ernst
Trimmel Matthäus
Vaculný Max
Werth Leo
Winkler Franz
Winternitz Max
Zach Johann.

V. Klasse, 50 Schüler.

Bader Hans	Janauschek Ferdinand	Pritzl Franz
Berger Oskar	Kohl Karl	*Prowaznik Fra
Brusvida Ladislaus	Kropf Wilhelm	Rauscher Fran
Cafourek August	Kunasz Karl	Schäffler Gusta
Diewald Max	Landau Artur	Schlegel Gusta
Eislitzer Siegfried	Langenecker Franz	Schmutzer Fra
Fridau Franz	Lenz Leopold	Skamperl Karl
Fröhlich Bruno	Mahovsky Eugen	Spielberg Max
Fürth Hans	Malina Josef	Steiner Hugo
Gebauer Johann	Mandel Bruno	*Steiner Leo
Goldschmid Egon	Mauthner Alois	*Thieberg Herl
Greulberger Franz	*Mayer Ernst	Tostmann Frie
Haberlick Josef	Morawetz Josef	Trantina Edua
*Hantschl Viktor	*Neubauer Leopold	*Weinreb Fra
Hausner Hans	Opawa Friedrich	Spitzer Kurt
Hengl Franz	Pichler Karl	Smekal Alois.
Jalkotzky Leopold	Pollak Karl	

XII. Lehrbücher-Verzeichnis für das Schuljahr

(Die bei der Auflage eingeklammerten Zahlen bedeuten die zulässig

I. Klasse.

Religion: *a)* kathol.: Großer Katechismus der kathol. R
Approbation des kathol. Gesamt-Episkopates. 80 h.
Pauker, Lehrbuch der kathol. Liturgik. 1 K 50 h
b) israel.: Wolf-Pollak, Geschichte Israels für die israelitis
I. Heft, 15. Aufl. (14), 96 h.
Pentateuch im Urtext.
Israel. Gebetbuch, herausgegeb. vom mähr.-schles. Lehrerverein.

Deutsche Sprache: Spengler, Deutsche Schulgrammatik. 1 K
Lampel, Deutsches Lesebuch für die I. Klasse österr.
14. Aufl., 2 K 18 h.

Französische Sprache: Fetter-Ullrich, La France et les Fr
gang der franz. Sprache. I. Teil, 13. Aufl., 1 K 40 h.

Geographie: Umlauft, Lehrbuch der Geographie für die unte
leren Klassen österr. Gymnasien und Realschulen. Ausgabe für
I. Kursus, 5. (4.) Aufl., 1 K 18 h.
Kozenn, Geographischer Atlas für Mittelschulen. 41. (33.—4

Arithmetik und geometrische Formenlehre: Močnik
Uebungsbuch der Arithmetik für die unteren Klassen der
I. Heft, 24. (23.) Aufl., 1 K 70 h.
Roßmanith-Schober, Geometrische Formenlehre. Ein
den Anschauungsunterricht in der I. Klasse. Bearbeitet v
9. (7.-8.) Aufl., 1 K 10 h.

Naturgeschichte: Pokorny-Latzel, Tierkunde für die un
der Mittelschulen. 28. (26.—27.) Aufl., 3 K 60.
Pokorny-Fritsch, Naturgeschichte des Pflanzenreiches f
Klassen der Mittelschulen. 24. (22.—23.) Aufl., 3 K 60 h.

II. Klasse.

Religion: *a)* kathol., wie in der I. Kl.
b) israel.: Wolf-Pollak, Geschichte Israels für die israeli
II Heft, 15. (14.) Aufl., 1 K 4 h.
Pentateuch und Gebetbuch wie in I.

prache: Kummer, Deutsche Schulgrammatik. 7. (6.) Aufl., 2 K 60 h.
l, Deutsches Lesebuch für die II. Klasse österr. Mittelschulen.
2 K 40 h.
he Sprache: Fetter-Alscher, Lehrgang der franz. Sprache.
Teil, 12 (11.) Aufl., 2 K 50 h.
: Umlauft, Lehrbuch der Geographie. II. Kursus. Ausgabe für
len. 5. Aufl., 2 K 10 h.
, wie in I.
: Hannak-Rebhann, Lehrbuch der Geschichte des Altertums
nteren Klassen der Mittelschulen. 14. (13.) Aufl., 1 K 90 h.
-Umlauft, Historischer Schulatlas. I. Altertum. 7. (1.–6.) Aufl.,
0.
k: Močnik-Neumann, Lehr- und Uebungsbuch der Arithmetik
nteren Klassen der Realschulen. II. Heft, 24. (23.) Aufl., 1 K 60 h.
ichte: Pokorny, wie in I.
Roßmanith-Schober, Grundriß der Geometrie in Verbindung
geometrischen Zeichnen. 10. (8.—9.) Aufl., 2 K 30.

III. Klasse.

) kathol.: Pauker, Liturgik wie in I—II.
Lehrbuch der Offenbarungsgeschichte des Alten Bundes. 1 K 70 h.
l.: Wolf-Pollak, Geschichte Israels. II. wie in II und III. Heft.
Aufl. 76 h.
ch und Gebetbuch wie in I—II.
prache: Kummer, Deutsche Schulgrammatik wie in I—II.
, Deutsches Lesebuch für die III. Kl. österr. Mittelschulen. 10. Aufl.,
0.
he Sprache: Fetter, Lehrgang der franz. Sprache. III. Teil.
ufl., 1 K 64 h.
Alscher, Französische Schulgrammatik. 4. (2., 3.) Aufl., 3 K.
: wie in II.
: Hannak-Rebhann, Lehrbuch der Geschichte des Mittelalters
nteren Klassen der Mittelschulen. 13. (12.) Aufl., 1 K 70 h.
k: Močnik-Neumann, Lehr- und Uebungsbuch der Arithmetik
nteren Klassen der Realschulen. III. Heft, 22. (21.) Aufl., 1 K 20 h.
allentin, Grundzüge der Naturlehre für die unteren Klassen der
len. 4. (2., 3.) Aufl., 2 K 20 h.
wie in II.

IV. Klasse.

) kathol.: Pauker, Lehrbuch der Offenbarungsgeschichte des
undes. 2 K.
el.: Wolf-Pollak, Geschichte Israels. IV. Heft, 11. (10.) Aufl.,
V. Heft, 11. Aufl., 64 h.
Kurzgefaßte Religions- und Sittenlehre für die israelitische Jugend.
40 h.
ch und Gebetbuch wie in I—III.
Sprache: Kummer, Deutsche Schulgrammatik wie in II—III.
l, Deutsches Lesebuch für die IV. Klasse österr. Mittelschulen.
0.) Aufl., 2 K 10 h.
he Sprache: Fetter-Alscher, Französische Schulgrammatik
II.
, Lehrgang der franz. Sprache. IV. Teil. 8. (7.) Aufl., 2 K 50 h.
e: Hannak, Oesterreichische Vaterlandskunde für die unteren
der Mittelschulen. 13. (11., 12.) Aufl., 1 K 94 h.
n, wie in I—III.

Geschichte: Hannak-Rebhann, Lehrbuch der Geschichte der
die unteren Klassen der Mittelschulen. 11. (10.) Aufl., 1 K 80 h
Hannak-Umlauft, Historischer Atlas wie in III.

Mathematik: Močnik-Neumann, Lehrbuch der Arithmetik u
nebst einer Aufgabensammlung für die oberen Klassen der
29. (28.) Aufl., 3 K 80 h.

Chemie: Rippel, Grundzüge der Chemie und Mineralogie für die
Realschulen. 2. (1.) Aufl., 2 K 50 h.

Physik: Wallentin, wie in III.

Geometrie: Roßmanith-Schober, wie in II—III.

V. Klasse.

Religion: *a)* kathol.: Kühnl, Lehrbuch der kathol. Religi
oberen Klassen der Realschulen I. Teil: Glaubenslehre. 3. (2.) A
b) israel.: Psalmen, hebr. Urtext von Letteris.
Brann, Lehrbuch der jüdischen Geschichte für die Oberstufe
Mittelschulen. I. Teil, 2. Aufl., 1 K 80 h und II. Teil, 2. (1.) Au

Deutsche Sprache: Kummer, Deutsche Schulgrammatik, wie
Bauer-Jelinek-Streinz, Deutsches Lesebuch für die
schulen. Ausgabe für Realschulen V. Band, 2 K 80.

Französische Sprache: Fetter-Alscher, Französische Schu
wie in III—IV.
Fetter-Alscher, Französisches Uebungsbuch für die ob
höherer Lehranstalten. Des Lehrganges der französischen Spr
5. (4.) Aufl., 2 K.
Fetter-Ullrich, Französisches Lesebuch für die oberen
Realschulen, Gymnasien und Mädchenlyzeen. I. und II. Tei
s. Kommentar. 2 K 80.

Englische Sprache: Ellinger-Butler, Lehrbuch der englis
für Realschulen, Gymn. etc. I. Teil: Elementarbuch. 2. (1.) A

Geschichte: Zeehe-Rebhann, Lehrbuch der Geschichte
für die oberen Klassen der Realschulen und anderer verwandt
2 (1.) Aufl., 2 K 40 h.
Hannak-Umlauft, Historischer Atlas wie in IV.
Kozenn, Geographischer Schulatlas wie in I—IV.

Mathematik: Močnik-Neumann, wie in IV.
Močnik-Spielmann, Lehrbuch der Geometrie für die ob
der Realschulen. 24. (23.) Aufl., 3 K 80 h.
Schlömilch, Fünfstellige logarithmische und trigonometri

Chemie: Rippel, Grundlinien der Chemie für Oberrealschulen.
ganische Chemie. 3 K 50 h.

Darstellende Geometrie: Schiffner, Leitfaden für den Unt
darstellenden Geometrie österr. Oberrealschulen und verwa
anstalten. 2. (1.) Aufl., 3 K 50 h.

Naturgeschichte: Wretschko-Heimerl, Vorschule de
den Gebrauch an höheren Klassen der Mittelschulen und ver
anstalten. 8. Aufl., 3 K 50 h.

VI. Klasse.

Religion; *a)* kathol.: Kühnl, Lehrbuch der kathol. Religion
Klassen der Realschulen. II. Teil: Sittenlehre. 2 K 50 h.
b) isreal.: Jesaia, Jeremia, Ezechiel. Prophetae pos
Urtext. Ausgabe Letteris.
Brann, Lehrbuch der jüdischen Geschichte, II. Teil, wie
" " " " " III. Teil, 2. (1.)

Deutsche Sprache: Kummer, Deutsche Schulgrammatik, w
Bauer-Jelinek-Streinz, Deutsches Lesebuch für österr.
Ausgabe für Realschulen. VI. Band.

he Sprache: wie in V.
Sprache: Ellinger-Butler, Lehrbuch der englischen Sprache chulen, Gymnasien und verwandte höhere Anstalten. II. Teil: An eader. 4 K 50 h.
ɔil: A short English Syntax and Exercises. 1 K 90 h.
Zeehe-Rebhann, Lehrbuch der allg. Geschichte für die lassen der Realschulen und anderer verwandter Lehranstalten. Geschichte des Mittelalters und der Neuzeit bis zum Ende des rigen Krieges. 2. (1.) Aufl., 2 K 60 h.
ı, wie in I–V.
ɛ-Umlauft, Histor. Atlas, wie in IV.
ɛ: Močnik-Neumann, wie in IV–V.
ɛ-Spielmann, wie in V.
ıilch, wie in V.
ichte: Graber-Latzel, Leitfaden der Zoologie für die oberen ler Mittelschulen. 5. (4.) Aufl., 3 K 80 h.
ppel, Grundlinien der Chemie für Oberrealschulen. II. Teil: Or- Chemie. 3 K.
'e Geometrie: wie in V.
Ilentin, Lehrbuch der Physik für die oberen Klassen der Mittel- nd verwandter Lehranstalten. Ausgabe für Realschulen. 11. (9., 10.) 30 h.

'e: Weizmann, Lehr- und Uebungsbuch der Gabelsbergerschen hie. 9. Aufl.

Empfehlenswerte Hilfsbücher:

usse, Dictionnaire complet illustré.
ıbensammlung aus der darstellenden Geometrie.

XIII. Kundmachung.

Für das Schuljahr 1909/10 erfolgen die Aufnahmsprüfun
I. Klasse am 9. Juli um 8 Uhr vormittag und um 3 Uhr nachmitta
16. September, wenn Plätze vorhanden sind.

Schüler, welche im Vorjahre an der Anstalt studierten, hab
Aufnahme am 16. September zwischen 8 und 10 vormittag zu mel

Zum Eintritt in die II.—VI. Klasse ist für alle Aufnahmswer
nicht ein Zeugnis über die an einer öffentlichen gleich organisierte
mit Erfolg zurückgelegte, unmittelbar vorhergehende Realschulklasse
vermögen, die Ablegung einer Aufnahmsprüfung aus allen obligaten
gegenständen erforderlich, für welche eine Prüfungstaxe von 24 K
ist. Diese Prüfung findet am 16. und 17., allenfalls am 18. Sept
Die Nachtrags- und Wiederholungsprüfungen wer
allenfalls am 18. September um 8 Uhr abgehalten werden

Am 17. September versammeln sich die katholischen
$8^1/_4$ Uhr im neuen Schulgebäude, Glasergasse 25, von wo sie zum
gottesdienste geführt werden.

Am 18. September beginnt um 8 Uhr der regelmäßige Unte

Jeder Schüler hat einen Lehrmittelbeitrag von 4 K und je
genommene Schüler außerdem eine Aufnahmstaxe von K 4·20 zu
Bestreitung der Auslagen für die Jugendspiele wird ein Beitr
eingehoben.

Das Schulgeld, welches im Laufe der ersten sechs Wochen d
in Schulgeldmarken zu erlegen ist, beträgt 50 K für jedes Semes

Die Stundungs- und Befreiungsbedingungen werden den Sch
zeitig bekanntgegeben werden.

Druck von Holzwarth & Berger, Wien, IX.

echster Jahresbericht

über die

STAATS-REALSCHULE

im IX. Wiener Gemeindebezirke

(IX, Glasergasse 25).

—— - - - - o ——

öffentlicht am Schlusse des Schuljahres 1909/10.

INHALT:

r Infinitesimalkalkül. II. Teil. Von Josef Schmidt.
ulnachrichten. Vom Direktor.

——— o — - - -

WIEN 1910.
Selbstverlag der k. k. Staats-Realschule.

Der Infinitesimalkalkül.

Von Josef Schmidt.

II. Teil.

Kritik der Infinitesimalbetrachtungen.

Prinzipien der Infinitesimalrechnung.

rigen Teil unserer Arbeit haben wir gezeigt, wie sich imalen Lehren allmählich entwickelt haben und wie ilfe die schwierigsten Probleme, die in früherer Zeit ar nicht oder nur mit Mühe bewältigt werden konnten, e Weise und unter allgemeinen Gesichtspunkten der geführt wurden. Namentlich in den Händen eines und eines Leibniz waren sie von bewunderungs- chöpferischer Kraft. Durch letzteren erfuhren sie über- ystematische Behandlung, die jedem die Möglichkeit n den Besitz der neuen leistungsfähigen mathemati- mittel zu setzen.

gs hatte man die Lehre übernommen, wie sie geboten e die Stichhaltigkeit ihrer Prinzipien zu prüfen: schien rfolg am meisten für ihre Brauchbarkeit zu sprechen. machten sich Bedenken bezüglich der Grundlegung imalrechnung geltend. Einige machten ihr unmathe- chlußweise zum Vorwurf, andere betonten die Not- ihrer Umarbeitung und ihrer Vervollkommnung.

rster, der gegen die junge Wissenschaft auftrat, ist der George Berkeley (1685—1753) zu nennen. Er wendet die Fluxionsrechnung seines Landsmannes, die er rsprüche findet. „Sagen Sie mir doch, scharfsichtiger t er einen Anhänger Newtons, „ob Newtons momentum he Größe ist oder ein Unendlichkleines oder nur ? Sagen Sie eine endliche Größe, so heben Sie gefälligst pruch gegen das Scholium des 2. Lemma des 1. Ab- s ersten Buches der Prinzipien auf: Cave intelligas magnitudine determinatas, sed cogita semper dimi- ie limite. Sagen Sie ein Unendlichkleines, so heben derspruch gegen die Einleitung der Quadratura auf: dere, quod in methodo fluxionum non opus sit figuras vas in geometriam introducere. Sagen Sie eine bloße

Grenze, so versöhnen Sie das mit dem Auspruche de
des 2. Lemma des zweiten Buches der Prinzipien
lateribus A et B durant momentorum dimidia, wo eine
Momente vorgenommen ist.“ (Cantor, Geschichte der M

Berkeley hebt ferner hervor, daß der Begriff des
kleinen widerspruchsvoll ist und noch mehr das Uneil
eines Unendlichkleinen und verficht die irrtümliche A
eine endliche Ausdehnung nicht in unendlich viele Teile
dacht werden kann, ein Irrtum, den ihm Maclaurin (19
mit Recht vorhält. Auch in seiner Anschauung, daß di
Newtons eine Bewegung in einem Zeitmomente unc
unteilbaren Punkt voraussetzen, hat er Maclaurin zu
der behauptet, daß die Geschwindigkeit in einem
Punkte der Bahn und in einem bestimmten Zeitmo
verstehen sei, daß zufolge derselben das Bewegliche
lichen Weg in einer endlichen Zeit gleichförmig
würde, wenn die Geschwindigkeit unveränderlich blie

Mit Recht wendet sich Berkeley gegen die Art,
die Fluxion eines Rechteckes bestimmt. Newton se
die Gleichung

$$(A + \frac{a}{2})\ (B + \frac{b}{2}) - (A - \frac{a}{2})\ (B - \frac{b}{2}) = aB$$

an, wo A und B die Seiten des Rechteckes und
momentanen Zuwächse derselben bedeuten, um so
lässigung des Gliedes a b zu vermeiden und dem
entgehen, daß er dieselben Größen bald Null, bald n
aussetze.

Es sei gleich hier angegeben, wie ein Sproß d
Mathematikergeschlechtes Bernoulli sich zu helfe
die Fluxion eines Rechteckes (eines Produktes) zu
Statt von Geschwindigkeiten (wie Newton) sprichte
Anlagen der Größen, zu- oder abzunehmen, und
gendermaßen: Wäre im Produkte xy nur der F
änderlich, so wäre die Anlage von xy bloß ydx, wä
änderlich, so wäre die betreffende Anlage xdy.
beide ändern, so ist die Gesamtanlage des Produ
x dy + y d x gegeben. Mathematische Strenge kann
Ausführungen wohl nicht zusprechen.

Das Hauptargument, das Berkeley gegen die
methode anführte, war, daß es nicht angehe, Größ
Existenz man Schlüsse ziehe, schließlich zum Ver
bringen. Dieser Wahrheit konnten sich die Mathe
verschließen. Euler (1707—1783) nahm darum v
an, daß die Differentiale wirkliche Nullen und di
quotienten Brüche sind, die wirkliche Nullen zu Z
Nennern haben. Die Bestandteile eines Differentialqu
wohl einander gleich, ihr Verhältnis aber könne je
Wert annehmen, der nur vom Abhängigkeitsgesetz e
lichen bedingt sei.

embert (1717—1783) schließt sich dem Standpunkt
ht an. Er behauptet, daß die Infinitesimalrechnung mit
Größen arbeite. Sie bestimme die Verhältnisse end-
ßen, die gesetzmäßig voneinander abhängen. Wenn
llich kleinen Größen gesprochen werde, so geschehe
m die mathematischen Lehren kürzer fassen zu können.
hkeit meine man damit, daß die Größen beliebig klein
ien werden können.
Kästner (1719—1800) finden wir die Ansicht, daß
llichkleine nicht eine Größe, sondern eine Qualität sei.
entiale hätten die Eigenschaft, unbegrenzt abnehmen

ilier (1750—1840) nähert sich dem modernen Stand-
nn er behauptet, daß der Differentialquotient nicht als
ltnis der Differentiale, sondern als ein Ausdruck anzu-

not (1753—1823) vertritt die Ansicht, daß man die
alrechnung streng begründen könne, ob man die Diffe-
s verschwindend ansehe oder nicht.
Holland (Briefwechsel zwischen Lambert und von
765 und 1766) unterscheidet zwischen verschwun-
größen, die untereinander gleich sind, und zwischen
indenden Größen, die verschiedene Werte annehmen
en Geschwindigkeiten, mit welchen sie sich der Null

ultz (1739—1805) nennt dx und dy Nullen, welche
ität nach gleich, der Qualität nach verschieden sind.
david (1762—1832) endlich macht die richtige Be-
daß eine Qualität (∞, dx) und eine Quantität nicht
rden können, verfährt aber im übrigen ganz unmathe-

erschiedenartig auch die Meinungen waren, die wir im
nden über die Natur der infinitesimalen Größen
n haben, in dem einen Punkt war man einig, daß die
keit der Resultate, zu denen die Infinitesimalrechnung
t in Zweifel gezogen werden kann. Wie kommt es
nüßte man sich fragen, daß die Unklarheit der Prinzipien
rhafte Resultate herbeiführe? Diese Frage stellte sich
keley und er glaubte den Grund für diese auffallende
darin zu finden, daß eine Ausgleichung der Fehler
Er zeigte auch an einem Beispiele, wie diese Aus-
zustande kommt: Aus der Parabelgleichung $y^2 = px$
nan die Subtangente s (zufolge der Aehnlichkeit des
tischen Dreieckes mit dem aus der Tangente und Sub-
ebildeten rechtwinkligen Dreiecke):

$$s : y = dx : dy,$$

ei aber die vierte Proportionale zu klein, den Quotienten

u groß an, da ja dy nicht bis zur Tangente reiche,

vielmehr um die Strecke z zu klein sei. Weil man a
$y^2 = px$ den Quotienten $\frac{dx}{dy}$ nicht gleich $\frac{2y}{p} + \frac{dy}{p}$, wie
naue Rechnung ergebe, sondern gleich $\frac{2y}{p}$, also zu k
stimme, so werde, wenn man in der obigen Propo
$dx : dy$ den letzteren Wert einsetze, der Quotient $\frac{s}{y}$ n
kleinert, und zwar in demselben Verhältnis verkleinert, in
er früher (durch Vernachlässigung des z) vergrößert wu
ein Vergleich der richtigen Gleichungen zeige. Denn
hätte man schreiben sollen

$$\frac{s}{y} = \frac{dx}{dy + z},$$

andererseits

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y + dy}{p}.$$

Nun sei $s = 2x = \frac{2y^2}{p}$; substituiere man in de
Gleichung diesen Wert für s, so ergebe sich:

$$\frac{2y}{p} = \frac{dx}{dy + z}$$

und durch Vergleichung der beiden letzten Gleichunge

$$z = \frac{dy^2}{2y}$$

in Uebereinstimmung mit:

$$dy + \frac{dy^2}{2y} = \frac{p\,dx}{2y}.$$

Diese Beweisführung ist nicht einwandfrei; überdi
sie von den Differenzen $\triangle x$, $\triangle y$ und nicht von den Diffe

Den Gedanken der Ausgleichung der Fehler ri
Carnot auf. Er behandelt die Kreistangente ähnlich wi
die Parabeltangente, geht aber in der Deutung der O
weiter als dieser.

Vivanti berichtet darüber (in Cantor, G. d. M.

„Die in den Rechnungen vorkommenden Größen si
bestimmt, teils unbestimmt; die letzteren schleichen sich
Rechnungen ein, wenn wir zur Erleichterung gewis
durch andere ersetzen, die von diesen wenig verschie
und von diesen ausschließlich hängen daher die Fehl
welchen die Resultate behaftet sind. Sobald also säm
kürliche Größen aus den Rechnungen entfernt wo
können wir mit Sicherheit annehmen, daß die Fehler si
gehoben haben . . . . . .

Ist so die Strenge der Infinitesimalrechnung ge
bleibt nur noch übrig, zu bemerken, daß sie die Gre
mit welcher sie in den Resultaten übereinstimmt, an

ertrifft, insofern sie sich vorsetzt, jeder Grenzbestimmung
ehren und mit bloß algebraischen Rechnungen zu ver-
Wird man also, fragt Carnot, auf die unermeßlichen
verzichten, die die Infinitesimalmethode darbietet, aus
sich auf einen Augenblick von dem genauen Verfahren
mentargeometrie zu entfernen? Wird man einem ebenen
quemen Wege einen dornigen Pfad vorziehen, auf welchen
chwer ist, sich nicht zu verirren?
er Standpunkt Carnots ist richtig, aber sein Verfahren
er so einfach, als es sein dürfte, noch ganz vollständig.
hzuweisen, daß die ungenauen Gleichungen sich durch
ng der unendlichkleinen Größen in genaue verwandeln,
man nur die unendlichkleine Größe als eine willkürliche
zu definieren; denn, da nach dieser Definition die unend-
ien Größen sich so klein annehmen lassen, daß die aus
tilgung hervorgehenden Fehler kleiner sind als jede be-
orgegebene Größe, so sind diese Fehler genau gleich
s findet also wirklich eine Aufhebung der Fehler statt,
er durch gegenseitige Ausgleichung (compensation des
wie Carnot meint, sondern dadurch, daß jeder Fehler
selbst zu Null wird."

die neue Lehre, wie die bisherigen Darlegungen zur
beweisen, die mathematische Strenge, welche die Werke
n auszeichnete, missen ließ, so suchte man sie durch
3 an die Denkweise derselben zu begründen. Als ge-
Mittel bot sich hiezu die Exhaustionsmethode dar.

r erste, der sie zur Anwendung brachte, war Benjamin
s (1707—1751). Er bewies auf Grund derselben, daß die
von x^n nx^{n-1} ist, und schloß hieran die den praktischen
s Erfinders des ballistischen Pendels bezeugende Bemer-
aß die Infinitesimalmethode kürzer zum Ziele führe und
en Vorzug vor jener verdiene.
bins bildete auch das Exhaustionsverfahren um und wurde
Begründer der modernen Grenzwertmethode. Er
mlich seinen Untersuchungen folgenden Gedanken zu-
„Nähert sich eine veränderliche Größe durch fortgesetzte
r Abnahme einer bestimmten Größe, ohne sie je zu
eiten, und kann der Unterschied zwischen der bestimmten
nd der sich ihr nähernden Veränderlichen kleiner als
ie noch so kleine angebbare Größe gemacht werden, so
nan an, die Veränderliche werde schließlich der be-
Größe gleich. Das Gleiche gelte auch für ein ver-
es Verhältnis. (Cantor, G. d. M.)
ch Maclaurin „greift auf die Exhaustionsmethode der Alten
deren Wesen er in folgendem Satz kennzeichnet: „Wenn
derliche Größen AP und AQ, welche fortwährend in
lerlichem Verhältnis zueinander stehen, sich gleichzeitig
mten Größen AB und AD in der Weise nähern, daß sie
n ihnen um weniger als irgendein Angebbares unter-

scheiden, so muß das Verhältnis dieser Grenzen AB das Gleiche sein wie das unveränderliche Verhältnis der AQ.“ (Cantor, G. d. M.)

Zu den Anhängern der Grenzwertmethode gehör d'Alembert, der ganz dem modernen Standpunkt entspr Definitionen der Begriffe des Unendlichgroßen und des lichkleinen gab und sie zu Grundlagen seiner Deduktionen

Ferner ist Kästner zu nennen. Seine Ansichten folgenden skizziert. „Nimmt n unbeschränkt zu, so ha die Einheit zur Grenze; das läßt sich aber dadurch aus daß man sagt, es dürfe die endliche Größe b gegen die liche Größe a n vernachlässigt werden. Auf ähnliche Wei sich die unendlichen und unendlichkleinen Größen schiedenen Ordnungen rechtfertigen. Ist Z eine Funktio welche für den Wert z + e von z den Wert Z + E annn heißt die Grenze, welcher sich $\frac{E}{e}$ bei abnehmenden E u beschränkt nähert, das Verhältnis der Differ von Z und z; E und e heißen die Differentiale. Af dieser Definition ergibt sich, unter der Voraussetzung, d ganze positive Zahl bezeichnet und $Z = z^n$ ist:

$$\lim \frac{E}{e} = n z^{n-1};$$

diese Formel läßt sich auf jeden reellen Wert von n est Weiter unten mischt aber Kästner in die Definit Differentials den Geschwindigkeitsbegriff ein. Die Die dZ, dz von Z, z, sagt er, sind nicht die wirklichen Zu welche dieselben in einer bestimmten Zeit erhalten würd sie sich diese ganze Zeit hindurch mit den Anfangsgesch keiten veränderten; das Verhältnis $\frac{dZ}{dz}$ ist also gleich e hältnis der Geschwindigkeiten, es möge die Zeit en ic oder nicht, und wenn man die Zeit als unendlichklei so geschieht das nur, um die Geschwindigkeiten als k betrachten zu dürfen. Die so verstandenen Differenti nichts anderes als die Newtonschen Fluxionen. Man an nach Maclaurin zeigen, daß das Verhältnis der Fluxio z^n und von z gleich $n z^{n-1}$ ist; es stimmen also die Re der Fluxionsrechnung mit demjenigen der Leibnizschen Re vollkommen überein und man kann diese letztere mit Vo gebrauchen.“ (Vivanti in Cantor, G. d. M.)

Wie wenig die bisher behandelten Theorien über die lagen der Infinitesimalrechnung befriedigten, beweist ein der Berliner Akademie im Jahre 1784 gestellte Preisfrage, verlangt wird „eine lichtvolle und strenge Theorie dess man Unendlich in der Mathematik nennt“ und „daß an sicheren und klaren Grundbegriff angebe, welcher das Ine

ürfe, ohne die Rechnungen zu schwierig oder zu lang
n".

Preis erhielt Lhuilier, der in seiner Abhandlung Expo-
nentaire des principes des calculs supérieurs (Berlin
lie Grenzwertmethode unter Beibehaltung der Ausdrucks-
l der Bezeichnungen der Infinitesimalmethode eintrat.
ießlich sei noch, bevor auf die Kritik des Limeskalküls
en wird, G. S. Klügel (1739—1812) zitiert: „Differentiale
Glieder des Verhältnisses der Veränderungen zweyer
rerer zusammengehörigen Größen, sofern dieses Ver-
:ht von der Quantität der Veränderungen, sondern bloß
eränderlichen Größen abhängt. Nämlich, wenn zwischen
ßen x, y irgend eine Relation festgesetzt ist, und diese
n $\triangle x$ und $\triangle y$ sich verändern, so bleibt die Relation
$x + \triangle x$ und $y + \triangle y$ dieselbe wie zwischen x und y,
Verhältnis $\triangle x : \triangle y$ hängt theils von dieser Relation,
der willkürlich zu bestimmenden Quantität der Ver-
n ab. Betrachtet man das Verhältnis der Veränderungen
l y nur bloß in Rücksicht auf die Bestimmung durch
)n zwischen diesen Größen, so ist es ein Differential-
und die Glieder desselben heißen Differentiale. So
der Theil des Quotienten $\frac{\triangle y}{\triangle x}$, der von der Quantität
derungen unabhängig ist, ein Differentialquotient . . . . .
Symbole $dx : dy$ heißen die Differentiale von x und y;
muß sie durchaus nicht als Größen betrachten, so
diese sich auch vorstellen möchte. Denn dadurch setzt
Näherungsgleichung anstatt der genauen und vollstän-
che noch die Potenzen von $\triangle x$ enthält."

Der wissenschaftliche Standpunkt.

ann sich im folgenden natürlich nur um die Besprechung
fragen handeln, welche in innigem Zusammenhange
:hulmathematik stehen. Auszuschließen sind also vor
nigen, welche den modernen Zahlbegriff betreffen sowie
welche sich auf das mathematische Unterrichtspensum
ende Funktionen beziehen. Es sollen sonach nur
Funktionen und solche, die aus diesen konstruiert
nnen, in Betracht gezogen werden.

den Limesbegriff einzuführen, geht man im allge-
n den arithmetischen und geometrischen Reihen aus.
arithmetische Reihe

$: = a_1 + d,\ a_3 = a_1 + 2d, \ldots\ldots a_n = a_1 + \overline{n-1}\, d,$

)rausgesetzt sei, daß $d > o$ ist, wächst mit wach-
n über alle Grenzen. Damit ist gesagt, daß keine
geben werden kann, die größer als sämtliche Glieder
ist. Im Gegenteil lassen sich zu jeder noch so großen
er in beliebig großer Anzahl ausfindig machen, welche

jene übertreffen. Man drückt diese Tatsache auch kurz a
man sagt: a_n wird mit wachsendem n unendlich g
Unendliche gilt also als Veränderlich-Endliches (als e
dendes, nicht Gewordenes).

Nimmt man eine geometrische Reihe

$$b_1,\ b_2 = b_1 q,\ b_3 = b_1 q^2,\ \ldots .\ b_n = b_1 q^{n-1}$$

so wächst b_n gleichfalls mit wachsenden n über alle
wenn $q > 1$ ist. Ist dagegen $o < q < 1$, so gelingt es
Zahl anzugeben, die größer als Null ist und die von
Gliedern der Reihe übertroffen wird. Es gibt vielmehr
man auch immer die Zahl ε annehmen mag, nur ein
Anzahl von Gliedern, welche größer als ε, dagegen e
liche Anzahl von Gliedern, welche kleiner als ε sind.

Früher hatte man (z. B. Jakob Bernoulli) dies
dadurch zum Ausdruck gebracht, daß man sagte: ds
Glied der unendlichen geometrischen Reihe ist Null.
nicht angeht, bei einer unendlichen Reihe von ein
Gliede zu sprechen, so gebraucht man heutzutage
folgenden Ausdrücke: o ist der Grenzwert von b_n b
mit unbegrenzt wachsendem n der Grenz
konvergiert mit unbegrenzt wachsendem
b_n hat die Tendenz o zu werden, b_n wird
grenzt wachsendem n unendlich klein.

Schriftlich wird dies durch die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} b_n = o$$

dargestellt, wobei $n = \infty$ heißen soll, daß n die Wer

$$1, 2, 3, \ldots n, \ldots$$

ohne bei einer der Zahlen Halt zu machen, durchlau
ist zu beachten, daß b_n ebensowenig o, wie n ein
Wert erreichen kann.

Was hier im besonderen Falle einer abnehmend
schen Reihe gezeigt wurde, kann in folgender We
meinert werden.

Es sei

$$c_1, c_2, \ldots . c_n, \ldots$$

eine unbegrenzt fortsetzbare Reihe von reellen Zahl
genannte Zahlenfolge, von der vorausgesetzt s
Elemente der Größe nach entsprechend den Beziehu

$$c_1 \leqq c_2 \leqq c_3 \leqq \ldots .$$

geordnet seien. Außerdem soll durch die Element
für jeden Index ν c_ν bestimmt sein. Es sind dann z
keiten vorhanden: entweder wächst c_n mit unbegre
dem n über jede Grenze oder es gibt eine solche,
nicht hinaus kann (unbeschränkte und be
Zahlenfolgen). Ein Beispiel der letzten Art ist $\sqrt{2}$
kleiner als 2 ist.

Es kann gezeigt werden (was wir hier übe
jede beschränkte aufsteigende (absteigende) Folge

itzt. Wird derselbe mit c bezeichnet, so kann man
$\lim c_n = c$, wobei hier wie auch im folgenden der
tändliche Zusatz $n = \infty$ unterdrückt ist. Die angegebene
; besagt, daß $c - c_n$ kleiner gemacht werden kann als
)ig kleine Größe ε, wenn nur n entsprechend groß ge-
rd. Durchdie Angabe einer Zahl ε werden also die
der Zahlenfolge in zwei Klassen geteilt: zur ersten
hören diejenigen, welche von c um ε oder um mehr
eichen, zur zweiten Klasse diejenigen, welche von c um
ls ε abweichen. Während die ersteren nur in endlicher
rhanden sind, ist die der letzteren unendlichgroß.

Vorhergehende kann auch so gefaßt werden: Eine un-
Zahlenfolge (c_n) besitzt einen bestimmten Grenzwert,
$c_\nu - c_n$ für einen hinlänglich großen Wert von n und
Wert von ν beliebig klein wird. Es mag hinzugefügt
daß die angegebene Bedingung für die Existenz eines
tes eine notwendige und hinreichende ist. Daß sie not-
t, folgt unmittelbar aus dem Grenzbegriffe, daß sie hin-
ist, wurde von Cantor, Dedekind und anderen nach-

das Rechnen mit Grenzwerten anbelangt, so gelten
Sätze:

)er Grenzwert einer Summe (Differenz) ist gleich der
Differenz) der Grenzwerte.
)er Grenzwert eines Produktes ist gleich dem Produkte
:werte.
)er Grenzwert eines Quotienten ist gleich dem Quotienten
:werte, vorausgesetzt, daß der Grenzwert des Divisors
:schieden ist.

Beweise dieser Sätze sind leicht zu erbringen. Wir
sie, um gleich zur Anwendung des Limeskalküls zu

ei $y = f(x)$ gegeben und unter f(x) irgendein arith-
Ausdruck verstanden, die Funktion also im Sinne
finiert. Wir wollen das Verhalten der Funktion bei
gängen untersuchen.

nen wir einen bestimmten Wert x_0 an, so können wir
rechende y_0 (genau oder unbegrenzt genau) berechnen.
Substitutionswert für $x = x_0$. Lassen wir x
onvergieren, ohne daß also x_0 selbst erreicht wird, so
wir $y_1 = \lim_{x = x_0} f(x)$. y_1 und y_0 können übereinstimmen
. Beispiele der ersten Art sind leicht anzugeben. Ein
er zweiten Art ist:

$$y = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}.$$

die Stelle $x = 0$ ist diese Funktion nicht definiert, wir
so hier etwa $y = 0$ setzen. Nun ist aber

$$\lim \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = +\frac{\pi}{2},$$

wenn x von der positiven Seite nach o konvergiert, ur

$$\lim \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2},$$

wenn x von der negativen Seite nach o konvergiert. A wir also der betrachteten Funktion an der Stelle x = der Werte $\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ beilegen würden, immer wäre n der Grenzwerte vom Funktionswert verschieden.

Eine Funktion, bei welcher der Substitutionswert mit keinem der vorhandenen Grenzwerte $\lim_{x = x_0} x$ über heißt unstetig. Im entgegengesetzten Falle heißt die stetig. Die Funktion f(x) ist also an der Stelle x = x stetig, wenn $f(x_0) = \lim_{x = x_0} f(x)$ ist.

Ist eine Funktion stetig, so existiert im allgemeinn Ableitung. Sie ist durch

$$\lim_{h = 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

gegeben, wo h einen positiven oder negativen Zu unabhängigen Veränderlichen bedeutet. Die geometrisc tung der Ableitung läßt sich leicht angeben. Sind P u Punkte der Kurve y = f(x) mit den Koordinaten (x y (x + △x, y + △y), so gibt der Differenzenquotient

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

den Richtungskoeffizienten der durch P und Q gehend an. Lassen wir Q dem P auf der Kurve unbegrenzt nah so entsteht aus der Sekante die Tangente und aus renzenquotienten die Ableitung von f(x). Somit gibt Richtungskoeffizienten der Tangente an.

In ähnlicher Weise läßt sich die phoronomische der Ableitung von f(x) angeben.

Wir haben bisher die grundlegenden Sätze der I rechnung in moderner Auffassung entwickelt, ohne di die wir ihnen gegenüber einnehmen, zu kennzeichnen. an der Zeit, die herrschenden Anschauungen kritisch zu

Was zunächst den Terminus Grenzwert anbelan dahingestellt bleiben, ob bei einer unbegrenzt fort Reihe von einer Grenze gesprochen werden darf, darunter nicht bloß eine Schranke verstehen will.

Wichtiger ist, daß die Definition des Grenzwerte „Eine Zahl a gilt als Grenze einer un fortsetzbaren Zahlenreihe a_ν ($\nu = 0, 1, 2, .$

*) Auf die Tatsache, daß die Stetigkeit einer Funktio reichende Bedingung für die Existenz einer Ableitung ist, wird des Aufsatzes entsprechend, nicht eingegangen.

ie Differenz $a - a_\nu$ mit hinlänglich wach-
Werten von ν beliebig klein wird".
scharf ist, wie es bei einem mathematischen Begriff
ist. Eigentlich wird ja nicht von den Merkmalen des
tbegriffes gesprochen, sondern ein Kriterium angegeben,
in einem besonderen Fall entscheiden kann, ob eine
Zahl die Grenze einer Zahlenfolge ist oder nicht.
n doch wenigstens dieses Kriterium brauchbar wäre!
st so gestaltet, daß es gerade in den wichtigsten Fällen
muß. Nehmen wir ein Beispiel. Gegeben sei die Zahlenfolge

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \ldots \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots .$$

i zu entscheiden, ob

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

i e durch die Reihe

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots . \text{ in inf.}$$

ei. Wie will man zeigen, daß die Differenz

$$e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

lein wird? Die Unmöglichkeit, in einem solchen Fall
ium anzuwenden, beweist zur Genüge, daß die obige
nicht logisch einwandfrei ist.
t viel besser steht es mit der Definition der Existenz
nzwertes:
mit die unbegrenzte Zahlenfolge (a_ν) eine
nte Grenze (einen bestimmten Grenzwert
mes) a besitze, in Zeichen:

$$a = \lim a_\nu \ (\nu = \infty) \text{ oder: } \lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$$

wendig und hinreichend, daß $a_n + \rho - a_n$ für
inlänglich großen Wert von n und jeden
n ρ beliebig klein wird."
Entscheidung, ob für jeden Wert von ρ die genannte
beliebig klein wird, ist geradezu unmöglich. Denn wenn
kleine Zahl ε vorgelegt wird, so gelingt es ja wohl,
ein ρ ausfindig zu machen, so daß

$$a_n + \rho - a_n < \varepsilon,$$

wird immer einwenden können, daß die Differenz ja
größeren Betrag anwachsen kann, wenn man nur für ρ
ere Zahl wählt als die vorher betrachtete.
n man aber auf einem anderen Wege als dem ver-
achweisen kann, daß $a_n + \rho - a_n$ beliebig klein gemacht
ann, dann sind Grenzwertbestimmungen überflüssig.
ll man z. B. bei der Feststellung, ob eine Funktion
oder nicht, vom Limesbegriff reden?

Die Unklarheiten, die schon bei der Definition d wertbegriffes und bei dem Existenzbeweis desselben häufen sich, wenn auf das Wesen des Grenzwertbegri eingegangen wird. Was bedeutet

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a\,?$$

Haben wir eine Gleichung im gewöhnlichen Sinne Dann müßte $\lim_{\nu=\infty} a_\nu$ eine bestimmte Zahl sein, da ja a ist; das würde aber zur Voraussetzung haben, daß es unbegrenzt fortsetzbaren Reihe eine größte Zahl gibt, der herrschenden Meinung unmöglich ist. Somit ist $\lim_{\nu=\infty}$ änderlich anzunehmen. Kann aber eine sich beständ dernde Größe einer festen Größe a gleich sein? Ein einem Seienden? Und wenn nicht, wäre es dann nicht statt des Gleichheitszeichens das Ungleichheitszeiche $>$) zu verwenden, da ja doch $\lim_{\nu=\infty} a_\nu$ immer kleiner (g a bleiben muß, wie groß man auch ν nehmen mag? U heit nie eintreten kann, da es kein letztes ν gibt? W $a - \lim_{\nu=\infty} a_\nu$? Ist diese Differenz Null? Uneigentlich eigentlich Null? Welchen Vorteil soll die Unterschei uneigentlichen und einer eigentlichen Null für die W haben? Wie weit bleibt man, wenn man sich dem nähert, ohne ihn zu erreichen, davon entfernt? Kann prozeß über die Stelle $x = x_0$ einer Funktion f(x) sagen, wenn es sich bloß um $\lim_{x=x_0} x$ und nicht dire Wert x_0 handelt? Wie ist die Ueberbrückung der Klu Substitutionswert und Grenzwert ins Werk zu setzen

Und schließlich die wichtigste Frage: Was leistet a wertverfahren? Nehmen wir die Zahlenfolge

$$1,\ 1{\cdot}4,\ 1{\cdot}41,\ 1{\cdot}414,\ \ldots$$

an, die durch den Algorithmus des Wurzelausziehens wonnen wird. Kann der Grenzwertmathematiker mehr der Approximationsmathematiker? Dieser sagt uns, beliebig viele Dezimalstellen bestimmbar ist, und wei Fehlergrenze für jedes n anzugeben. Jener bringt absolut genaue Resultate. Wie vermittelt er also den von der Approximations- zur Präzisionsmathematik?

Wir sind der Ansicht, daß ein solcher Uebergang unmöglich ist, daß die Erfolge, die sich das Grenzw zuschreibt, auf Rechnung der Approximationsmathemat sind. Man vergesse nicht, daß wohl die Differenz $a - a_n$ klein gemacht werden kann, daß aber immer, so $a - a_n$ sein mag, noch unendlich viele Glieder außera

Wenn dem Limeskalkül keine Widersprüche in d e r e n nachgewiesen werden können, so verdankt e

pproximationsmathematik, andererseits dem Umstande,
Darstellungsmittel nicht hinreichen, kleinste Zahlen
Weise miteinander in Vergleich ziehen zu können.
nvollkommenheit unserer Darstellungsformen darf man
üsse ziehen. Wenn man zum Beispiel sagt, daß
ionalen Zahlen in zwei Klassen teilt, von der Eigen-
in der einen keine kleinste und in der anderen keine
l existiert, so widerspricht das dem Begriff der
der rationalen Zahlen. Richtig ist ja doch wohl, daß
mstande sind, diese kleinste oder größte Zahl zum
zu bringen. Auf keinen Fall aber darf man behaupten,
schon die Existenz jener Zahlen leugnet, daß durch
ekindschen Schnitt $V\overline{2}$ eindeutig bestimmt ist,
nah an $V\overline{2}$ auch immer eine rationale Zahl ange-
ird, noch unendlich viele irrationalen Zahlen zwischen
$\overline{2}$ liegen.

iem Falle, wo man noch vor kurzem das Grenzwert-
zur Aufdeckung „der wahren Werte“ gebrauchte, gibt
utage die Unzulänglichkeit desselben zu: bei den so-
unbestimmten Ausdrücken wie $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ für $x = 1$.
übergang liefert für $x = 1$ den Wert $y = 2$. Diesen
man nun nicht als wahren aus, sondern als den un-
Definitionswert an der Stelle $x = 1$. Warum bleibt
bei dem wahren Sachverhalt? Solange man eben
le $x = 1$ wählt, stimmen (geometrisch gesprochen) die
der Bildkurve der Funktion y mit dem der Geraden
überein. Wählt man aber $x = 1$, so dient die Gerade
Bestimmung von y. y kann somit alle möglichen Werte
Unter diesen befindet sich auch $y = 2$. Es besteht aber
igung, gerade diesen als den „wahren Wert“ von y
nen. Man kann wohl, wenn man gerade will, fest-
ß auch für $x = 1$ nur ein y-Wert existiere und bei
ereinbarung 2 für denselben annehmen. Was sollen
i Festsetzungen zur Aufhellung der Abhängigkeits-
der Veränderlichen beitragen?

end man zugibt, daß die Grenzwertbestimmung bei
ten Ausdrücken höchstens zu willkürlichen Festsetzungen
ist, hält man immer noch daran fest, daß der Limes-
gediegene Grundlage der Infinitesimalrechnung ab-
n; und doch ist der Differentialquotient nichts anderes
sdruck der Form $\frac{o}{o}$, da ja $\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ für $h = o$
orm erscheint. Ueberdies setzt man sich in Wider-
der Grenzwertrechnung selbst, indem man außeracht
ler Divisorgrenzwert von Null verschieden sein soll.
dings glaubt man diese Schwierigkeit umgehen zu
dem man die Ableitung von f(x) per definitionem ein-
r sie ist doch nicht zu vermeiden und erscheint wieder,

wenn man die phoronomische und geometrische Int der Ableitung von f(x) vornimmt. Zudem scheint un wendigkeit der Anwendung des Grenzwertverfahrens Darstellungsart in Frage gestellt.

Um die Gedanken, die im vorhergehenden au gesetzt wurden, deutlicher zum Ausdruck zu bringen, s einige Beispiele besprochen werden. Für die Auswah ist einerseits die Rücksicht auf die Schulmathematik, a die Rücksicht auf die Anwendungsfähigkeit des Limesk gebend.

1. Bolzanos Satz über stetige Funktio wollen den Sachverhalt, sowie wir ihn verstehen, dr Dialog zwischen A (Lehrer) und B (Schüler) klar suchen.

A. Wenn f(x) innerhalb des Intervalles (a, b) ste wenn f(a) und f(b) verschiedene Vorzeichen haben, einen Wert c zwischen a und b, für den $f(c) = o$ wil

B. Das ist selbstverständlich. Da f(x) stetig i während x die Werte von a bis b durchläuft, f(x) i von f(a) bis f(b) durchlaufen, einige davon vielleicht u aber gewiß jeden wenigstens einmal, also auch o, da f(a) und f(b) liegt. Man müßte ja aus dem Umstan zwischen a und b den Wert o nicht annimmt, geradz Unstetigkeit von f(x) schließen. Der angegebene Satz is eine unmittelbare Folgerung aus dem Begriffe der Steg Funktion.

A. Mit nichten. Die Notwendigkeit eines Bewe Dir sofort klar werden, wenn ich frage: Warur Funktion durch o hindurchgehen? Höre übrigens. Ich n daß $f(a) < o$ und $f(b) > o$ sei. Ich teile die Differe die Hälfte, erhalte für x den Wert c_1 und berechne (c können 3 Fälle eintreten: entweder ist $f(c_1) = o$ od oder $f(c_1) < o$. Wäre $f(c_1) = o$, so wäre der Bewe Trifft dies nicht zu, dann sei etwa $f(c_1) > o$; ich stz und $b_1 = c_1$ und wende nun das vorige Verfahren auf as (a_1, b_1) an.

B. Was bestimmt Dich, den Nullwert der Funktio Intervall zu suchen? Vergiß nicht, daß Du den fragl erst zu beweisen hast!

A. Gewiß nicht. Aber Du wirst zugeben, daß ic d wert der Funktion im Intervall (a, b) kenne, wenn ic solchen im Intervall (a_1, b_1) anzugeben vermag. Ich bilde die Differenz $b_1 - a_1$ und erhalte $x = c_2$. Ist $f(c_2) = o$ s Satz bewiesen. Ist etwa $f(c_2) < o$, so setze ich $a_2 = c_2$, und gewinne so ein neues Intervall (a_2, b_2), auf welches gegebene Verfahren wieder angewendet werden kann

B. (dem die Schlußweisen der Grenzwertmeth sonderlich geläufig sind, glaubt, daß er von A irrege hrt

rtet): Nimm Du Dir ein Intervall an, so klein Du
· komme endlich zum Beweise des Satzes.
ißt sich nicht beirren und fährt fort): Man erhält
geschilderten Prozeß einmal das gewünschte c oder,
, so doch zwei Folgen:

$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots ; b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots ,$

ıvon aufsteigend, die andere absteigend; beide sind
da ihre Glieder innerhalb (a, b) liegen. Es existiert
)hl lim a_n als auch lim b_n. Da außerdem

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

man

$$\lim (b_n - a_n) = \lim \frac{b-a}{2^n} \text{ oder}$$

n $a_n = o$, d. h. die beiden Folgen konvergieren nach
Grenzwert c. Dieses c ist aber zugleich der Wert,
chen; denn zufolge der Stetigkeit von f(x) ist

$$\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(c).$$

: $f(a_n)$ negativ und alle $f(b_n)$ positiv sind, ihre Grenz-
doch gleich sein sollen, so muß $f(c) = o$ sein.
enn ich Dir auch Deine Umständlichkeit bei Beweis-
zugute halten will, so darf ich Dir doch nicht ver-
3 mir der Satz nach Deinen Deduktionen nicht klarer
st und daß ich nach wie vor an meiner Ansicht fest-
derselbe eine unmittelbare Folgerung des Stetigkeits-
t.

ıst nicht gehalten, was Du versprochen. Du hast für
ıer konstruierten Intervalle die Existenz eines Null-
chgewiesen. Was Du getan hast, war nichts anderes
nschließung einer Wurzel der Gleichung $f(x) = o$
ırenzen, die immer enger und enger gezogen wurden.
man so beliebig genaue Näherungswerte erhalten,
nicht exakte, nicht einmal in Gedanken, da der be-
Denkprozeß kein Ende findet.
heißt lim lim $f(a_n)$ und lim $f(b_n)$ streben dem Werte o
dabei o erreicht oder nicht? Sagst Du ja, so hast Du
, wie durch fortgesetztes Halbieren einer endlichen
Quotient o erscheinen kann; sagst Du nein, so ver-
den Widerspruch, eine positive Größe einer nega-
ızusetzen. Entgegnest Du, daß noch ein dritter Fall
zu ziehen ist, da der Grenzwert nichts Gewordenes,
was Werdendes ist, so erheischt der Umstand Auf-
e man aus etwas in Entwicklung Begriffenem Schlüsse
tige Individuum ziehen kann.
falls hast Du im Verlaufe Deiner Beweisführung von
ıauch gemacht, die dunkler sind als derjenige, dessen
für notwendig hältst.
ntwort des A ist uns nicht bekannt.

2. Der Grenzwert von $\frac{\sin x}{x}$ für $x = o$.

leicht nachweisen, daß für alle von o verschiedenen
Ungleichungen bestehen:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Daraus schließt man mit Hilfe der Limesrechn
$\lim_{x=o} \cos x = 1$ und $\lim_{x=o} \frac{1}{\cos x} = 1$ ist, daß $\lim_{x=o} \frac{\sin x}{x} = 1$

Nehmen wir einmal an, es wäre nachträglich zu z
die beschränkte Zahlenfolge $\lim_{x=o} \frac{\sin x}{x}$ nach dem Grenz
vergiert, so hätte man zu zeigen, daß $1 - \frac{\sin x}{x}$ beli
wird, wenn x möglichst klein gewählt wird. Die Rech
so durchzuführen, daß man sin x, hierauf $\frac{\sin x}{x}$ best
Ganze läuft also darauf hinaus, von der Gleichung

$$\lim \frac{\sin x}{x} = \frac{\lim \sin x}{\lim x}$$

Gebrauch zu machen. Nun wissen wir aber, daß di
richtig sein muß, da lim x der Null zustrebt, somit i
Richtigkeit des Resultates $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$ nicht gesiche

Der wahre Sachverhalt ist ja wohl der, daß d
$y = \frac{\sin x}{x}$ an der Stelle $x = o$ nicht definiert ist. I
y daselbst jeden beliebigen Wert annehmen. Einer a
dient wohl eine besondere Berücksichtigung, nämlich l
da durch die uneigentliche Definition

$$\frac{\sin o}{o} = 1$$

die Funktion $\frac{\sin x}{x}$ stetig wird. Diese Festsetzung i
kürlich. Darum darf die Gleichung,

$$\lim_{x=o} \frac{\sin x}{x} = 1$$

nicht, wie es allgemein geschieht, zur Grundlage für di
mung der Ableitungen der trigonometrischen Fun
nommen werden.

3. Wallis' Grenzwertaufgabe. Um auch
spiel aus der Integralrechnung zu bringen, betrach
Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}.$$

:r Grenzwertrechnung bestimmt man denselben, indem
:iner Stelle

$$\lim \frac{n^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}}$$

ıg zieht und sodann den ersten Grenzwertsatz von
rwendet:

:n $b_1, b_2, \ldots b_n$ eine unbeschränkt aufstei-
olge ist, so ist stets

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

r letzte Grenzwert existiert.
m Satze verlangte Voraussetzung trifft in unserem Falle
s ist:

$$\frac{n^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}} = \lim \frac{1}{n - n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{p+1}}$$

$$= \lim \frac{1}{p+1 - \frac{p(p+1)}{2n} + \ldots} = \frac{1}{p+1}.$$

r ist:

$$\lim \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

ag noch angemerkt werden, daß bei der Anwendung
ıyschen Satzes vorausgesetzt wird, daß p von -1
n ist, denn

$$\lim \frac{n-1}{n^0 - (n-1)^0}$$

cht.
$p = -1$ zu einem Ausnahmsfalle führt, ist übrigens
vergenz der harmonischen Reihe direkt zu erkennen.
ieser Ableitung ist zu bemerken, daß in der Beziehung:

$$\frac{n^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}} = \lim \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$$

lementaren Gleichheitsbegriff Gebrauch gemacht wird,
e linke Seite stets einen anderen Wert besitzt als die
e, da zwischen den beiden auftretenden Ausdrücken
chied besteht und bestehen bleiben muß, wie groß
immer n annehmen mag.
so wendet man uns ein, wenn zur Grenze übergerd, dann findet Gleichheit statt und darum ist es ge-, von Gleichheitszeichen Gebrauch zu machen. Doch diese merkwürdige Wortverbindung: zur Grenze über-

ganze Ableitung ist dann widerspruchsvoll, wenn sie
eit Anspruch erhebt, sie erhält aber Bedeutung, wenn

an Stelle der Grenzwerte Näherungswerte, allerdings genaue Näherungswerte, betrachtet werden.

Mit dieser Bemerkung wollen wir die Bespre Grenzwertverfahrens beschließen. Als Resultat derse wir es wohl aussprechen, daß der Limeskalkül mit unseren Schülern geläufig sind, in Widerspruch stel gebnis, das uns davon abhalten soll, den Grenzwe das Unterrichtspensum einzuverleiben.

Es mag noch einmal hervorgehoben werden, d die Frage, ob der Limeskalkül sich in logisch ei Weise entwickeln lasse, wenn der Zahlenbegriff ander mäßig gefaßt werde, der Tendenz unseres Aufsatzes en nicht eingegangen sind. Mitbestimmend war dabe Gedanke, daß eine Grundlegung der Infinitesimalr elementarer Hinsicht anders zu gestalten ist als eine sich auf die höchsten Probleme der Wissenschaft be

3. Der schulmäßige Standpunkt.

In unserer Ansicht, daß das Grenzwertverfahren n stand der Schulmathematik sein soll, werden wir besi wir Darstellungen betrachten, welche die Einführ Infinitesimalrechnung zum Ziele nehmen. Es soll nur i statt vieler gebracht werden.

Jacob (Lehrbuch der Arithmetik für Obergym den Grenzbegriff durch folgenden Lehrsatz ein:

„Wenn in einer Reihe von unendlich vielen Glieder zwar stets wachsen, dabei aber einen bestim nicht überschreiten, so nähern sich die Glieder einer bestimmten Grenze, und zwar ist diese Gren Nullpunkte nächste Punkt der Zahlenlinie, über wel Glied der Reihe hinausgeht“

und gibt folgenden Beweis desselben:

„Dieser Punkt ist deshalb die Grenze, weil ma beim stetigen Fortschreiten auf der Zahlenlinie beliebig kann. Denn käme man nur bis eine Distanz δ an ih wäre er nicht der dem Nullpunkte nächste Punkt linie, über welchen kein Glied der Reihe hinausgeh hätte schon jener Punkt diese Eigenschaft, der links liegt.“

Wir überlassen die Kritik dieser Beweisführung und fügen hinzu: Wenn man schon durchaus von Gr Unterricht sprechen will, so tue man es in einer em schaftlichen Standpunkt angepaßten Form. Darstellung Art gibt es genug. Wir verweisen auf die uns am sagende von Czuber (Einführung in die höhere Math

Den Differentialquotienten erklärt Jacob, wie fo

„Wir denken uns die Funktion $y = f(x)$ ver auf der so entstehenden Kurve zwei Punkte M

sie die Sekante MN gelegt; halten wir nun den Punkt
hrend sich der Punkt N auf der Kurve dem Punkte
nzt nähert, o h n e i h n z u e r r e i c h e n usw. . . . .
nmals betont, daß der Punkt N nie mit dem Punkte
enfallen, ihn nie erreichen darf, da sonst die ganze
; ihren Sinn verliert. . . . ."
sagt Jacob seinen Schülern, wenn sie ihm folgendes
Der Punkt M liege auf der Parabel $y = x^2$. N komme
der einen, dann von der anderen Seite an M heran.
r jedesmal die gleiche Tangente im Punkt M? Wenn
st zu erklären, daß die Tangente mit der Parabel
emein hat, die zudem nicht auf einer Geraden liegen?
verliert dann nicht die ganze Betrachtung ihren Sinn?
kann größere mathematische Strenge, als es gewöhn-
ht, anstreben und doch auf einfachere und dem Ver-
r Sache mehr entgegenkommende Weise vorgehen.
n bewerkstelligen ist, hat unter anderem Burkhardt
n über die Elemente der Differential- und Integral-
dessen Darstellung überdies den Vorzug besitzt, den
nicht zu benötigen, in durchaus befriedigender Weise

ardt entwickelt die Grundbegriffe der Differential-
m Beispiele des freien Falles. Er leitet die Formel
lere Geschwindigkeit des Beweglichen während der
bis t_2 ab:

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{1}{2} g (t_2 + t_1),$$

$t_2 = t_1 + h$:

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = g t_1 + \frac{1}{2} g h \ldots . (5)$$

ann fort:
iese Form der Gleichung können wir nun eine merk-
d für alles weitere fundamentale Folgerung anschließen.
n e n n ä m l i c h i n i h r $h = o$ setzen, mit anderen
können den Zeitraum, für den wir die mittlere Ge-
eit suchen wollen, auf Null reduzieren. Eine bestimmte
können wir mit diesen Worten nicht mehr verbinden;
Formel (5) liegt gar keine Schwierigkeit, die ver-
rde, daß wir in ihr nachträglich $h = o$ setzen." Es
die augenblickliche Geschwindigkeit zur Zeit t:

$$c = gt \ldots . . (6).$$

haben eine Größe gleich Null gesetzt, mit der wir
liert hatten. In den Elementen der Algebra wird aber
rt: M i t N u l l d a r f m a n n i c h t d i v i d i e r e n.
nun hier? Die auf diese Frage zu gebende Antwort
in 5 Nummern zerlegen:
können uns zur Rechtfertigung dessen, was wir
, einfach darauf berufen, d a ß e t w a s b e s t i m m t e s

dabei herauskommt. Als Mathematiker haben wi
Hand, uns unsere Probleme frei zu wählen; wir sind
zu sagen: wir interessieren uns nun einmal für dieses
und wollen uns mit ihm beschäftigen .....

II. Die Gleichung (6) ist einfacher als die Glei
wir bekommen ein einfacheres Naturgesetz, wenn wir
Abhängigkeit der augenblicklichen Geschwindig
frei fallenden Punktes von der Zeit fragen, als wenn
selbe Frage für die mittlere Geschwindigkeit wäh
bestimmten Zeitraumes stellen .....

III. Der Fehler $\frac{1}{2}$ gh, den wir begehen, wenn wi
lere Geschwindigkeit während eines kleinen Zeitraum
die augenblickliche Geschwindigkeit zu Beginn dieses e
ersetzen, ist nur klein, wenn h sehr klein ist ..... Wir
auch nie auf absolute Uebereinstimmung zwischen Be
und Rechnung zählen ..... Es hat also gar keinen
Rechnung genauer zu führen, als die Beobachtungen si
sobald wir für h einen so kleinen Bruchteil von t nem
wir ihn bei diesen Anforderungen an die Genauigke
lässigen können, dürfen wir auch ohne jedes Bed
mittlere Geschwindigkeit zwischen t und t + h, die a
lich physikalich greifbare ist, durch die augenblickliche G
digkeit zur Zeit t ersetzen, die ein einfaches mat
Gesetz befolgt .....

IV. ..... Man ist ... genötigt, von der For
soluter Genauigkeit abzusehen und sie durch d
weitgehende Forderung unbegrenzter Genauigkeit
Das heißt, wir verlangen alle unsere Formeln so ein
daß sie erlauben, den unvermeidlichen Fehler weig
klein zu machen, als wir nur immer wollen oder ve
langt wird .... Wollen wir erreichen, daß dieser Fe
wird als irgend eine vorgeschriebene Genauigkeitsg
brauchen wir dazu nur

$$h < \frac{2\varepsilon}{g}$$

zu nehmen .....

V. ..... Der einfachste Weg, um zu praktisch ver
Resultaten zu gelangen, ist, daß man erst die Sätze s e
daß sie unbegrenzte Genauigkeit zu erreichen ge att
dann im einzelnen Fall die erforderliche Spezialisi
nimmt ....."

In ähnlicher Weise behandelt Burkhardt das Fa
problem (für die Parabel) und kommt sodann auf
nungsweise der Differentialrechnung zu sprechen:

„In unseren bisherigen Untersuchungen haben wi
wiederholt Veranlassungen gehabt, zwei Werte x_1 und
$x_1 + h$ der unabhängigen Veränderlichen nebeneinander
zu ihnen gehörigen Funktionswerte

$$y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2 + h)$$

ı fassen und dann den Quotienten aus der Differenz nswerte, geteilt durch die Differenz der Argumentwerte:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

chen. Es empfiehlt sich, für diese Bildung einen ein besonderes Zeichen einzuführen, bezw. den allenommenen Festsetzungen sich anzuschließen. Man inen Differenzquotienten und bezeichnet sie mit

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}.$$

. Wir bedürfen ferner einer kurzen Bezeichnung für kommenden Worte „dasjenige, was aus einem Ausrd, wenn man in ihm nach gehöriger Reduktion einen menden Buchstaben, nämlich h, durch Null ersetzt"; en dafür:

$$\left(A\right)_{h=0}.$$

könnten wir das, was aus dem Differenzenquotienten wir in ihm die Differenz der Argumentwerte durch en, bezeichnen durch:

$$\left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right)_{\triangle x = 0}.$$

dessen bedienen wir uns der einfacheren Schreibweise:

$$\frac{dy}{dx} \ldots\ldots (4).$$

Zu beachten ist übrigens, daß wir damit die Zeichen noch nicht definiert haben, sondern nur das zuetzte Zeichen (4). Wir lesen daher das letztere auch ach dx statt dy durch dx, eben weil es sich nicht igentlichen Quotienten handelt. Wir gebrauchen aber en Ausdruck den allgemein eingeführten Namen Different, definieren also:

r dem Differentialquotienten dy/dx verir das, was aus dem Differenzenquotienten nn wir in ihm die Differenz △x der Argute gleich Null setzen."

aben die Gedanken Burkhardts über die Entwicklung nschauungen des Infinitesimalkalküls etwas ausführrgegeben, weil wir der Ansicht sind, daß der hier Weg der einzig gangbare ist, um den Schülern den nbekannte Land zu eröffnen. So ausgerüstet, werden ich gern der weiteren Führung des Lehrers anverın es ihm gelingt, Hoffnungen und Wünsche zu wecken, lung sie ersehnen.

prechen hier natürlich vom mündlichen Unterricht; ich, dessen Aufgabe darin besteht, den von den ter Anleitung des Lehrers verarbeiteten Stoff in der

Form zu bringen, wie er zwecks späterer Verwendung dächtnis einzuprägen ist, soll dem Lehrer die Arbeit nehmen: es hat das Gewordene, nicht das Werdende stellung zu bringen.

Mit dieser Bemerkung schließen wir die den unserer Arbeit vorbereitenden Ausführungen und führe gebnis derselben folgende methodologischen Sätze an:

1. Die Lehren der Infinitesimalrechnu sen so geboten werden, daß sie als allgei und anwendungsfähigere Fassungen beh Sätze des Unterrichtspensums anzusehen

2. Diese Verallgemeinerungen sind au tivem Wege an zahlreichen Beispielen, d der mathematischen Formulierung fähigen ständen zu entnehmen sind, klar zu mache

3. Die Deduktion hat erst einzusetze in den Schülern das Bedürfnis nach derse weckt ist.

4. Die Grundlegung der Infinitesimalr hat auf den dem mathematischen Denk Schüler fremden Limesbegriff zu verzichtn

5. Den Begriff der Stetigkeit hat mani gemeinen an der Schaulinie der betref Funktion klar zu machen. Der Hinweis Unzulänglichkeit dieser und die Notwen einer arithmetischen Fassung hat nur dan folgen, wenn die Schüler ein besonder ständnis für formale Fragen zeigen.

6. Parallel mit den neuen Lehren habe approximationsmathematischer Natur be zu werden. Dabei ist auf das lineare und tische Interpolationsverfahren einzugeh Reihenentwicklungen der Funktionen so soweit zu besprechen, als es diesem Zwek lich ist.

7. Bei den Entwicklungen der Lehren a die Geschichte zum Zwecke der Vermeidn falschen Auffassungen zu Rate gezogen zu

8. Eine Vermehrung des Lehrstoffs nicht platzgreifen, vielmehr sollen die tesimalen" Betrachtungen dazu dienen sammengehörige Fragen unter einem lichen Gesichtspunkte darbieten zu k

Wie diesen Forderungen zu entsprechen ist, s genden Kapitel gezeigt werden.

(Schluß folgt.)

CHULNACHRICHTEN.

I. Lehrplan.

: wurde in den Klassen I—V nach dem Normallehrplan für om 8. April 1909, Z 14.741, und in der VI. Klasse nach dem ormallehrplane vom 23. April 1898, Z. 10.331, erteilt.

bersicht nach dem Lehrplane vom 8. April 1909.

gegenstände	I.	II.	III	IV.	V.	VI.	VII.	Summe
. . . . .	2	2	2	2	2	2	1	13
ıprache (deutsche	4	4	4	4	3	3	4	26
e Sprache	6	5	4	4	3	3	3	28
prache	—	—	—	—	3	3	3	9
. . . . .	2	2	2	2	3	2	3	16
. . . . .	2	2	2	2	1	1	—	10
. . . . .	3	3	3	4	4	I.Sm.4 II. „ 3	5	26 (25)
chte	2	2	—	—	2	I.Sm 2 II. „ 3	3	11 (12)
. . . . .	—	—	—	3	3	2	—	8
. . . . .	—	—	3	2		4	4	13
ıes Zeichnen	—	2	2	3	3	3	2	15
chnen	4	4	4	3	3	2	3	23
ben	1	—	—	—	—	—	—	1
. . . . .	2	2	2	2	2	2	2	14
Summe . .	28	28	28	31	32	33	33	213

Unobligate Lehrgegenstände.

n zwei Kursen zu je 2 wöchentlichen Stunden (IV.—VI. Kl.)
ıbteilungen zu 2, 1 und 1 Wochenstunde.
ıbungen im chemischen Laboratorium in 2 Abteilungen zu je
wöchentlichen Stunden.
naftliche Schülerübungen in 4 Abteilungen zu je 2 wöchentlichen
Stunden.

e deutschen Aufsätze.

. Der Herbst. (S.) — 2. Die Entdeckung der Mörder des Ibykus. H.) — 3. Dir geben einen Halt, im Leben einen Stab, der Worte ier: „Halt ein! halt aus! halt an! halt ab! (Rückert.) (S.) — . Gebirge und Ebene. Ihr Einfluß auf das Wirtschaftsleben. (H.) — 5. Das Hildebrandslied. (S.) — 6. Die Eroberung der Luft. (S.) — 7. Ueber Schuldisziplin (H.) — 8. Der ist in tiefster Seele treu. — Wer die Heimat liebt wie du. (Archibald Douglas.) — Wie Siegfried Krimhild zum erstenmal sah. (S. nach Wahl.) — 9. Von Wien nach Klosterneuburg. (H.) — 10 Ritterleben im Winter ınd im Sommer. (S.) Ph. Gasparin.

. Die Spielmannspoesie. (H.) — 2. a) Wer etwas lernen will, ler muß dazu drei Gaben, — Von oben her, aus sich und auch ·on außen haben. (Rückert.) (S.) — b) Wie erwirbt Nathan die

Freundschaft des Tempelherrn? (S.) (Nach Wahl.) —
eilt, Zeit eilt. (Eine Turminschrift.) (S.) — b) Einfluß
züge auf die Literatur. (S.) (Nach Wahl.) — 4. Götz. (Ei
bild. (H.) — 5. a) Welchen Stoff bietet der Krieg der
b) Welchen Vorteil bietet uns das Studium moderne
(S.) (Nach Wahl.) — 6. a) Die Musik, eine treue Be
der Wiege bis zum Grabe. (S.) — b) Welche Ursac
gegen das Ende des Mittelalters den Verfall der Liter
(S.) (Nach Wahl.) — 7. Die Wurzel der Bildung ist
Früchte sind süß. (H.) — 8. Der mittelalterliche Staa
land und Frankreich. (Ein Vergleich.) (S.) 9. Die Be
modernen Verkehrsmittel. (H.) — 10. a) Lessing als
— b) Die Verwendung der Optik in der organischen
(Nach Wahl.) Dr. Hugo

II. Lehrmittelsammlungen.

Die Unterrichtsbehelfe haben im Schuljahre 1909/10 nach
zeichnete Vermehrung erfahren:

1. Lehrmittelsammlung für Erdkunde und Gesch

Ankauf. Schober, Böhmen, Oberösterreich und Salzburg,
Schlesien, Steiermark. — Vetters, Geolog.-tekton. Uebersic
Wiener Beckens. — Le Monnier, Sprachenkarte von Oesteri
— Baldamus, Karte zur deutsch. Gesch. d. 19. Jahrh.,
Hübner-Juraschek, Statist. Tabellen für 1909. — Perths,
— Deutsches Reichskursbuch für 1909 — Dachler, Karte de
Bauernhausformen. — Bädeker, Aegypten, Palästina. — Ita
Ethnogr. Karte von Mitteleuropa. — Debes, Handatlas, Kar
Kiepert, Formae orbis antiqui, 7, 8, 9, 10. 12, 13, 14, 15, 16, 1
22. 23, 26 und 27. — Carta typographica della provincia di Ron
di Roma. — Kiepert, Europa, polit. — Seyfert, Bilder zur G
— Möller, Die bedeutendsten Kunstwerke des Altertums, de
und der Neuzeit. — Seemann, 25 Wandbilder. — 146 Bro
graphien von Würthle. — Land und Leute (Nr. III: Norwegen, N
Rhein, Nr. XVI: Dresden und die Sächs. Schweiz, Nr. XVII: Ne
Sizilien, Nr. XX: Riesen- u. Isergebirge). — Monographien zur Wlt
(Bd. I: Elorenz und die Medici, Bd. III: Wallenstein, Bd. XIX: ie
Hansa, Bd. XXIII: Maria Theresia).

Geschenke. Raxrelief (Weinreb VI), 2 Bilder von Pompeji id
graphien von Venedig (Pollak VI), Nachbildung einer Vase aus er
pyramide (Leitkep IV a).

Verwalter: Prof. Dr. Rob. S

2. Naturhistorische Lehrmittelsammlung.

Ankauf. Skelett v. Menschen. — Entwicklung d. Hühnchen
des Vogelfußes. — 1 Demonstrations-Mikroskop. Skelett v. Leo
— 6 Mikroskopische Präparate. — Modell v. Auge. — Modell d. Oh
— Modell d. Gehirnes. — Modell eines Beckens mit Bändern. —
v. Hecht. — Injektion d. Teichmuschel. — Anatomie d. Tinnfi
Knorpelskelett v. Neunauge. — Nervenpräparat e. Schnecke.
präparat e. Schnecke. — 1 „Wandelndes Blatt". — 1 Stabheich
Nervenpräparat d. Ratte. — Kugelassel, Feuchtpräparat. — Aug v.
Injektionspräparat v. Hecht. — Anatomie v. Frosch. — 3 Reicht-M

mit 2× Revolver. Objektive: 3 und 7 a, Okulare: II und IV). — r-Okular. — Diverse Sezierbestecke.
enk. 1 Kinderschädel (F. Pritzl, VI.)

Verwalter: Franz Binder.

3. Physikalische Lehrmittelsammlung.

f. 1 Schalttafel samt Zugehör, 1 Kathetometer, 1 Mikrometer, 1 Eisenkugel $1^1/_2$ cm Φ, 1 Segnersches Wasserrad ohne Ständer, nen. 4 Aräometer 0·700 bis 2·000, 1 Pipette „1 cm³“, 3 graduierte 1 Pyknometer, 1 Geryk-Oel-Luftpumpe (Duplex), 1 Tisch für die pfturbine aus Glas, 3 Thermoskopröhren, 2 Zylinder für Hg. und azu (Expansion der Dämpfe), 1 Gay-Lussac-Apparat $\left(\alpha = \frac{1}{273}\right)$, für das Looser Thermoskop, 1 Federpendel mit Sonnenblummark, , 1 elektr. Glocke im Rezipienten, 1 Resonanzrohr auf Fuß, en f. d. Heliostat, Lamellenmagnet, 4 vernickelte Konduktoren 1 Normalkondensator in Etui, 1 Kegelkonduktor, 1 Elektrometer mit Proj.-Eichungsskala, 1 Proj.-Gradskala dazu, 1 Aluminium- mit Gradskala, Biegsames Drahtnetz nach Kolbe, 2 Luftkonden- 15 cm Φ mit Glimmerplatte, 1 stärkere Glimmerplatte, bierelektroskop, 1 Hilfselektroskop, 1 aufschraubbarer Drahtnetz- Kolbes Elektrometer, 1 Speckstein platte mit Griff, 1 Stück Bernstein, napparat nach Kolbe, 1 größerer Drahtnetzzylinder mit Blech- tstift mit Hartgummigriff. 1 Morsetaster, 1 Kette für galvanisches Glühlampenständer mit 6 Volt Osmiumlampe, 3 Stück 4 Volt- en, je 1 biegsamer Kupfer- und Zinkstreifen mit Hartgummigriff, sdoppelelementchen, 1 einfache kleine Tauchbatterie (5 Elemente), onstantes Element, 1 kleine konstante Batterie (5 Elemente), n mit Manganindraht, 1 Drahtrahmen auf Steinsockel zum Ver- dge, 1 Universalgestell nach Kolbe, 1 Joulescher Elektromagnet, nach Kolbe zum Nachweis d Ampèreschen Gesetzes, 1 bewegl. um Versuch von Lodge, 1 Normalelement nach Fleming. 1 Blas- bel, Schlauch u. Röhren, 1 großes Tauchelement (3 Kolben, Spiegelglaskasten, Scheidewand und Extraplatten, 1 Hg-Kontakt- Kupfervoltameter, 1 Apparat zur Erläuterung der Induktionsströme eorie d. magn. Kraftlinien nach Szymansky, 1 Glasapparatur ß) zur Geryk-Luftpumpe. — Werkzeuge: 1 Parallelschraubstock, Haspel, 3 Schraubenzieher, 1 Heftbohrer, 3 Zangen, 1 Hammer, cher Fuchsschwanz, 1 Drillbohrer mit Einsätzen und Spiralbohrern, l Lochspitze, 2 m Möbelrohr, 1 m Eisenstangendraht.

Verwalter: Dr. Franz Knapp.

4. Lehrmittel für Geometrie.

f. 14 Tafelzirkel, 1 Ellipsenlineal, 2 Hyperbellineale, 12 Tafel- Prisma und 1 Pyramide mit Schnittebene, Durchdringung zweier Pyramiden, Durchdringung zweier Prismen, Durchdringung eines einer Pyramide, Durchdringung eines Prismas mit einem Zylinder, mit eingelegter Ebene, Hohlkegel mit eingelegter Ebene, zwei für die Projektionsebenen (gerade parallel zur Kreuzrißebene, drei Projektionen), Kugel mit zwei ebenen Schnitten, hohle Halb- Kegel, Würfel mit Schrägrißdarstellung. — Vorlagenwerk für Projektionszeichnen von Josef Wild. — Krummlinige geom. von Scheineder. – 2 Tafeln Moderne Kunstschrift v. Lebeda.

Verwalter: Prof. Ernst Schmidt.

5. Lehrmittel für Chemie und Mineralogie.

f. Chemie: 6 große Pulvergläser mit Emailsignatur, 15 große 11 große Flaschen mit Emailsignatur, 2 Stative aus Eisen,

2 Röhrenträger aus Eisen, 1 Tischchen aus Eisen mit runder Plat
1 Satz Korkbohrer aus Stahl und vernickelt, 1 Mörser aus Achat
1 Stahlmörser mit Pistill, 1 Retorte aus Eisen mit Verschraubu
erzeugungsretorte aus Eisen mit Vierfuß, 3 verschiedene Feilen, 1
schlüssel, 1 Beißzange, 1 Rundzange, 1 Flachzange, 1 Zwickzwang
zange, 1 Hammer, 2 Schraubenzieher, 1 Korkpresse, 1 Akkumulat
Batterien zu je 4 Zellen, 1 Verbrennungsofen mit 12 Brennern, 1
apparat ohne Stativ, Apparat zum Nachweis der Wasserbildung b
brennung des Wasserstoffes, Apparat zum Nachweis der Ozonbild
Elektrolyse des Wassers, 1 Knallgaserzeugungsapparat, 2 Hoffma
mit 2 Stativen, 1 Chlorentwicklungsapparat, Apparat zur Demon
Phosphoreszenz, Glasteile zu einem Apparat für Bromwasserstol
Kugelrohr mit 6 Kugeln zur Demonstration des festen Kohlendio
modell zur Demonstration der Wirkung des Bierdruckapparate
erzeugungsapparat, 2 Apparate für die Synthese des Bromw
1 Ozonapparat nach Heumann, 1 Ozonapparat nach Teclu, 12
nach Pfaundler, 4 Wandtafeln (Hochofen, Martinofen, Puddelofen
stahlfabrikation), 1 Mendeljeff-Tafel, 2 Speckst einbrenner, Kupf
Bechergläser, Retorten, Eprouvetten, Vorlagen, Glaskolben, U-R
gläser, Glasröhren aus hartem und weichem Glas, Schalen aus in
Porzellan, Reibschalen aus Porzellan, Scheidetrichter, Erlmayerko
röhren, Glasperlen, Kautschukschläuche, Kautschukpfropfen, Korke
Präparate, Verbrauchsgegenstände.

Mineralogie: Hornblenden und Augite-Lukov, Sc
schliffen) Zöblitz, Kupferkies-Prinzenstein, Dolomit-Gosenbach, M
Kraben, Kupferblüte-Arizona, Sanidin-Drachenfels, Wismutic
Malachit pseud. n. Cerussit (?)-Nevada, Trümmerachat-Schottv
Twia Peaks, Lepidolith-Kalifornien, Muskovit mit Albit u. Apatit-Hl
Bergkristall—la Gardette, Quarz im Marmor-Carrara, Erbsenst
Sprudelstein-Karlsbad, 15 Quarzkristalle-Warstein, Morion-Gös
Amethyst-Brasilien, Andalusit-Lisens, Muschelmarmor-Bleiberg, Ei
Rutil-St.-Gotthardt, Granat-Fort-Wrangel, Limonit und Sideri
Apophyllit u. Datolith-Seisseralpe, Citrin-Schmirn, Analcim Fassa,
Ungarn, Cyanit-Schlegeisengrund, Albit-Schmirn, Brauner Glasko
Himbeerspat-Knapnik, Bohnerz-Gömör, Klapperstein-Lothringen,
kopf-Kidney Mine, Aquamarin-Brasilien, Turmalin-Elba, Kaolin
v. St. Amstel, Beryll im Quarz-Miask, Beryll-Ontario, Rubellit-Ha
Tigerauge-Oranje River, Leucit-Vesuv, Gips mit Schwefel-Gi
(Skalenoëder) Bleiberg, Kalzit (Vierlinge)-Maria Trost, Gipsdruse-As
Ellsworth, Fasergips-Hasmersheim, Siderit-Neudorf am Harz,
Prehnit-Driole palle, Chalzedon-Island, Azurit-Bisbee, Apatit-P
Podolien, 4 Pyritkristalle-Traversella, 10 Pyritkristalle (Zwillinged
Kreuzes) Brasilien, Salmiak-Dresden, Glimmer-Kanada, Li
Limonit n. Pyrit-Schemnitz i. U., Sternquarz-Starkenbach, Aragor-H
Aragonit-Hüttenberg, Silber-Lake superior, Apatit- (opak) Snarum, Ati
Ehrenfriedersdorf, Apatit- (farblos) Zillertal, Fluorit-Wallis, Fluo
glanz-Alstonmoor, Milchopal-Czervenitza, Halbopal-Ribschitz. 4 Li
Vesuv, 5 Feldspatkristalle-Karlsbad, Topas-Utah, Asbest-Prägra
quarz-Brasilien, Onyx-Brasilien, Achat mit Ansflußöffnung-Brasili
mit Gips-Weenzen, Hornstein-Leistler, Itakolumit-Brasilien, Kalz-
spat) Harz, Aragonit-Bastennes, Schwefel im Ton-Assori, Sardo
Samtblende-Přibram, Saphirquarz-Südafrika, Lepidolit-Rožna,
superior, Cerussit-Littai, Kalzit- (Rhomboëder) v. Kapnik, Kalzi
Andreasberg, Fluorit- (4 Spaltungsstücke) Cumberland, Dolor
Freiberg.

Geschenke. Göbbel Karl (V. Kl.), 8 Eisentöpfe, Schlee
(VI. Kl.), 34 Schachteln für Reagentien; Prof. Dr. Jakob Wei
Quarzkristall von Weitra.

Verwalter: Prof. Franz Neu

6. Lehrmittel für Freihandzeichnen.

1. Regelkopf (Kühne), Paris (Canova), Helena (Canova), Hermes Zeus (Otrikoli), Clytia (römisch), „Der Sommer“ (Kopf), Maler Grillparzer (König), Italiener (Natter), Italienerin (Natter), männ- tiner, weibliche Florentinerin, weiblicher Kopf (Mazetti), lachender . da Settignano), alte Frau (Naturabguß), Männerkopf (Donatello). n. Kämpfer (Canova), anatomische Figur (Muskelstudie des Körpers), Pinzgauer Pferd (Naturstudie von Barwig), englisches (Naturstudie), Pferd mit Beschirrung, anatomische Figur (Muskel- Pferdes), Stier (Naturstudie von Barwig), griechischer Pferde-

iedenes. 1 Messinggefäß, 1 Kupfergefäß, 1 Schachspiel, 2 Tafeln, rift v. Lebeda. — Jiranek, Anleitung zum Studium der ıpositionen nach der Natur. — The Studio 1910.

Verwalter: Prof. Hugo Soyka.

äte für den Turnunterricht und die Jugendspiele.

. 1 Schleuderball, 2 Schlaghölzer.

ınke. 1 Turm zum Turmballspiel (Herr R Felmayer), je 1 Voll- . Arnstein und Herr Th. Burger), 1 Spiegel (Herr J. Heiss). ıuhe spendeten: Negedly (Ia), Hillebrand (Ib), Hil- a), Kainz (IIa), Areli (IIb), R. v. Perko (IIb), Wachs- 2 Paar), Braun (IIIb), Hedding (IIIb, 2 Paar), Hof- o), Landesberger (IIIb), Ostersetzer (IIIb), Pollak :r (IVa), Pick (IVa), Stowasser (IVa), Heller (IVb), nn (IVb), Spieß (V).

Verwalter: Edg. Ebershardt.

8. Lehrmittel für den Gesangsunterricht.

autogr. Abzüge von: Prinz Eugen; Das einsame Röslein von kgebet von Ed. Kremser für gemischten Chor; 1 Partitur und u „Weihnachtslied“; 50 gedruckte Stimmen und 1 Partitur zu Herz Jesu-Lied von Hegnauer.

Verwalter: Rud. Hanke.

III. Bibliothek.

a) Lehrerbibliothek.

I. Zeitschriften.

: Zeitschrift für französische Sprache und Literatur, Bd. XXXIV. für das Realschulwesen, Bd. XXXV. — Zeitschrift für lateinlose en, Bd. XXI. Zeitschrift für österreichische Gymnasien, Bd. chrift für Schulgeographie, Bd. XXXI. — Die neueren Sprachen, Revue de l'Enseignement des Langues vivantes, Bd. 27. — Zeit- n physikalischen und chemischen Unterricht, Bd. XXIII. — Jahr- lioaktivität und Elektrotechnik, Bd. VI. — Oesterreichische Rund- XX - XXIII. — Oesterreichische botanische Zeitschrift, Bd. LX. — schaft für alle, Bd. II. — Zeitschrift des allgemeinen deutschen s. Bd. XXV. — Wiener Urania, Bd. III. — Germanisch-romanische Bd. II. — Chemiker-Zeitung, Bd. XXXIV. — Deutsche Erde, itteilungen der k. k. geographischen Gesellschaft, Bd. LIII. — Echo, Bd. XII. — Das literarische Echo, Bd. XII. — L'Echo

Littéraire, Bd. XXIX. — Physikalische Zeitschrift, Bd. XI. — Z
Instrumentenkunde, Bd. XXX. — Zeitschrift für Mathematik
Bd. LVIII. — Die neue Rundschau, Jhg. 1910. — Modern Lan
Bd. XXV. —

Geschenke: Vom k. k. n.-ö. Landesschulrate: Vierteljah
körperliche Erziehung, Bd. V.

2. Werke.

Ankauf: Wolfsgruber, Kirchengeschichte Oesterreich-Unga
der Weltapostel Paulus. — Groebel, Sexualpädagogik in den Oberkl
Lehranstalten. — Jerusalem, Einleitung in die Philosophie. —
Langue française d'aujourd'hui. — Weber, Die epische Dicht
Prinzipien der Sprachgeschichte. - Morris, Organic History of E
I. — Bally, Traité de Stilistique française. I. u. II. — Kellner,
Literatur im Zeitalter der Königin Viktoria. — Stier, Causeries
Schönbach, Walter von der Vogelweide. — Petit Larousse illustr
Sämtliche Werke. — Bauernfeld, Ausgewählte Werke. — Halm,
Werke. — Seidl, Ausgewählte Werke. — Ludwig, Werke. — Ston
Werke — Sudermann: Die Ehre, Die Schmetterlingsschlacht, Is
Winkel, Johannisfeuer, Es lebe das Leben, Der Sturmgeselle Sir
Sorge, Der Katzensteg, Heimat, Morituri. — Keller, Gesammel
Anzengruber, Gesammelte Werke. — Wildenbruch: Die Tochter e
Meister Balzer, Tiefe Wasser, Der Junge von Hennersdorf, In
Das heilige Lachen, Eifernde Liebe, Die Haubenlerche. - Ha
sammelte Werke. — Liliencron, Ausgewählte Gedichte. — G
französische Arbeiten. — Gutzkow, Meisterdramen. — Stappers D
synoptique d'étymologie française. — Ehrhard-Necker, Franz Cl
The Statesman's Year-Book 1909. — Burckhardt, Der Cicero.
Deutsche Geschichte. — Friedjung, Der Kampf um die Vorherrscha
land. — Friedjung, Oesterreich von 1848—1860. — Fischer, Mittele
Philippson, Das Mittelmeergebiet. — Pöhlmann, Grundriß derg
Geschichte. Abel, Bau und Geschichte der Erde — Berensc
tinischen Maler der Renaissance. — Tannery, Elemente der Mth
Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. - E
mente der reinen Mechanik. -- Dziobek, Lehrbuch der analytisch
— Killing-Hovestadt, Handbuch des mathematischen Unterrichtes I.
Vorlesungen über Algebra. — Classen, Zwölf Vorlesungen über te
Lichtes. Müller, Technik des physikalischen Unterrichts. - K
Lehrbuch der praktischen Physik. — Wiedemann-Ebert, Physikis
tikum. Frick, Physikalische Technik. — Januschke, Das Prinzip der
Energie. — Sueß, Das Antlitz der Erde. — Sueß, Bau und Bild Ost
— Doelter, Petrogenesis. — Ostwald, Grundriß der allgemein
Arnold, Repetitorium der Chemie. — Kraft, Analytisches Diato
Rosenbusch-Wülfing, Mikroskopische Physiographie der Mineral
steine. — Arnold, Anleitung zur qualitativen Analyse anorganch
ganischer Stoffe. — Kramsall, Gesetze und Bestimmungen übe
Dienstverhältnisse und Ruhegenüsse der österreichischen Staatsge
Jahrbuch des höheren Unterrichtswesens 1910.

Geschenke: Cohn, Weltausstellung in St. Louis 1904 (k. M
für Kultus und Unterricht). — Jubiläums-Jahres-Bericht der Bib
in Hořic, 1884—1909. (Die Anstalt.)

Verwalter: Prof. Ph. (a s

b) Schülerbibliothek.

Ankauf: Auerbach, Barfüßele. Adams, The Cher-st
first of June. — Alexis, Der falsche Woldemar. — Anzengru
Kreuzelschreiber. — Heimkehr und andere Geschichten. — Bara
algebra Vol. I. — Baumbach, Zlatorog. — Beitzke, Die Völk
bei Leipzig. — Benjamin, Das neue Buch von Onkel Benjamin —
Éléments d'algèbre. Cours abrégé d'arithmètique. Éléments de géo

Wunder aus dem Pflanzenreiche. Leben und Weben in Wald und uno, La tour de la France. — Chambers, History of the . — Chassagny, Prècis de Physique. Premièrs éléments de Contes modernes. — Daudet, Le Petit Chose. Aus-ählungen. — Eberle, Amusements dans l'étude du Français. — Napoleon Bonaparte. — Enzberg, Nansens Erfolge. — Enzens-ie sollen unsere Mittelschüler die Alpen bereisen? — Erck-atrian, Histoire d'un conscrit de 1813. — Faraday, Natur-ner Kerze. — Falch, Parzival. — Fontane, Balladen. — Fraun-h Habsburg. — Freytag, Die Journalisten. — Die verlorene Hand-e Ahnen. — Soll und Haben — Girardin, La joie fait peur. , Briefwechsel mit einem Kinde. — Göring, Lessings Leben. — :, Das Kloster bei Sendomir. — Der arme Spielmann. — A. Grün, au. — Güthling, Vergils Äneide. — Hauff, Lichtenstein. — en, Meistererzählungen fremder Dichter (nordische Dichter) — r Kamenzind. — Höcker, Denksteine (Lessing, Goethe, Schiller.) schwarzen Erdteil. — La Jeunesse illustrée 1909. — olumbus. — Der Jugendfreund 1909. — G. Keller, Die en Kammacher. — Pankraz der Schmoller. — Keller, Die hichte unserer Haustiere. — Kellner, Die Zeit der Verfolgungen. , Die Femgerichte. — Klapperich, Picturesque and industrial Klaußmann, Schlagende Wetter. — Vesuvius, der Feuerberg. n Port-Artur. — Abenteuer der Luft. — Klee, Sagen der grie-zeit. — Das Buch der Abenteuer. — Kleinschmidt, Die Be-aniens vom Römerjoche. — Kleist, Michael Kohlhaas. — Panzerautomobil. — Köhler, Amusing studies in English. — , Naturstudien in Wald und Feld. Naturstudien im Garten. — im Hause. — Krüger, Germanische Götterkunde. — Lavisse, France. — Lecture pour Tous (Onzième année). — Lie, — Sven Beidemwind. — Lindenberg, Fritz Vogelsang. — Die Schmarotzer. — Margueritte, Le désastre. — Une famille en 1870. Mauch, Schilleranekdoten. — Meier, Das Kloster — Mérimée, Colomba. — Mielke, Das deutsche Dorf. Contes de Fées. — Niese, Was Michel Schneidewind als Junge Niox, Histoire de la guerre Franco-Allemande (1870—71). — Le monde où l'on s'ennuie. — Pannwitz, Marschall Vorwärts gen. — J. Paul, Dr. Katzenbergers Badereise. — Le Pêle-Mêle. petit français illustré. — Le petit illustré amusant. rre-Loti, Pêcheur d'Islande. — Raimund's Werke. — Redlich, Babenberger. — Rohrer, Wider Gott und Reich. — Rode, iftöter. — Roquette, Waldmeisters Brautfahrt. — Rosegger, Waldschulmeisters. — Lustige Geschichten. — Von Kickel. — aus dem Alpenland. — Als ich noch der Waldbauernbub war. — ide. — Waldheimat. — Sandeau, Mademoiselle de la Seiglière. p, Persische Heldensagen. — Scheffel, Der Trompeter von Ekkehard. — Schönbach, Walter von der Vogelweide. — Lady of the Lake. — H. Seidel, Reinhard Flemmings Aben-sser und zu Land. — Simrock, Das kleine Heldenbuch. — Bosnien und Herzegowina. — Maria Theresia — Spemann, eltpanorama. — Die Eroberung des Erdballs. — Storm, Zwei yllen. — Steinberger, Kaiser Otto I. der Große. — Stökl, an Straaden, Der Depeschenreiter. — Streit, Die Portu-adfinder nach Ost-Indien. — Streicher, Schillers Flucht von Das neue Universum. Bd. 30. — Viehmayer, Die Wägner, Hellas, das Land und Volk der alten Griechen. — Ben Hur. Wilhelm, Kyros, der Weltbeherrscher. — Willi-Held vom Schildhof. — Wolzogen, Schillers Leben. — Young, — Zimmermann, Die Photographie.

nke: Les Annales politiques et littéraires 1909. in.) — Brentano, Kaiser Franz Josef 1848—1909 (k. k. Mini-u. U.) — Das Buch für Alle. (Schulrat Dir. Pejscha.) —

Choix de nouvelles modernes. (Prof. Gasparin.) — Scri
d'eau. (Prof. Dr. Grohmann.) — Combe, Chez nous. (Schulrat
— Corneille. Le Cid. (Prof. Gasparin) — Feuillet, Le Roman
pauvre. — Fleury, Histoire de la découverte de l'Amèrique. -
Egmont. — Torquato Tasso. (Schulrat Dir. Pejscha.) — Faust. I
Leiden des jungen Werthers. — Grillparzer, Die Ahnfrau.
Schutt. — Halm, Der Sohn der Wildnis. (Prof. Dr. Grohman
merle, Geschichte der Päpste. (Prof. Engel.) — Hebel, Scha
rheinischen Hausfreundes. (Hörner Ia.) — Kienzl, Richard W
Dr. Schloegl.) — Kleist's Werke. (v. Nagy IVa.) — Lessing
Weise. — Lenau, Gedichte. (Auswahl) — Loewicke, Rä
O. Ludwig, Zwischen Himmel und Erde. — Maistre, La jeu
(Prof. Dr. Grohmann.) — März, Christoph Columbus und die E
neuen Welt. (Hedding IIIb.) — Mayer, Oesterreichische Dichter
hunderts. — Mayr, Literaturbüchlein. (Prof. Dr. Grohmann.) —
Les femmes savantes. (Prof. Gasparin.) — Norden, Robinson. (T
— Parisselle, Sieben Erzählungen. — Penner, Fairy Tales b
Grimm. — Pierre-Loti, Impressions de voyage. (Schulrat Di
Pick, Die elementaren Grundlagen der astronomischen Geogr
cueil de contes et récits pour la jeunesse. (Prof. Dr. G
Sandeau, Mademoiselle de la Seiglière. (Schulrat Dir. Pejscha
Le Général Dourakine. (Prof. Dr. Grohmann.) — Sacher-M
Hajdamak (Thomastik IVa). — Scribe, Le verre d'eau. — Schil
frau von Orleans. (Prof. Dr. Grohmann.) — Gedichte. (Direktic
und Liebe. — Die Braut von Messina. — Fiesko. (Schulrat Di
Gedichte. (K. k. Schulbücher-Verlag.) — Seewell, Schwarzf
Dr. Grohmann). — Shakespeare, Hamlet. — Julius Caesar.
mann von Venedig. (Schulrat Dir. Pejscha.) — Thiers, Campa
1800. (Prof. Gasparin.) — Uhland, Ludwig der Bayer. — Gedi
Luise. — Yonge, The pillars of the house. (Prof. Dr. Grohm
Zeppelinbuch für die deutsche Jugend. (Huber IV.)

Verwalter: Prof. Dr. H. G

IV. Unterstützungswesen.

A. Stipendien.

Morawetz Josef, VI. Kl., verblieb im Genusse einer Jo
nitz'schen Familienstiftung von 360 K.

Kärpel Ernst, V. Kl., war im Genusse einer Wilhelm B
Stiftung im Betrage von 900 K.

Brasser Josef, V. Kl., erhielt eine Ettel Goldschmidt'sche Stif

Krames Josef, II. B-Kl., und Frey Theodor, I. B-Kl., e
stipendien zu je 200 K aus den Gefällsstrafgelderüberschüssen.

B. Schülerlade.

Barvermögen der Schülerlade vom Schuljahre 1908/9 . .	19
Interessen	
Spende der Frau Albert Vogl, née Weißenfeld de Weisach	
Spende der Frau Marie Stern und der Frau Vilma von Hitzinger à 50 K	1
Von einem Bücherkauf der IV. A.	
Ueberschuß von der Kranzspende für Herrn Prof. Derganc	
Kleinere Spenden von Schülern der Anstalt	

Uebertr

m Erlasse des k. k. n.-ö. Landesschulrates vom 16. Jänner 1905, ter den Schülern genehmigte Sammlung hatte folgendes Ergebnis:

	K	K
I. Klasse A.	Uebertrag	2145·92
. . . . .	10·—	
. . . . .	7·—	
Frank, Horak, Ruland-Klein, Weiß, Ziskovsky		
K	30·—	
ı, Gelles, Kladiva, Krzywon, Pazdernik, Springer		
K	14·—	
ı, Březina, Frey, Friedrich, Görlich, Herzl,		
, Kohout, Nedvidek, Toth je 1 K	11·—	
pitz je 60 h	1·20	73·20
I. Klasse B.		
. . . . .	5·—	
. . . . .	3·	
. . . . .	2·50	
Klein, Löwy, Ludwig, Maykut, Platzer, Rosen-		
Schellner je 2 K	16·—	
. . . . .	1·50	
. . . . .	1·20	
rasny, Marschal, Mayer, Pulgram, Reininger,		
je 1 K	7·—	
vsky, Reckendorfer, Schönweitz je 60 h . .	2·40	
ller, Gebauer, Glauber, Machata, Singer, Streit		
h	3·50	42·10
II. Klasse A.		
. . . . .	10·—	
er je 5 K	10·—	
. . . . .	3·—	
Felsenburg, Proschek, Spurny, Springer, Strojil,		
Zwillinger je 2 K	16·—	
s. Figdor, Hermann, Hilberger, Hoffenreich,		
Kurzmann, Paskusz, Schischa, Stiaßny je 1 K	11·—	50·—
II. Klasse B.		
lak, Rink je 5 K	15·—	
. . . . .	4·—	
. . . . .	3·—	
Götzl, Langsam, Mandl je 1 K	5·—	27·—
III. Klasse A.		
. . . . .	5·—	
sch, Kölch, Wanka, Wollisch je 2 K	10·—	
h, Figdor, Freiberger, Friedländer, Jetilek, Jokl,		
Kollmer, Kurzmann, Parnaß, Polegeg, Pšenička,		
Sandig, Völker, Wachsmann, Weiß, Wieland,		
rbaldinger je 1 K	20·—	35·—
	Uebertrag	2373·22

K

III. Klasse B. Uebertrag

Landesberger, Raetz je 20 K 40
Großmann, Hedding, Hofbauer je 5 K 15
Friederici, Siegert je 3 K 6
Griess, Novy, Ostersetzer, Paul, Pick, Pollak, Schild, Stenitzka, Weiß, je 2 K 18
Neumann 1
Braun, Fröhlich, Gröger, Handovsky, Plihal, Schiff, Schönmann, Štefan, Spitz, Strodl, Tritsch, Wondraček, Großberg, Ribař je 1 K 14
Becke . . . . . —

IV. Klasse A.

Rys 20
Lorenz 5
v. Nagy, Pálfy je 3 K 6
Ausschnitt, Ecker, Ehrmann, Gogoditsch, Huber, Kohn Max, Melaun, Pick, Scheu, Schleifer je 2 K . . 20
Comploier, Gutschera, Keiß, Klinger, Kohn Karl, Leitkep, Spitzer Hans, Spitzer Heinrich, Stowasser, Thomastik, Weißenberger, Zach je 1 K 12
Huschka . . . . . —
Kellner . . . . . —

IV. Klasse B.

Henzel, Weinzinger je 5 K 10
Lenobel, Löblich je 3 K 6
Becher, Heller, Houdal, Müller, Nadler, Romstorfer, Spitzer, Welzel je 2 K 10
Anhalzer, Bürgmann, Hasibar, Kärpel, Lam, Mährischl, Máša, Postranecky, Vaculny je 1 K 9
Schön . . . . . —

V. Klasse.

Schmidt 10
Rauscher, Richer je 5 K 1
Kubai . . . . . —
Fonovits, Herrmann, Polak je 3 K . . . . . —
Göbbel, Kaufmann, Knöpfelmacher, Kohl, Moser, Nadel, Schwarz, Steskal, Thürriegl Weinberger je 2 K . 2
Behal, Binder, Brasser, Duda, Eder, Feil, Flekles, Frank Ernst, Hantschl, Kärpel, Kornfeld, Krasny, Kunzenbach, Mayer Otto, Schiller, Skamperl, Stiaßny, Storch-Hager, Wieland je 1 K 1

VI. Klasse.

Kropf, Spitzer je 10 K 2
Steiner Leo . . . . . —
Bellak, Eislitzer, Fürth je 3 K . . . . . —
Goldschmid, Gottlieb, Greulberger, Haberlick, Pichler Schlegel, Weinreb je 2 K . . . . . —
Bader, Brand, Cafourek, Friedau, Hantschl, Heichler, Jalkotzy, Janauschek, Kainz, Kratochwil, Landau, Mauthner, Mayer, Morawetz, Neubauer, Pollak, Pritzl, Steiner Hugo, Thieberg, Tostmann, Trantina je 1 K . . . . . —

Summe der Schülersammlung . . . . . —
Gesamt-Einnahmen . . .

Ausgaben:

rienhort der Bezirksgruppe Alsergrund	50 —
nkauf von Büchern bei Hölder (10%)	267·72
„ „ „ „ Reichmann	34·—
„ „ „ „ Heger	46 67
„ „ „ „ Plaschka	11·16
„ „ „ „ Kirsch	90.—
turen an Lehrbüchern	37·20
iglienkissen	1·60
e Pastellfarben für bedürftige Schüler	9·40
Schüler je 25 K zur Zahlung des Schulgeldes	50—
stützung armer Schüler bei Schülerausflügen	4 40
ttelbeitrag zu den naturhistorischen Schülerübungen für Schüler	15·—
ttelbeitrag zu den chem. Uebungen für vier Schüler	24·—
Zustellungsgebühren, Trinkgeldern	2·40
	643·55

Ergebnis:

n vom Schuljahr 1908/9	1960·63
1909/10	754·39
Summe	2715·02
n Schuljahre 1909/10	643·55
Rest an Barvermögen	2071·47
in der k. k. Postsparkassa	24·—
„ „ Währinger Sparkassa	2047·47

esem Schuljahre wurden auf Kosten der Schülerlade 134 Schülern zur Verfügung gestellt.

Bücherspenden:

Schulbücherverlag	50 Bände
a Alfred Hölder	30 „
A. Pichlers Witwe & Sohn	36 „
F. Tempsky	22 „
F. Deuticke	12 „

C. Gerold's Sohn: 4 Exemplare Wretschko-Heimerl, Vorschule . Ed. Hölzl: 3 Exemplare Kozenn, Geogr. Atlas. Ig. v. Kleinmayr Bamberg in Laibach je 2 Bände Zeehe-Rebhann, Geschichte für ulen I—III.

nterzeichnete Verwaltung entbietet hiemit allen P. T. Gönnern der den innigsten Dank für das derselben bewiesene Wohlwollen. urde ja so vielen Schülern das Studium ermöglicht, resp. erleichtert. in Zukunft edle Herzen unseres so humanitären Werkes gedenken!

arl Holy. F. Pejscha, F. Engel,
chmidt, Direktor. Verwalter.
ngsprüfer.

V. Chronik der Anstalt.

a) Veränderungen im Lehrkörper.

Nach längerer Krankheit wurde Professor **Anton Derg** seinem 66. Lebensjahre der Anstalt am 7. Dezember 1909 den Tod entrissen. Er wirkte seit dem Bestande der Anstalt reich an derselben. Der Lehrkörper verlor in ihm einen Kollegen, die Schüler einen warmfühlenden, für sein Fach beget Lehrer. Der Lehrkörper und die Schüler ehrten das Anden Verstorbenen durch Niederlegung von Kränzen am Sarge und ihm das letzte Geleite.

Ehre seinem Andenken!

Aus dem Lehrkörper schieden ferner: Dr. Johann Greg eine wirkliche Lehrstelle an der Staatsrealschule in Görz verlie Dr. Jakob Weiß, der eine Supplentenstelle am Erzherzog Rn Gymnasium in Wien, und Dr. techn. Albert Weißenstei, Supplentenstelle an der Staatsrealschule im XV. Wiener Gemn erhielt. Der Stenographielehrer Artur Ritter von Unkren k. k. Staatsanwalt-Stellvertreter, verzichtete infolge seiner Amtsg seine Stelle. Von den beiden Probekandidaten Dr. Alexande F und Dr. Heinrich Jelinek erhielt ersterer eine Supplents Deutschen Staats-Gymnasium in Teschen, letzterer eine provisorisc an der Deutschen Staatsrealschule in Pilsen.

In den Lehrkörper traten ein: Holy Karl, wirklicher L Staatsrealschule in Plan (Min.-Erl. v. 22. Juni 1909, Z 11.271); D Robert, prov. Lehrer am Deutschen Staats-Gymnasium in Prr (Min.-Erl. v. 22. Juni 1909, Z. 13.800). Glass Max, Dr. der wirklicher Lehrer an der Deutschen Staatsrealschule in Budweis Min.-Erl. v. 27. Juli 1909, Z. 24.194, der Anstalt zur Dienstleistung

Ferner die Supplenten: Binder Franz (L. Sch. R. v. 1 Z. 3785) übernahm die Lehrverpflichtung des verstorbenen Profs Derganc; Krasser Robert (L. Sch. R. v. 28. Sept. 1909, Z. 31 Karl (L. Sch. R. v. 25. Jänner 1910, Z. 276—I) übernahm im Lehrverpflichtung des Prof. Dr. Erwin Hanslik; Dr. Matzke Joe R. v. 28. Sept. 1909, Z. 3124—I; Ebershardt Edgar, Supple (L. Sch. R. v. 17. Sept. 1909, Z. 3162—I).

b) Beurlaubungen.

Professor Josef Schmidt wurde mit Min.-Erl. v. 2 Z. 24.719, zur Abfassung eines Lehrbuches für das ganze Schu und Prof. Dr. Erwin Hanslik mit Min.-Erl. v. 24. Juni 19 zum Zwecke einer Studienreise nach Italien und Griechenland fü mester 1909/10 beurlaubt.

c) Beförderungen.

Die wirklichen Lehrer Dr. Hugo Grohmann (L. S 4. Okt. 1909, Z. 3154—I), Holy Karl (L. Sch. R.-Erl. v. 23. Z. 3584/1—I), Dr. Robert Schloegl (L. Sch. R.-Erl. v. 3 Z. 3866—I), Dr. Josef Zuck (L. Sch. R.-Erl. v. 1. Okt. 1909, wurden im Lehramte definitiv bestätigt und ihnen der Titel Professors zuerkannt.

ınalstand des Lehrkörpers und Lehrfächerverteilung.

1. Direktor.

ınz, VI. Rangsklasse, Ritter des Franz Joseph-Ordens, k. k. Schul- ehrte Französ sch in III B (4 St.).

2. Professoren.

ton, VII. Rangsklasse, Verwalter der naturhistorischen Sammlungen, e Naturgeschichte in I A, I B, II A, II B, V, VI (12 St.) bis 1. Okt. 1909.
:, kath. Religionslehrer, IX. Rangsklasse, Verwalter des photogr. ers und der Schülerlade, lehrte kath. Religion in allen Klassen und Exhortator (22 St.).
ıilipp, Professor, IX Rangsklasse, Verwalter der Lehrerbibliothek Klassenvorstand in V, lehrte Deutsch in V, Französisch in III A, V, VI (17 St.).
Dr. der Univ. Bern, wirkl. Lehrer, IX. Rangsklasse, Klassenvorstand A, lehrte Deutsch in I B, III A, III B, Französisch in IV B (16 St.).
lugo, Phil. Dr., Professor, IX. Rangsklasse, Verwalter der Schüler- ıthek und Klassenvorstand in VI, lehrte Deutsch in IV A, VI, :ösisch in I B, Englisch in VI (16 St.).
ʻin, Phil. Dr., Professor, IX. Rangsklasse, lehrte im I. Semester raphie und Geschichte in II B, III A, IV A, IV B, V (20 St.).
Professor, IX. Rangsklasse, Klassenvorstand in III B, lehrte Mathe- und Geometrie in II B, III A, III B; Geometrie in IV A (18 St.).
Franz, Professor, IX. Rangsklasse, Verwalter des chemischen Ka- tes und der Mineraliensammlung, Klassenvorstand in I A, lehrte ematik in I A, Chemie in IV A, IV B, V, VI und war Leiter der ischen Schülerübungen (18 St.).
bert, Phil. Dr., Professor, IX. Rangsklasse, Verwalter der historisch- aphischen Sammlungen und Klassenvorstand in I B, lehrte Geo- ie und Geschichte in I A, I B, II A, III B und Geschichte in VI (19 St.)
st, wirkl. Lehrer, IX. Rangsklasse, Verwalter der Lehrmittel für ıetrie und Klassenvorstand in IV A, lehrte Mathematik in IV A, V; darstellende Geometrie in V und VI (18 St.).
ef, Professor, VIII. Rangsklasse, war für das abgelaufene Schul- beurlaubt.
, Professor, VII. Rangsklasse, Verwalter der Lehrmittel für Frei- ;eichnen, lehrte Freihandzeichnen in I A, II A, III A, IV A, V und Schönschreiben in I A und I B (22 St.).
Phil. Dr., Professor, IX. Rangsklasse, Klassenvorstand in IV B, Deutsch in II A und IV B; französich in II A, Englisch in V (16 St.).

3. Supplenten.

z, Verwalter der naturhistorischen Sammlungen und im II. Semester der naturwissenschaftlichen Schülerübungen, lehrte Naturgeschichte . I B, II A, II B, V und VI (im 1. Sem. 12, im II. Sem. 20 St.).
Edgar, Verwalter des Turnsaales, lehrte Turnen in allen Klassen t.).
ann lehrte Freihandzeichnen in I B (4 St.).
lehrte Freihandzeichnen in II B, III B und IV B (11 St.).
z, Dr. techn., Verwalter der physikalischen Lehrmittelsammlung, Mathematik in VI, Physik in III A, III B, IV A, IV B und VI (18 St.).
ert, Klassenvorstand in II A, lehrte Mathematik in I B, II A; Geo- e in II A, IV B (11 St.).
lehrte im II. Semester Geographie und Geschichte in II B, III A, IV B und V (20 St.).
f, Phil. Dr., Klassenvorstand in II B, lehrte Deutsch und Französisch . und II B (19 St.).

4. Akatholische Religionslehrer.

oritz, Phil. Dr., lehrte israelitische Religion in I A, I B, II A u. B, u. B, IV A u. B, V, VI (14 St.).

Zwernemann Gustav, evang. Pfarrvikar, lehrte evangelische Relig
wöchentlichen Stunden.

5. Lehrer der nicht obligaten Lehrgegenstände.

Hanke Rudolf, lehrte Gesang in 3 Abteilungen und leitete den Kircheng
Gasparin Philipp, Professor, lehrte Stenographie in 2 Abteilungen (

6. Assistenten.

Bayer Emil assistierte beim Turnunterrichte (8 St.).
Eisterer Johann assistierte im Freihandzeichnen (19) und geom. Zeichn
Hartel Karl assistierte beim Freihandzeichnen (15 St.).
Krasser Robert assistierte beim geom. Zeichnen (10 St.).
Patry Josef assistierte beim Turnunterrichte (6 St.).
Witschel Emil assistierte beim Turnunterrichte (6 St.).

7. Probekandidat.

Tintner Otto, Phil. Dr., (im II. Sem.).

8. Dienerschaft.

Hofmann Arnold, definit. Schuldiener.
Reiß Josef, definit. Schuldiener.
Adamek Ernst, Aushilfsdiener.
Beck Franz, Aushilfsdiener.

* * *

16. September: Einschreibungen, Aufnahms- und Wiederholungsp
17. September: Das hl. Geistamt.
18. September: Erklärung der Schulvorschriften und Erledigung de
geschäfte.
20. September: Beginn des regelmäßigen Unterrichtes.
4. Oktober: Festgottesdienst aus Anlaß des Namensfestes Seiner
Majestät des Kaisers.
19. November: Seelenamt für weiland Ihre Majestät die Kaiser
13., 14. und 15. Jänner 1910: Inspektion des realistischen Unterr
den Herrn k. k. Landesschulinspektor Regierungsrat Hans
12. Februar: Schluß des I. Semesters.
16. Februar: Beginn des II. Semesters.
13. April: Inspektion des Freihandzeichenunterrichtes durch Herrn
Regierungsrat Josef Langl.
15. April: Inspektion des isr. Religionsunterrichtes durch Hen
Dr. Elieser Dawid.
26. April: Inspektion des kath. Religionsunterrichtes durch Hrn
Kanonikus Dr. Ferdinand Wimmer.
29. und 30. April: Inspektion des human. Unterrichtes durch Herrn
schulinspektor Dr. Karl Vrba.
18. Juni: Inspektion des realistischen Unterrichtes durch den Herrn
schulinspektor Regierungsrat Hans Januschke.
2. Juli: Gottesdienst und Zeugnisverteilung.

VI. Körperliche Ausbildung der Jugend.

Mit der Uebersiedlung der Anstalt aus der provisorischen
in das fertiggestellte neue Schulgebäude, IX., Glasergasse 25, b
Schüler in hygienischer Beziehung eine vorteilhafte Wendung
Sie bezogen nun helle, geräumige Klassenzimmer und Unter
durch ihre Ausstattung allen an ein Schulgebäude zu stellende
forderungen entsprechen. Getreu der seit dem Bestande der
führten Einrichtung wurde fast der gesamte Unterricht auf die
1 Uhr verlegt. Durch diese Einführung wurde den Schülern d
geboten, ihre häuslichen Aufgaben bei Tageslicht anzufertigen
Erholung im Freien mehr Zeit zu gewinnen. Zur Hintanhaltung
gesundheitsschädlicher Staubentwicklung wurden die Schüler

an den im Vorhause und vor den Stiegen befindlichen Kokos-
reinigen. Dreimal im Schuljahre wurden sämtliche Schulmöbel
reinigt und die Fußböden mit Stauböl eingelassen. Die Klassen-
den täglich ausgekehrt und sowohl vor als auch nach dem Unter-
während der Ruhepausen hinlänglich gelüftet.
end der günstigeren Witterung wurden die größeren Ruhepausen
äumigen Schulhofe zugebracht. Im Laufe des Schuljahres wurden
en Klassen mehrere Ausflüge in die Umgebung von Wien unter-
ußerdem wurden die naturwissenschaftlichen Schülerübungen in
se an Samstagen bei günstigem Wetter im Freien vorgenommen
sem Zwecke botanische Exkursionen unternommen. Außerdem
der Turnlehrer Edg. Ebershardt mit einzelnen Klassen 7 Uebungs-

Schlittschuhlaufen, für welches die Witterung im vergangenen
it besonders günstig war, wurde von den meisten Schülern der
ufsicht der Mittelschuldirektoren des I., II., III. und IX. Wiener
ehende Eislaufplatz im nahegelegenen Augarten benützt. Daselbst
er wurden im Frühjahr und Sommer Jugendspiele gepflegt.
chülern wurde ganz besonders auch das Schwimmen empfohlen,
e durch die Preisermäßigung im Dianabad begünstigt wurde.
einer Anzahl von würdigen, aber bedürftigen Schülern der Anstalt
fenthalt in den Hauptferien 1910 zu ermöglichen, wurde wie in
ren dank dem freundlichen Entgegenkommen der Direktion der
on der Bezirksgruppe „Alsergrund" des Vereines „Ferienhort für
Gymnasial- und Realschüler in Wien" die Oper „Der Freischütz"
— Die aus diesem Anlasse geleisteten Ueberzahlungen von 29 K,
A) 20 h, Hirsch (III A) 1 K, Frank (I A) 1 K 80 h, Frau Anna
50 h, Herr Jean Raetz 12 K 50 h, wurden der Bezirksgruppe
" zugeführt.
Direktion spricht an dieser Stelle allen hoch-
Gönnern, die zur Förderung des leiblichen
der studierenden Jugend der Anstalt auf irgend-
Weise beigetragen haben, den innigsten Dank aus.
stehende Tabelle gibt eine Uebersicht der Förderung der körper-
ildung der Schüler der Anstalt

	Schlittschuhläufer	Schwimmer	Radfahrer	Skiläufer	Rodler	Tennisspieler	Ruderer	Leben in den letzten Wochen d. Schuljahres auf dem Lande	Leben während der Hauptferien auf dem Lande	Beteiligten sich an Jugendspielen.	Vom Turnen waren befreit: Für d. ganze Schuljahr	Vom Turnen waren befreit: Für ein Semester	Vom Turnen an Geräten waren befreit
3	22	14	2		5	3	7	2	29	31	2	—	—
5	21	15	2	—	3	—	6	6	27	28	5	1	—
3	33	26	6		15	5	25	2	32	37	3	1	1
3	27	26	9	—	2	2	10	2	30	30	2	1	—
7	21	15	6	—	6	6	16	—	30	32	1	—	1
5	28	24	11	2	14	1	21	1	29	28	1	1	—
8	27	25	13	1	7	7	22	3	32	18	5	—	—
0	29	22	8	—	10	7	22	—	34	22	3	—	1
0	37	43	23	1	17	7	39	4	36	24	3	1	2
7	22	26	15	3	8	8	21	—	25	20	2	2	1
8	267	236	95	7	87	46	189	20	304	270	27	7	6
	67·1	59·2	23·8	1·7	21·8	11·5	47·4	5·0	76·3	67·8	6·7	1·7	1·5

VII. Zusammenwirken zwischen Schule und

Die Realschule ist nicht bloß eine Unterrichts-, sondern auc
ziehungsanstalt. Wenn das Erziehungswerk schon für das Elternhaus ein
äußerst wichtige, sondern auch recht schwere Aufgabe bedeutet, so ist
liche Einfluß der Anstalt auf die Schüler nur im Vereine der Eltern
Stellvertreter mit der Schule möglich. Da die häuslichen Einwirkun
Charakterbildung der Schüler in der Regel von entscheidendem Einf
so sind den Lehrern zum Zwecke individueller Behandlung Aufsch
die Eigenart der Schüler recht willkommen. Für die Eltern müsse
Aufklärungen der Schule über das Verhalten ihrer Söhne, das nicht
dem in der Familie wesentlich verschieden ist, wertvoll sein. Dah
gewissenhafte Eltern mit der Schule in regem Verkehr stehen, ur
Vorkommnisse in der Schule unterrichtet zu sein und in allen Fäll
notwendig ist, rechtzeitig auf ihre Kinder einwirken zu können
leichterung dieses erwünschten Verkehrs wurden für die einzelnen
Sprechstunden angesetzt und das Verzeichnis derselben im Vorhause
gebäudes angebracht. Da es jedoch nicht allen Eltern möglich w
festgesetzten Sprechstunden zu erscheinen, so gaben die Mitglieder
körpers nach Maßgabe ihrer verfügbaren Zeit auch außerhalb der Spr
bereitwilligst Auskünfte über die Schüler. — Die Daten für die Zensurl
wurden zu Beginn jedes Semesters den Schülern bekanntgegeben
Eltern das ungünstige Ergebnis der Zensur durch Schulnachrichten
Bei besonders wichtigen Vorkommnissen wurden die Eltern sofo
verständigt. Durch diese Vorkehrungen war es möglich, manche M
im Fortgange hintanzuhalten und manches Gebrechen im Betrager
zu ersticken.

**Auf Grund dieser knappen Ausführungen richtet die Direkt
Eltern oder deren Stellvertreter die dringende Aufforderung, im Inte
Kinder auch in Hinkunft in einem regen Verkehr mit de Schule zu e**

VIII. Statistik der Schüler.

	Klasse										Zusammen
	I A	I B	II A	II B	III A	III B	IV A	IV B	V	VI	
Zahl.											
/9	43	42	36	40	41 [1]	40	45	39	50	—	376 [1]
)9/10	46	45	43	42	37	37	42	41	54	38	425
uljahr. eingetreten	—	—	—	1	—	2	1		—	1	5
so aufgenommen	46	45	43	43	37	39	43	41	54	39	430
ufgenommen, u. zw.:											
ıahmsprüfung . .	44	41	—	3	2	—	2	—	2	1	95
n	—		—	1	2	5	1	4	—	2	15
. . . . .	—	—	—	1	—	—	1	1	—	4	7
ommen, u. zw.:											
n	—	—	40	34	31	30	36	35	45	32	283
. . . . .	2	4	3	4	2	4	3	1	7	—	30
uljahr. ausgetreten	3	9	—	4	1	2	2	1	4	2	28
Ende 1909/10	43	36	43	39	36	37	41	40	50	37	402
entliche Schüler	43	36	43	38	36	37	38	40	50	37	398
atisten	—	—	—	1	—	—	3	—	—	—	4
rt (Vaterland).											
. . . . .	26	30	32	28 [1]	26	27	29 [3]	29	42	29	298 [4]
h (außer Wien)	5	4		—	2	—	—	2	1	4	18
. . . . .	1	—	1	—	—	—	1	—	1	—	4
. . . . .	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1	2
. . . . .	—	—		—	—	—	—	1	1	—	2
. . . . .	1	—	1	2	2	4	3	2	1	1	17
. . . . .	1	—	1	1	—	2	1	1	2	1	10
. . . . .	—	—	1	1	1	—	—	2	—	1	6
. . . . .	5	—	1	1	3	2	—	—	—	—	12
. . . . .	—	—	—	1	—	—	—	1	—	—	2
. . . . .	3	—	2	2	1	2	2	1	1	—	14
. . . . .	—	—	1	1	—	—	1	—	—	—	3
. . . . .	—	—	—		1	—	—	—	—	—	1
. . . . .	—	—	—	1	—	—	1	—	—	—	2
. . . . .	1	2	—	—	—	—	—	—	1	—	4
. . . . .	—	—	1		—	—	—	—	—	—	1
. . . . .		—	—	—	—	—	—	1	—	—	1
. . . . .	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1
	43	36	43	38 [1]	36	37	38 [3]	40	50	37	398 [4]
rsprache.											
. . . . .	39	34	41	38 [1]	33	34	34	34	49	36	372 [4]
:h	—	1	—	—	—	2	3	3	1	1	11
. . . . .	2	—	—	—	—	—	—	1	—	—	3
. . . . .	1	1	1	—	2	1	—	1	—	—	7
. . . . .	1	—	—	—	1	—	—	—	—	—	2
. . . . .	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1
. . . . .	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1
. . . . .	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1
	43	36	43	38 [1]	36	37	38 [3]	40	50	37	398 [4]

	Klasse							
	IA	IB	IIA	IIB	IIIA	IIIB	IVA	IV
4. Religionsbekenntnis.								
Katholisch des latein. Ritus	21	17	18	16	18	19	22	25
„ „ griech. „	—	—	—	—	—	—	—	—
Evangelisch A. B.	3	3	—	2	—	4	1[1]	—
„ H. B.	—	1	—	—	—	—	2	—
Israelitisch	19	15	25	20[1]	18	14	13[3]	15
	43	36	43	38[1]	36	37	38[5]	40
5. Lebensalter.								
11 Jahre alt	6	6	—	—	—	—	—	—
12 „ „	27	23	1	6	—	—	—	—
13 „ „	5	7	30	20	4	5	—	—
14 „ „	5	—	11	9[1]	22	27	3	
15 „ „	—	—	1	2	10	4	19	1[1]
16 „ „	—	—	—	1	—	1	10[2]	1[1]
17 „ „	—	—	—	—	—	—	3[1]	
18 „ „	—	—	—	—	—	—	3	
19 „ „	—	—	—	—	—	—	—	—
20 „ „	—	—	—	—	—	—	—	—
21 „ „	—	—	—	—	—	—	—	—
	43	36	43	38[1]	36	37	38[5]	4
6. Wohnort.								
IX. Bezirk	37	28	39	36[1]	29	29	33[1]	2
I. „	1	2	1	—	1	—	0[1]	
II. „	—	—	—	—	2	1	—	
III. „	—	—	—	—	—	1	1[1]	—
VII. „	—	—	—	—	1	—	—	—
VIII. „	—	—	1	—	2	—	—	—
XIII. „	—	—	—	1	—	—	—	—
XIV. „	—	—	—	—	—	1	—	—
XVI. „	—	—	—	—	—	—	—	—
XVII. „	—	—	—	—	—	1	—	—
XVIII. „	3	2	—	—	—	—	—	
XIX. „	1	2	—	1	—	3	3	
XX. „	—	1	2	—	—	—	—	
Außerhalb Wiens	1	1	—	—	1	1	1	—
	43	36	43	38[1]	36	37	38[5]	4

	Klasse										Zusammen
	IA	IB	IIA	IB	IIIA	IIIB	IVA	IVB	V	VI	
sifikation.											
auljahres 1909/10:											
gnet, in die nächste steigen	4	3	3	7	3	7	7	1	1	8	44
e nächste Klasse	31	29	35	26[1]	31	25	25[2]	30	34	18	284[3]
in die nächste steigen	3	3	1	2	2	3	4[1]	7	12	7	44[1]
lerholungsprüfung	4	1	3	3	—	2	1	2	3	2	21
agsprüfung krank ugelassen . . .	1	—	1	—	—	—	1	—	—	2	5
	43	36	43	38[1]	36	37	38[3]	40	50	37	398[4]
Schuljahre 1908/9:											
prüfungen waren	1	3	4	5	4	1	1	6	6	—	31
aben	—	2	4	5	3	1	—	5	4	—	24
hen haben (oder nen sind) . . .	1	1	1	—	1	—	1	1	1	—	7
ngen waren be-	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1
aben	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
hen haben . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
en sind	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1
Ergebnis für 1908/9:											
gnet, in die nächste steigen	2	2	2	6	6	2	2	2	7	—	31
ie nächste Klasse	38	31	26	28	30[1]	34	36	34	29	—	286[1]
, in die nächste steigen	3	9	8	6	5	4	7	3	13	—	58
ben	—	—		—		—		—	1	—	1
	43	42	36	40	41[1]	40	45	39	50	—	376[1]

	Klasse										Zusammen
	IA	IB	IIA	IIB	IIIA	IIIB	IVA	IVB	V	VI	
8. Geldleistungen der Schüler.											
Das ganze Schulgeld zahlten: im I. Semester	25	32	22	18[1]	11	20	21	15	22	14	200[1]
„ II. „	21	20	22	20[1]	11	17	19[3]	22	31	18	201[4]
Zur Hälfte befreit: „ I. „	—	—	1	2	1	2	—	1	4	2	13
„ II. „	—	1	—	1	—	2	—	1	3	3	11
Ganz befreit: „ I. „	21	8	20	20	25	15	21	25	28	22	205
„ II. „	22	16	21	20	26	17	19	17	16	16	190
Das Schulgeld betrug: im I. Semester K	1250.—	1600.—	1125.	1000.—	575.—	1050.—	1050.—	775.—	1200.	750.	10.375.—
„ II. „ „	1050.—	1025.—	1100.—	1075.—	550.	900.—	1100.—	1125.—	1625.	975.—	10 525.—
Die Aufnahmstaxen à K 4 20 . . . . . „	184.80	172.20	—	21.—	16.80	21.—	16 80	21.—	8 40	29.40	491 40
Lehrmittelbeiträge à 4 K	184.—	180.	172.	168.—	148.—	156.	172.	164.—	216.—	156.	1716.—
Taxen für Zeugnisduplikate . . . . . „	4.—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4.—
Beiträge zur Deckung der Auslagen für die Jugendspiele à 80 h . . . . . K	36.80	36.—	34.40	33.60	29.60	31 20	34.40	32·80	43.20	31 20	343 20
9. Besuch des Turnunterrichts.											
Am Turnunterrichte nahmen teil	41	31	40	36	35	36	33	37	47	35	371.—
Befreit waren	2	5	3	2	1	1	5	3	3	2	27
10. Besuch der nicht obligaten Unterrichtsgegenstände.											
Den Stenographieunterr. besuchten: I. Abt.	—	—	—	—	—	—	18	12	—	—	30
II. „	—	—	—	—	—	—	—	—	17	1	18
Den Gesangsunterricht besuchten: I. „	16	17	—	—	—	—	—	—	—	—	33
II. „	—	—	17	9	10	10	—	—	—	—	46
III. „	—	—	—	—	—	—	—	—	13	16	29
Die chemisch. Schülerübung. besucht.: I. „	—	—	—	—	—	—	—	—	16	—	16
II. „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	13	13
I. Abt.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

IX. Wichtige Erlässe.

rial-Erlaß vom 8. April 1909, Z. 14.741, gibt unter Bezugnahme
n Normallehrplan für Realschulen Richtlinien für die Uebergangs-

ial-Erlässe vom 23. Februar 1909, Z. 13.568 ex 1908 und vom
Z. 14.888, geben Normen für die Ferienurlaube der Mittelschul-

ial-Verordnung vom 22. Juni 1909, Z. 18.774, betrifft die Auf-
Schulgeldmarken und die Entrichtung des Schulgeldes an den
ttelschulen im Wege der k. k. Postsparkasse.
rial-Erlaß vom 30. November 1909, Z. 42.165, gestattet, daß die
vissenschaftlichen Schülerübungen erforderlichen Stunden in das
ler betreffenden Leiter dieser Kurse eingerechnet werden.
ial-Erlaß vom 2. Dezember 1909, Z. 43.912, gibt Weisungen für
g der Semestral- und Jahreszeugnisse.
rial-Erlaß vom 18. April 1910, Z. 16.500, verfügt, daß das Schul-
an allen jenen Mittelschulen, an welchen dasselbe normalmäßig
Juli 1910 zu enden hätte, ausnahmsweise schon am 2. Juli 1910,
ne Einschränkung der Pfingstfeiertage, zu schließen ist und das
0/11 ausnahmsweise bereits am 9. September 1910 zu beginnen
wird verfügt, daß im Schuljahre 1910/11 an den Mittelschulen
ter schon am 31. Jänner 1911 zu enden und das II. Semester
Februar 1911 zu beginnen hat.
rial-Erlaß vom 8. Mai 1910, Z. 19.847, betreffend die körperliche
den Mittelschulen, ordnet unter anderem an, für körperliche
ei Nachmittage in der Woche von Unterricht und Aufgaben frei
bei allenfalls je nach den Verhältnissen der Anstalt auch für die
ssen verschiedene Tage in Betracht kommen können.

X. Verzeichnis

r Schüler am Schlusse des Schuljahres 1909/10.

zeichneten Schüler sind vorzüglich geeignet, in die höhere Klasse aufzusteigen.)

I. Klasse A, 43 Schüler.

Gelles Viktor	Negedly Werner
Glas Eugen	Oppitz Ernst
*Görlich Johann	*Pazdernik Karl
Herzl Max	Ruland-Klein Bernhard
Horak Leopold	Schier Josef
Hörner Viktor	Slanař Heinrich
Huber Rudolf	Spielmann Bruno
Kladiva Josef	Spitzer Leopold
Kohout Viktor	Springer Oskar
Krzywon Ernst	Toth Hugo
Kučera Januarius	Wagner Walter
Leskovar Anton	Weiß Friedrich
Mischel Salomon	Žižkovsky Eduard.
Navratil Karl	
*Nedvidek Ludwig	

I. Klasse B, 36 Schüler.

Foller Viktor	Fuchs Friedrich
Frey Theodor	Gebauer Rudolf

*Giebner Armin
Glauber Karl
Hampel Richard
Haunzwickl Alois
Herrnfeld Friedrich
Hillebrand Hans
Hofmann Robert
Jägersberger Jakob
Klein Felix
Krasny Rudolf
Löwi Richard
Ludwig Franz
Machata Josef
Marschal Eduard
Mayer Hans
*Maykut Norbert
Morgenstern Hugo
Platzer Franz
Pulgram Armin
Rakovsky Friedrich
Reckendorfer
Reininger Ot
Rosenberg W
Schellner Fri
*Schöchl Ru
Schönweitz
Singer Fried
Streit Adolf
Ulm Gustav
Weiß Theod

II. Klasse A, 43 Schüler.

*Asiel Remus
Benesch Robert
Benjamin Viktor
Denk Franz
Engel Hugo
Farkas Georg
Figdor Erwin
Finder Michael
Goldschmidt Paul
Gyri Max
Hermann Robert
Hilberger Friedrich
Hoffenreich Paul
König Eduard
*Kainz Richard
Kraus Robert
Kurzmann Friedrich
Langer Friedrich
Malirsky Anton
Mendl-Felsenburg Otto
Mund Paul
*Paskusz Salomon
Proschek Robert
Rosset Walter
Schatz Herbert
Schiller Bruno
Schiller Julius
Schindler Friedrich
Schischa Friedrich
Sonnek Othmar
Spurny Karl
Springer Rob
Steiner Wilhe
Steinfeld Eg
Stiassny Ern
Strojil Karl
Uher Albert
Wachs Samu
Waldmann Fr
Weicht Fran
Zett Josef
Zilsel Paul
Zwillinger O

II. Klasse B, 38[1] Schüler.

Areli Heinrich
*Bender Ernst
Binder Artur
Denzel Alois
Duschnitz Alexander
Felmayer Rudolf
Fillinger Artur
Fraiß Karl
Gefäll Josef
Golant Albert
Goldscheider Georg
Gottlieb Friedrich
Götzl Richard
*Guth Bruno
Haas Robert
Herlitschka Friedrich
Jelinek Karl
*Kalinka Othmar
*Krames Josef
*Landau Louis
Langsam Moritz
Lienhart Johann
Löw Philipp
Mandl Emanuel
Mayer Josef
Morawitz Robert
Moritz Joha
Nowak Eric
Perko, R. v.
*Polak Fran
*Raiman St
Reininger Fr
Rink Otto
Schiller Joha
Soyka Rom
Számek Fri
Türk Eduar
Schulhof Vik
Krischke Jos

III. Klasse A, 36 Schüler.

Berman Viktor
*Borel Gustav
Deutsch Karl
Elger Karl
Figdor Karl
Freiberger Paul
Friedländer Ludwig
Hammer Georg
Hirsch Ernst
Jetilek Ferdinand
Jokl Paul
Kimmel Wilhelm
Kleedorfer Friedrich
Kölch Anton
König Karl
Kohn Leo
Kollmer Anton
Kurzmann Leo
*Melzer Gustav
Nidetzky Franz
Parnaß Siegfried
Psenička Friedrich
*Reich Anton
Rosenberg Oskar
Salz Johann
Sandig Edua
Schmetterlin
Spiegler Lud
Türk Josef
Völker Fran
Wachsmann
Wanka Joha
Weiß Friedr
Wieland Lud
Wollisch Eg
Wunderbald

III. Klasse B, 37 Schüler.

Landesberger Alfred
Landesmann Erwin
*Neumann Alexander
Nový Josef
Ostersetzer Gustav
Paul Karl
*Pick Rudolf
Plíhal Eduard
Pollak Felix
Raetz Heinrich
*Schiff Georg
Schild Alois
Schönmann Edmud
*Siegert Johann
Spitz Heinrich
*Štefan Eduard
*Stenitzka Heinrich
Strodl Ludwig
Tritsch-Schöpf Josef
Weiß Otto
Wondraček Josef
Großberg Isidor
Ribař Bruno
Kraus Alexander.

IV. Klasse A, 38[3] Schüler.

Keiß Erich
*Klinger Franz
Kohaut Hermann
*Kohn Karl
Kohn Max
Kubat Karl
*Leitkep Oskar
Lorenz Zdenko
Mathis Ernst
Melaun Martin
Mokre Josef
Nagy Karl, von
Pálfi Johann
*Pick Viktor
Rys Johann
Scheu Ernst
Schleifer Friedrich
*Spitzer Hans
Spitzer Heinrich
Stern Paul (Privatist)
Stowasser Johann
Thomastik Alfons
Vettermann Karl
Waldmann Emil
Weishut Felix (Privatist)
Weißenberger Emil
Zach Johann
Kellner Franz.

IV. Klasse B, 40 Schüler.

Heller Fritz
Henzel Adam
Höbinger Leopold
Höferer Richard
Houdal Johann
Kärpel Hans
Lam Siegfried
Lenobel Edmund
Löblich Richard
Mährischl Julius
Máša Gustav
Müller Hans
*Nadler Gustav
Postránecký Josef
Romstorfer Irmfried
Sakač Stephan, von
Schlegel Julius
Schön Hermann
Sojka Hubert
Spitzer Rudolf
Számek Andor
Tenschert Franz
Vaculný Max
Wachsmann Adolf
Welzel Richard
Weinzinger Ernst.

V. Klasse, 50 Schüler.

Flekles Heinrich
Fonovits Richard
Frank Ernst
Frank Karl
Göbbel Karl
Hantschel Leopold
Herrmann Karol
Infeld, R. v., Otto
Kärpel Ernst
Kaufmann Karl
Knöpfelmacher Paul
Kohl Karl
Kornfeld Otto
Krasny Franz
Kubai Alexander
Kunzenbach Karl

Mahovsky Eugen
Malkovský Alois
Mayer Otto
Moser Anton
Moser Gustav
Nadel Otto
Pawliček Rudolf
Polak Johann
Rauscher Franz
Richer Hermann
Schäffler Gustav
Schiller Karl
Schmid Alois
Schwarz Heinrich
Skamperl Karl
Spielberg Max
Spieß Otto
Steskal Felix
Stiasny Johan
Storch-Hager
Thieberg Ern
Thürriegl Ru
Toth Leo
Weinberger P
Wieland Joha
Winternitz M

VI. Klasse, 37 Schüler.

Bader Hans
Bellak Felix
Brand Edmund
Cafourek August
Eislitzer Siegfried
Fridau Franz
Fürth Hans
Goldschmid Egon
Gottlieb Max
Greulberger Franz
Haberlick Josef
*Hantschel Viktor
*Hengl Franz
*Jalkotzy Leopold
Janauschek Ferdinand
Kainz Rudolf
Kratochwil Josef
Kropf Wilhelm
Landau Artur
Mauthner Alois
*Mayer Ernst
Morawetz Josef
*Neubauer Leopold
Opawa Friedrich
Pichler Karl
Pollak Karl
Pritzl Franz
*Prowaznik H
Schlegel Gus
Spitzer Kurt
Steiner Hugo
*Steiner Leo
Thieberg Her
Tostmann Fr
Trantina Edu
*Weinreb Fr
Heichler Mar

XI. Verzeichnis der Lehrbücher für a Schuljahr 1910/11.

Die bei der Auflage eingeklammerten Zahlen bedeuten die zulässig

Religion:

a) katholisch: I. Klasse. Großer Katechismus der kath. Rel.
Pauker, Lehrbuch der kathol. Liturgik. 2. (1.) Aufl. 1 K 50 h
II. Klasse. Wie in I.
III. Klasse. Pauker, wie in I. — Pauker, Lehrbuch der Offenb des Alt. Bundes. 1 K 70 h.
IV. Klasse. Pauker, Lehrbuch der Offenbarungsgesch. des Je des. 2 K.
V. Klasse. Kühnl, Lehrbuch der kathol. Religion für die ob der Realschulen u. verw. Lehranst., I. Teil: Glaubenslehre 2 K 50 h.
VI. Klasse. Kühnl, II. Teil: Sittenlehre. 2 K 50 h.
VII. Klasse. Bader, Lehrbuch der Kirchengesch. 7. (6.—4.) Aufl.

b) evangelisch: I.—IV. Klasse.
Biblische Geschichte für den evang.-protestant. Religionsunt gabe für Oesterr. 1 K.
Luthers kl. Katechismus. 2. Aufl. Ausgabe für Oesterr. 44
Witz-Oberlin, Der Heidelberger Katechismus H. B. 1 K.
Schulbibel bearbeitet im Auftrage der Bremischen Bibelgesellsch
Liederschatz, Ausgew. evang. Kirchenlieder zum Schulgebrau 2. Aufl. 60 h.
Aust, Lehrbuch der Kirchengeschichte f. d. evang. Religion 5. (4. u. 3.) Aufl. 1 K 24 h.
V.—VII. Klasse. Hagenbach, Leitfaden des christl. Religionsu bearbeitet v. Deutsch. 8. Aufl. 2 K 80 h.

tisch: I. Klasse. Wolf, Gesch. Israels für die israel. Jugend, sgeg. v. Pollak. I. Heft. 16. (15. u. 14.) Aufl. 96 h.
Gebetbuch, herausgegeb. vom mähr.-schles. israelit. Lehrervereine. —1.) Aufl. 84 h.
uch, hebr. Ausg. von Letteris.
. Wolf-Pollak, Gesch. Israels wie oben. I. u. II. Heft. 15. (14., ıufl. 1 K 04 h.
ıch, Pentateuch, wie in I.
. Wolf-Pollak, Gesch. Israels. III. Heft. 12. (11., 10.) Aufl. 76 h.
ıch, Pentateuch, wie oben.
. Wolf-Pollak, Gesch. Israels. IV. Heft. 11. Aufl. 48 h.
Pollak, Gesch. Israels. V. Heft. 11. Aufl.
Kurzgefaßte Religions- u. Sittenlehre. 9. (8) Aufl. 40 h.
ıch, Pentateuch.
Psalmen, hebr. Ausg. v. Letteris.
.-Kayserling, Lehrbuch der jüd. Gesch. u. Literatur. Bear- von Doctor und Biach. Ausg. für Oesterr. 3 K.
. Prophetae posteriores, hebr. Ausg. v. Letteris.
:-Kayserling, wie in V.
e. Peutateuch, wie in I.
ı, Lehrbuch der jüd. Geschichte für die Oberstufe der Mittelsch. eil. 1 K 60 h.

Deutsche Sprache:

e. Spengler, Deutsche Schulgrammatik. 1 K 80 h.
ısse. Kummer, Deutsche Schulgrammatik. 7. Aufl. 2 K 60 h.
elinek-Pollak-Streinz, Deutsch. Lesebuch für österr. chulen. I. Band. 2 K 10 h.
)asselbe. II. Band.
Dasselbe. III. Band.
Dasselbe. IV. Band.
Bauer-Jelinek-Pollak-Streinz-Brandeis, Deutsches uch für Realschulen. V. Band. 2. Aufl. 2 K 80 h.
-Jelinek-Streinz, Leitfaden der deutschen Literatur für . Realschulen. I. Teil. 1 K.
Bauer-Jelinek-Streinz. VI. Band.
Kummer-Stejskal, Deutsches Lesebuch. VII. Band. 5. Aufl.

Französische Sprache:

'etter-Ullrich, La France et les Français. Lehrgang der Sprache für Realsch. I. Teil. 13. Aufl. 1 K 40 h.
'etter-Ullrich. II. Teil. 13. Aufl. 1 K 80 h.
Fetter-Ullrich. III. Teil. 8. Aufl. 2 K 40 h.
Fetter-Ullrich. IV. Teil.
sse. Fetter-Alscher, Französ. Schulgrammatik. 4. (3. u. ıfl. 3 K.
r-Alscher, Uebungsbuch f. d. ob. Klassen. Des Lehrganges anz. Sprache. V. Teil. 5. (4.) Aufl. 2 K.
r-Ullrich, Franz. Lesebuch f. d. ob. Klassen der Realschulen. II. Teil, jeder Teil samt Kommentar. 2 K 80 h.

Englische Sprache:

llinger-Butler, Lehrgang der engl. Sprache. Ausgabe A. 1. 2. (1.) Aufl. 2 K 25 h.
asse. Ellinger-Butler. II. Teil: An English Reader. 2. (1.) 4 K 50 h.
ger-Butler. III. Teil: A Short English Syntax and Exercises. 90 h.

Geographie:

I. Klasse. Heiderich, Oesterr. Schulgeographie. I. Teil. 4. Aufl.
II. Klasse. Heiderich. II. Teil. 3. Aufl.
III. Klasse. Umlauft, Lehrbuch der Geographie (für Realschule 5. Aufl. 2 K 10 h.
IV. Klasse. Heiderich, Oesterr. Schulgeographie. III. Teil. 2. Au
V. Klasse. Heiderich. IV. Teil.
VI. Klasse. Heiderich. V. Teil.
Alle Klassen: Kozenn-Heiderich, Geograph. Atlas. 41. 8 K für die I. Klasse. Für die anderen Klassen auch di Auflagen.

Geschichte:

I. Klasse. Hannak-Rebhann, Lehrbuch der Gesch. des A 4. (nach Hannak 15) Aufl. 1 K 90 h.
Hannak-Umlauft, Histor. Atlas. I. Teil. 7. (6.—1.) Auf
II. Klasse. Hannak-Rebhann, Lehrbuch d. Gesch. II. Teil
Hannak-Umlauft, Histor. Atlas. II. Teil, alle Aufl. 2 K
III. Klasse. Lehrbuch und Atlas wie in II.
Hannak-Rebhann, Lehrbuch d. Gesch. III Teil. 12. Aufl.
IV. Klasse. Hannak-Rebhann, III. Teil. 12. Aufl. 1 K 60 h
Zeehe-Rebhann, Lehrbuch d. Gesch. d. Altertums f. d. der Realsch. 3. Aufl.
Atlas wie in I und II.
V. Klasse. Zeehe-Rebhann wie in IV. 2. (1.) Aufl. 2 K 40 h.
Zeehe-Rebhann. II. Teil. 2. (1.) Aufl. 2 K 60 h.
Atlas wie in IV.
VI. Klasse. Zeehe-Rebhann. II. Teil. 2. (1.) Aufl. 2 K 60 h
Zeehe-Rebhann, III. Teil. 2 K 40 h.
Atlas wie in II.
VII. Klasse. Zeehe-Rebhann, III. Teil 2 K 40 h.
Zeehe-Heiderich-Gunzel, Oesterr. Vaterlandskunde. 3. Aufl.
Atlas wie in I und II.

Mathematik:

I. Klasse. Schmidt Josef, Arithmetik u. Geometrie für die Unterste.
II. Klasse. „ „ „ „ „ „ „
III. Klasse. „ „ „ „ „ „ „
IV.—V. Klasse. Schmidt Josef, Lehrbuch der Elementarmathemati f. Realschulen. 3 K 80 h.
VI.—VII. Klasse. Močnik-Neumann, Lehrbuch der Aritne Algebra f. Oberrealsch. 29. (28.) Aufl. 3 K 80 h.

Naturgeschichte:

I. u. II. Klasse. Zoologie: Pokorny-Latzel, Tierkunde für ie Klassen d. Mittelsch. 29. (28) Aufl. 4 K.
I. u. II. Klasse. Botanik: Pokorny-Fritsch, Pflanzenkule unteren Klassen d. Mittelsch. 25. Aufl. 4 K.
V. Klasse. Wretschko-Heimerl, Vorschule der Botanik f. G an höheren Klassen d. Mittelsch. 8. Aufl. 3 K 50 h.
VI. Klasse. Zoologie: Altschul, Körper- u. Gesundheitslre oberen Klassen d. Mittelsch. 2 K.
Graber-Latzel, Leitfaden der Tierkunde für die oben d. Mittelsch. 6. Aufl. 4 K 20 h.
VII. Klasse. Mineralogie: Scharizer, Lehrbuch der Mineralo Geologie für die oberen Klassen der Realschulen. 3. (2.) Au. 3

Chemie:

ippel, Grundzüge der Chemie u. Mineralogie für die IV. Kl.
schulen. 3. Aufl. 2 K 50 h.
en der Chemie.
ppel, I. Teil: Anorgan. Chemie. 2. Aufl. 3 K 50 h.
ippel, Grundlinien d. Chemie. II. Teil: Organische Chemie. 3 K.

Physik:

e. Wallentin, Grundzüge der Naturlehre für die unteren
. Ausgabe B für Realschulen. 5. Aufl. 2 K 40 h.
se. Lehrbuch der Physik für die oberen Klassen. Ausgabe B
lschulen. 12. Aufl. 3 K 80 h.

Geometrie:

oßmanith-Schober, Grundriß der Geometrie. II. Teil.
. 1 K 30 h.
hiffner, Leitfaden für den Unterricht in der darstellenden
ie. 3. Aufl. I. Teil. 2 K 40 h.
e. Schiffner wie in V, doch 2. (1.) Aufl.

Stenographie:

mann, Lehrgang der Gabelsbergerschen Stenographie. 2. Aufl.
h.
ann, Stenograph. Lesebuch. I. Teil. 2. Aufl 1 K 60 h.
zmann, Lehrgang wie in I.
ann, Stenograph. Lesebuch. II. Teil. II. Aufl.

* * *

Empfehlenswerte Hilfsbücher.

rousse, Dictionnaire complet illustré.
atte, Enzyklopädisches Wörterbuch der franz. und deutschen
(Schulausgabe in 2 getrennten Bänden.)
gabensammlung aus der darstellenden Geometrie.

XII. Kundmachung

für das Schuljahr 1910/11.

Aufnahme in die I. Klasse.

Im Septembertermine finden Einschreibungen und Aufna in die I. Klasse nur nach Maßgabe der vorhandenen Plätze statt. I werber haben in Begleitung ihrer Eltern am 9. September 1910 zv 9 Uhr in der Direktionskanzlei zu erscheinen, den Tauf- oder und den letzten Schulausweis, welcher den Vermerk tragen muß zum Zwecke des Uebertrittes in eine Mittelschule" und ein volls fülltes Nationale vorzulegen. Die Aufnahmsprüfung findet an de um 2 Uhr statt.

Eine Wiederholung dieser Prüfung, sei es an derselbe anderen Mittelschule, ist in demselben Schuljahre unzulässig.

Aufnahme fremder Schüler in die II.—VII. K

Aufnahmswerber, welche in eine höhere Klasse als die er beabsichtigen und ein Zeugnis über die mit Erfolg absolvierte, un hergehende Klasse nicht beizubringen vermögen, haben sich ein prüfung aus allen obligaten Unterrichtsgegenständen zu unterzieh eine gesetzlich festgesetzte Taxe von 24 K zu erlegen. Die Zulas Prüfung erfolgt nur nach Maßgabe der vorhandenen Plätze am zwischen 9 und 10 Uhr vormittag. Die Prüfung selbst wird ar um 2 Uhr beginnen und wird am folgenden Tage nach 10 U werden. Schüler, welche von einer gleich organisierten Reals und in eine höhere Klasse als die erste der hierortigen Anstalt ein haben nebst dem Tauf- oder Geburtsscheine, einem vollständ Nationale sämtliche Realschulzeugnisse vorzuweisen, von denen a der Abgangsklausel versehen sein muß.

Aufnahme jener Schüler, welche im Schuljah der Anstalt angehörten.

Schüler, welche ihre Studien an der Anstalt fortsetzen w sich am 9. September zwischen 8 und 9 Uhr in der Klasse zur z zu melden, in welche aufzusteigen sie geeignet sind, und dase zeugnis, sowie ein vollständig ausgefülltes Nationale abzugeben. S sich nicht rechtzeitig einschreiben lassen, werden als ausgetre und ihre Plätze werden an fremde Aufnahmswerber vergeben w

Wiederholungs- und Nachtragsprüfung

Schüler, welche eine Wiederholungs- oder eine Nachtr bestehen haben, melden sich am 9. September um 8 Uhr in A günstigen Ergebnisses der Prüfung in die nächst höhere Klas vorzunehmenden Wiederholungsprüfungen sind im Laufe des beenden.

Eröffnungs-Gottesdienst.

Am 10. September haben sich die katholischen Schüler u Schulhause zu versammeln, um zum Gottesdienste geführt zu er dem Gottesdienste werden sie wieder in das Schulhaus geführ ihnen die Schulvorschriften erklärt werden. Die nicht katholi erwarten im Schulgebäude die Rückkehr der Katholiken von d

Schulgeld.

Das Schulgeld ist in den ersten sechs Wochen eines je im Wege des k. k. Postsparkassenamtes zu entrichten und beä Semester 50 K.

Die Bedingungen für die Schulgeldbefreiung und Stundu d des Schulgeldes werden den Schülern rechtzeitig bekannt ge

Der regelmäßige Unterricht beginnt am 12. September u 8

ebenter Jahresbericht

über die

STAATS-REALSCHULE

m IX. Wiener Gemeindebezirke

(IX/1, Glasergasse 25).

———— o

ffentlicht am Schlusse des Schuljahres 1910/11.

INHALT:

esimalkalkül. (Schluß.) Von Prof. Josef Schmidt.
ichten. Vom Direktor.

———— o

WIEN 1911.
Selbstverlag der k. k. Staats-Realschule.

Der Infinitesimalkalkül.

Von Prof. Josef Schmidt.

(Schluß.)

III. Teil.

Methodik der Infinitesimalrechnung.

Allgemeine methodische Grundsätze.

ır wir die besonderen Fragen der Methodik der Infinitesimal- in Angriff nehmen, haben wir die Richtlinien anzugeben, ren sich der mathematische Unterricht überhaupt bewe-

es nicht eine solche Richtlinie gibt, ist dem Umstande zu- ıen, daß die Psychologie auch nicht die einfachsten Fragen Genesis der Erkenntnis zu beantworten imstande ist. Sie um auch keine didaktischen Leitsätze aufstellen außer den Unterrichtsregeln, wie sie jedes Lehrbuch der Pädagogik iese Regeln geben aber nur Verständigungs-, nicht Erkennt- an, sie können deshalb höchstens dazu dienen, die Schüler echnik der mathematischen Sprache bekanntzumachen, wo- weiter nichts als die Fähigkeit erreichen können, die von schon produzierten Gedanken so auszudrücken, wie es der tische Sprachgebrauch verlangt. Jene Regeln weisen also ie Schale, nicht auf den Kern der Sache hin: sie sind für die keineswegs für die Synthese der Erkenntnis vom Wert. netische Funktion des Verstandes könnte von der Psycho- dann gefördert werden, wenn die Gesetze des psychischen ens bekannt wären.

n die Frage, wie im Kinde der Begriff der Zahl entsteht, Psychologie unbeantwortet. Die Ansicht Mills und an- ß der Zahlbegriff durch Abstraktion von konkreten Dingen n wird, ist unhaltbar, da die Ableitung des Zahlbegriffes aus gbegriffe eine petitio principii beinhaltet. Ueberdies ist die Abstraktion unmöglich, weil die Dinge, wenn von ihren ren Unterschieden abgesehen wird, nicht aufeinander be- erden können, auch nicht durch ihre Folge in der Zeit und

ihre Stellung im Raume, da der Zeit- und Raumbegriff den griff voraussetzen. Bei der Bildung der Zahlbegriffe ha sich vielmehr darum, wie Sigwart ganz richtig ausführt tane Tätigkeiten, die durch sinnliche Eindrücke wohl veranl nicht notwendig erzeugt werden, für das Bewußtsein zu fix Wenn irgendetwas, so erweist sie (die Zahl) sich als ein Schöpfung unseres seine eigenen Tätig zum Bewußtsein bringenden Denkens, und is sobald sie erst einmal entstanden ist, in ihren Weiterentwi von allem sinnlich Gegebenen absolut unabhängig."

Der Lehrer hat also im gegebenen Falle nicht die Bed des Schöpfungsaktes zu schaffen (dieser ist vielmehr sch schlossen), sondern den Schülern bloß die Bedeutung der Za und der Zahlzeichen zum Bewußtsein zu bringen. Daß dies a unter Benützung sinnlicher Hilfsmittel geschieht, unterlieg Zweifel. Sinnliche Hilfen sind ja im Unterrichte immer dann vo wenn es sich um die Analyse von Begriffen handelt, die bei geistigen Besitz der Schüler gehören. Freilich darf man in wendung der Anschauungsmittel nicht zu weit gehen. M stets darauf achten, daß nicht andere Vorstellungen als c sichtigten geweckt werden. So wäre es z. B. nicht am Pla Symmetriebegriff im Anfangsunterrichte der Geometrie dad machen zu wollen, daß man ein zusammengefaltetes Papier i Nadel an mehreren Stellen durchsticht, dann auseinander br die Wirkung dieses Experimentes abwartet. Die Schülerw alles andere ablesen, nur nicht das, was beabsichtigt ist.

So sehr sinnliche Hilfen im Unterrichte zur Klärung le griffe von Nutzen sein können, wenn sie mit Vorsicht ang werden, so schädlich kann ihr Gebrauch wirken, wenn ihn andere Bedeutung als die der Verständigung zugewiesen wi

Bei Begriffen, die erst durch Synthese gewonnen werd sind sinnliche Hilfen durchwegs zu vermeiden, auch in der Fr die Vorstellung belebenden Bildern. Diese Bilder bringen vo Auge des denkenden Schülers bloß alle die unklaren Fragen, it es der Erkenntniskritiker zu tun hat: man führt den Schü sicheren Grunde der Mathematik weg auf den schwankend der Metaphysik.

Auch bei der Besprechung der Zahlengesetze ist vom Gb sinnlicher Hilfen abzuraten, wenn sie mehr als Verständigungs sein sollen. Freilich, hätte Mill Recht, wenn er sagt: „Di G wahrheiten dieser Wissenschaft (der Zahlenwissenschaft) ru auf der Evidenz der Sinne", dann wäre ihre ausschließliche Be dung am Platze. Die Mathematik ist aber keine Naturwissns wie schon daraus erhellt, daß ihren Sätzen der Charakter de meingiltigkeit zugesprochen wird, sowie daraus, daß bei ein Ü übereinstimmung des als richtig erkannten Resultates einer Be mit der Beobachtung nicht jene, sondern diese in Zweifel ge wird; sie darf sich darum auch nicht auf Empirie stützen. re züglichsten Erkenntnismittel sind die primitivsten Funktionen

:hen Verstandes, die Synthese und Analyse; allerdings weiß
ihnen bloß, daß die eine die Erkenntnistatsachen schafft,
ıdere diese zergliedert, um ihren Zusammenhang zu ver-
Vie die genannten primitiven Funktionen am wirksamsten
ı sind, darüber sind wir infolge der mangelhaften Entwick-
Psychologie noch ganz im unklaren.

ß aber ist, daß die empiristische Theorie der
ik in ihrem Bestreben, den Schülern durch Berufung auf
statsachen Erleichterung bei den Beweisführungen zu ver-
nichts weniger als einen Erfolg aufzuweisen hat, im Gegen-
Studium der Mathematik wird auf diese Weise erschwert.
liesbezüglich nur ein Beispiel vorzubringen, sei auf die üb-
eisführung der Beziehung a.—b = —a b hingewiesen. Da
ichst a (c — b) unter der Voraussetzung entwickelt, daß
, dann c schrittweise kleiner und kleiner gewählt, schließ-
er Abnahme der so entstehenden Produkte die Richtigkeit
ınisses — a b für c = o erschlossen.

ınterdrücken die Bemerkung, daß ein Unterricht, bei dem
chüler eine solche Logik gefallen lassen, besser unterbliebe,
atieren bloß, daß solche Konflikte der Logik mit der Schul-
ik nicht selten sind, ja daß sie sich bei vielen Schulmännern
en Ansehens erfreuen. Dies ist umso bedauerlicher, als da-
Wiedergabe des natürlichen Sachverhaltes, weil zu schwer
erschwert wird. Außerdem werden, um solchen empiri-
ısteleien Platz zu schaffen, die didaktisch wertvollsten
seitigt und die Schulmathematik so auf ein Niveau herab-
das den Wert der mathematischen Schulbildung problema-
heinen läßt.

npiristische Theorie der Didaktik weiß nichts von der Tat-
die natürlichste Entwicklung auch die verständlichste ist.
ınen dieser Tatsache geht sie den im Unterrichte erschei-
hwierigkeiten aus dem Wege, statt sie zu beseitigen. Dies
besonders klar bei der Behandlung der Infinitesimalrech-
e Zahlen, die Grenzwerte, werden eingeführt, ohne sie
empirisch zu definieren, das Operieren mit ihnen wird
al erklärt, ein Satz wie: Der Grenzwert eines Produktes
rodukte der Grenzwerte der Faktoren gleich, wird, ohne
ı nur als glaubwürdig hingestellt würde, ohne weiteres ver-
w. Dabei übersieht man, daß alle grundlegenden mathe-
Begriffe einer genauen Revision zu unterziehen wären, da
eren Definitionen nicht notwendig bestehen bleiben müssen.
ı Begriff der Gleichheit gilt dies. Zwei Ausdrücke, A, B,
üher als gleich bezeichnet, wenn sie zu demselben Zähl-
ihrten oder wenn für sie die Richtigkeit der Beziehungen
ist entweder größer als B oder gleich B) und A $\leq$ B er-
de, woraus dann, ohne daß man das Zählergebnis selbst
brauchte, A = B gefolgert werden durfte. Wie soll man
Kriterien der Gleichheit bei einem Prozeß verwenden, der
le findet und der sozusagen nur einseitig verläuft?

Die letzten Bemerkungen leiten uns von selbst zu d
über: Wie bewältigt der Hochschullehrer die Schwierigk
che der Darbietung der Zahlengesetze entgegenstehen? W
haltspunkte kann er dem Methodiker geben?

Die Wissenschaft baut die Mathematik in der Weise a
gewisse Vereinbarungen über den Gebrauch von Rechnu
trifft und die Zulässigkeitsgrenze für alle möglichen Zusa
lungen der als Zahlen definierten Symbole festsetzt. Dies
cher Weise für die Arithmetik wie für die Geometrie. W
hier nur an den Hilbertschen Aufbau der Geometrie.
beginnt seine „Grundlagen der Geometrie" mit
ten: „Wir denken drei verschiedene Systeme von Ding
Punkte, Geraden, Ebenen) . . . Wir denken die Punkte
Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezei
Beziehungen durch Worte, wie ‚liegen', ‚zwischen', ‚pa
Unter Punkt, Gerade, Ebene sind nun keineswegs die Bg
standen, an die der unbefangene Leser denkt, sondern
bekannte X, Y, Z, die durch die Begriffe „liegen", „zwis
(die wiederum nicht das bedeuten, was sie aussagen) in
zueinander gesetzt werden, und die durch diese Beziehung
werden.

Diese genetische Theorie der Erkenntnis, welche
durch Beziehung aufeinander im Denken setzt und sie
stets im Flusse befindliche, keinen Abschluß erreichend
lung in immer schärfere Beleuchtung zu stellen sucht,
Wissenschaft von Nutzen sein, für die Didaktik ist sie
nicht. Die in solcher Gestalt entwickelte Axiomatik verfäl
leeren Formalismus, der zu keinem anderen didaktisce
führen kann als zu dem: beobachte nur die vorgeschrieb
nungsregeln und der Rechnungsgang wird richtig.

Die Schüler sollen nicht zu Rechenmaschinen werde
schließen lernen, schließen lernen im Sinne der Aristoteli
nach der letzte nicht weiter zu definierende Begriffe und
weiter zu beweisende Sätze notwendig als evident gl
braucht nicht zu befürchten, daß die Schüler den mat
Lehren nur eine durch die Voraussetzungen bedingt
zusprechen könnten. Man wird sie diesbezüglich leicht
dem Hinweise beruhigen können: Die Geltung der ma
Lehren hat jedenfalls so lange Bestand, als die Richtigkeit
nicht erschüttert ist. Die Annahme dieser Möglichkeit
dann begründet, wenn einfachere als die axiomatische
stieren könnten, die in ihren Konsequenzen mit diesen
Widerspruch kommen müßten. Warum sollten wir uns
der allereinfachsten Wahrheiten nicht bewußt sein?

Wir können es uns ersparen, näher auf die symbolis
tik einzugehen. Schon die wenigen Bemerkungen, die
gehenden Platz fanden, lassen erkennen, daß der Me
dieser Seite keinen Zufluß an Gedanken zu erwarten
der Unterricht in feste Bahnen geleitet werden könnte

bisherigen Untersuchungen haben ergeben, daß die Didaktik urch die Psychologie noch durch die Erkenntnislehre exakt :t werden kann. Der Methodiker darf überhaupt nicht er- daß ihm die Bausteine zu seiner Wissenschaft von anders- mmen, er muß sie selbst besorgen. Die Didaktik ist eine senschaft und muß daher nach den Grundsätzen einer sol- gebaut werden.

Methodiker muß also in erster Linie Experimentator sein. ich nicht von vorgefaßten Meinungen leiten lassen, er muß alle die vielgestaltigen Beziehungen zwischen den von ihm den Individuen und dem von ihm zu lehrenden Stoffe ins sen und die dabei zutage tretende Wechselwirkung bis ins e verfolgen und beschreiben. Er muß seine Experimente mit Gewissenhaftigkeit durchführen, die Versuchsbedingungen 'ersuchsresultate genau verzeichnen, um daraus Schlüsse zu ie dem weiteren Ausbau seiner Wissenschaft dienlich sind. bisher an Ergebnissen dieser Art gewonnen wurde, ist frei- nich viel, wie ja bei einer so jungen Wissenschaft, wie es die ntalpädagogik ist, umso weniger zu erwarten ist, als die mei- er noch abseits stehen. Immerhin findet man in M e u m a n n s m e n t a l p ä d a g o g i k Ansätze zu einer neuen Didaktik, n schönsten Hoffnungen berechtigen.

Gegner der Experimentalpädagogik werden freilich einwen- die schier unbegrenzte Anzahl von Versuchsmöglichkeiten rimentelle Grundlegung der Pädagogik problematisch emgegenüber muß geltend gemacht werden, daß dieser jede Naturwissenschaft trifft und daß er gerade bei der am wenigsten am Platze ist; denn diese erfreut sich in der e einer kundigen Führerin, die gangbare Wege zum Ziele ler, der sich zu dem Grundsatze der Entwicklungslehre be- die psychische Entwicklung im Individuum denselben Weg elcher der Entwicklung der Gattung von der Natur zuge- urde, wird den großen Wert der experimentellen Methode scher Grundlage anerkennen und zugeben müssen, daß die e selbst in den speziellsten Fällen Direktiven gibt, die den r großen Mißgriffen schützen.

i e e n t w i c k l u n g s g e s c h i c h t l i c h e M e t h o d e edeutung kennen zu lernen, ist es notwendig, zu einzelnen en Fragen Stellung zu nehmen. In erster Linie haben wir em Standpunkte aus gegen ein didaktisches Prinzip auf- das in der modernen pädagogischen Literatur schon das ht erworben zu haben scheint, gegen das Prinzip, „neu zu ie Bildungen möglichst früh einzuführen". (Berichte über Unterricht in Oesterreich. Heft 6.)

nfachheit gewinnt wohl so der Aufbau der Mathematik, s ist dem Verständnis hinderlicher als ein solcher Vor- Schüler sollen im Gegenteil zur allmählichen Erlernung matischen Ausdrucksweise angehalten werden und dürfen frühzeitigen Gebrauch derselben gezwungen werden. Sie

können in abstrakten Sätzen nicht denken, auch wenn sie i
Wortlaute nach geläufig sind.

Um das Gesagte an einem Beispiel klar zu machen,
wir auf die gewöhnliche Entwicklung der Rechengesetze u
daraus zwecks näherer Besprechung etwa die Multiplika
mehrziffrigen mit einer einziffrigen Zahl heraus. Schon in
Mittelschulklasse wird zur Begründung des betreffenden R
fahrens der Satz von der Multiplikation eines Polynoms
Monom (wenn auch nicht mit diesen Ausdrücken) verwen
dritten Klasse wird der Sache nach derselbe Vorgang b
um in der vierten Klasse noch einmal wiederholt zu we
wiß ist dieser Vorgang für den Lehrer und auch für die E
im Lehrbuche der einfachste, für den Schüler aber bedeut
Quelle von Mißverständnissen, die auch dann noch nich
sind, wenn er mit größter Mühe die ihm fremde Spra
w e n d i g gelernt hat. Gewiß aber kann von einer Denk
einem solchen Unterrichte nicht die Rede sein.

Der Satz, der hier zur Grundlage der Multiplikation
wird, darf nicht als Prämisse verwendet werden, er soll
teil als Ergebnis des Multiplikationsverfahrens gewonne
und da nur in dem Sinne, daß so und soviel Einzelfälle für
tigkeit desselben sprechen. Die Multiplikationsregel selbst
nach dem Positionsgesetz vorgeschriebene Gruppierung
Betracht kommenden Dinge gewonnen werden und es ist a
Schüler zum Bewußtsein zu bringen, daß das von der V
her bekannte Verfahren als ein die verschiedensten Geda
umfassendes Formalprinzip anzusehen ist. Freilich ist e
Darstellung des Sachverhaltes umständlicher als die de
matiker geläufige, sie verbürgt aber gerade deswegen
richtserfolg.

Auch in der dritten Klasse darf jener Satz noch nic
Spitze der Beweisführung gestellt werden, auch hier ist
historischen Entwicklungsgange Rechnung zu tragen, frü
Verwendung allgemeinerer Aufgaben, auch hier erschein
als Ergebnis einer großen Denkarbeit, diesmal aber in de
nis seiner Allgemeingiltigkeit. Hat der Schüler so die
des Satzes auf dem Wege der Induktion erfaßt, so da
sicheres Verständnis erwarten, wenn an die deduktive Al
der vierten Klasse geschritten wird.

Ebenso wie uns die historische Entwicklung unser
schaft sichere Anhaltspunkte bei Beweisführungen liefe
uns auch Aufschluß darüber, in welcher Reihenfolge di
mathematischen Kapitel durchzunehmen sind. Nur sei
überhaupt, wird man von dem verzeichneten Weg
Keineswegs aber sollte man dies ohne die triftigste
sichertsten Gründe tun. Verfehlt ist es zum Beispiel, di
Zahlen vor den allgemeinen Zahlen zu behandeln, einz
Grunde, um von positiven und negativen Gliedern
können. Der dadurch erreichte Vorteil der einfacheren

lurch Einführung der Ausdrücke additiv und subtraktiv
en, und zwar ohne dem Schüler wie dort das Verständ-
weren.

Behandlung der Infinitesimalrechnung ergibt sich aus
ehenden Erwägungen, daß die Schüler zunächst mit den
ertraut zu machen sind, die zu den infinitesimalen Me-
en, und daß erst dann die betreffenden Formen gleich-
schlußakte einer umfangreichen Ideenentwicklung dar-
d. Es muß mit aller Deutlichkeit der Gedanke heraus-
erden, daß die verschiedenartigsten Aufgabentypen zu
n Formalprinzip hinleiten und daß die Infinitesimalfor-
m Prinzip der Oekonomie der Arbeit heraus entstan-

wicklungsgeschichtliche Methode wendet sich also mit
ruck gegen eine allzugroße Bedachtnahme auf den For-
ir sie ist die Mathematik keine Formenlehre. Sie bringt
l den Kulturwert der Mathematik zur vollen Geltung,
igt, daß die mathematischen Lehren aus den geistigen
n der Menschheit herausgewachsen sind. Sie weckt auf
das Interesse der Schüler für den Gegenstand und er-
ine lebhafte Teilnahme derselben an dem Unterrichte.
spiel zur Klarstellung des Sachverhaltes. Der Ptole-
rsatz erscheint in den Lehrbüchern gewöhnlich als ein
beispiel der Aehnlichkeitslehre auf den Kreis und hat
icht mehr und nicht weniger Bildungswert als irgend-
. Die entwicklungsgeschichtliche Methode legt nicht
wicht auf die Beweisführung seiner Richtigkeit, son-
ne Genesis. Sie zeigt, daß Ptolemäus aus dem Drange
dem damaligen Stande der astronomischen Wissen-
echende, also genauere Sehnentafel als die vor ihm
en zu schaffen, den nach ihm benannten Lehrsatz er-
t auf Grund desselben einen kurzen Abriß der Sehnen-
l gewinnt so eine leicht verständliche Einleitung in die
eigentlich mehr als das: eine Theorie der Sinusfunktion.
nge gegen ein solches Verfahren nicht den Einwand
über den Rahmen des Mittelschulunterrichtes hinaus-
ß es daher eine Ueberbürdung der Schüler zur Folge
tens nicht, bevor man nicht über eine hinreichende,
der angegebenen didaktischen Prinzi-
nene Erfahrung verfügt. Unsere mehrjährige, nach der
geschichtlichen Methode geübte Unterrichtspraxis hat
jene Befürchtung unbegründet ist. Wir können es hier
daß die Schüler nichts so sehr als der einförmige Drill
auf die großen Kulturfragen Bedacht nehmender Un-
scht sie, so daß sie die geistige Arbeit nicht als eine
empfinden, sondern in ihr einen Quell der reinsten
ken.

atten wir bei unseren Darlegungen vornehmlich den

mündlichen Unterricht im Auge. Es erübrigt uns noch, die
der Lehrtexte für den Unterricht klar zu legen.

Unsere Instruktionen, die mit Recht bei den hervor
Vertretern des mathematischen Faches im In- und Au
erkennung finden, unterscheiden genau zwischen der
Methode des mündlichen Unterrichtes und der systema
Lehrbuches. Neuere Methodiker dagegen huldigen der A
daß die Lehrtexte genau den Weg zu verzeichnen hätt
mündliche Unterricht zu nehmen hat. Ein Verfasser
buches vertritt geradezu die Ansicht, daß das Lehrbuc
Linie für den schwachen Schüler, der dem mündlichen
nicht folgen könne, bestimmt sei.

Wir gestehen offen, daß wir noch auf dem Standpu
struktionen stehen. Wir können uns darum auch keiner de
Meinungen anschließen, schon gar nicht der zweiten,
jeden Unterricht negiert, da ja, wenn schon der schwa
auf die angegebene Weise mit Erfolg studieren könnte,
leichter für den begabteren wäre. Aber auch nicht
Meinung, welche den mündlichen Unterricht kopierend
verlangt, und zwar aus dem Grunde, weil auf diese Art
renzierung der Schüler nach Begabung und Leistungsfä
geschlossen ist.

Eine andere Anschauung, der oft Ausdruck verliehen
lich der, daß der Lehrer ohne Lehrbuch sein Auskom
könne, könnte man beipflichten, wenn die Unterrichtszei
bemessen wäre, als es der Fall ist, so daß man insbes
die nötigen Wiederholungen besorgen könnte, und we
einem solchen Vorgang der Forderung nach der eigenen
der Schüler im vollen Maße gerecht werden könnte. Wir g
lich nicht, daß in dieser Hinsicht das Lösen von Aufga
meinen vielmehr, daß der beabsichtigte Zweck besser er
wenn man darauf dringt, daß der Schüler Lehrtexte m
nis lesen lerne. Von demjenigen freilich, welcher der Ue
lautender Beispiele mit verschiedenen Zahlenwerten d
spricht, weil die schwächeren Schüler die betreffende
erst dann verstünden, wenn sie sie öfter durchdacht hät
wir keine Zustimmung erwarten; der Gegensatz ist zu r
für die Dressur, wir für den Unterricht.

Wer die drei Funktionen des Lernens: Verste
sen, Können in unserem Sinne versteht, der wird u
ten, wenn wir verlangen, daß das Lehrbuch nicht im
schreiben ist, daß es den Stoff in systematischer Ar
bringen hat und daß es sich bezüglich des Umfanges n
Memorierpensum beschränken darf. Wie viel vom Inha
buches als Lernstoff durchzuarbeiten ist, wird in jede
der Lehrer zu entscheiden haben; er soll sich dabei von e
satz leiten lassen, daß der Aufbau der Mathematik
wenigem Lernstoff zu erfolgen hat, damit die auf die F

der Schüler bezugnehmenden Entwicklungen umso
gestaltet werden können.
hrer soll eben stets darauf bedacht sein, die geistigen
der Schüler zur vollen Entfaltung zu bringen. Er er-
nen so Selbstvertrauen und Interesse, die wirksamsten
des Unterrichtes.

griffe der Infinitesimalrechnung im ma-
schen und physikalischen Lehrpensum.

rießlich für den Unterricht die Einverleibung des Funk-
s in das mathematische Lehrpensum ist, so didaktisch
re es, den Lehrstoff nach Funktionsklassen zu grup-
es die oben genannte Publikation verlangt. Wer solches
mt mehr Rücksicht auf den Formalismus der Mathe-
uf die geistige Entwicklung des Schülers und bedenkt
die durch die genannte Gruppierung erreichbare Ver-
in der Darstellung Schwierigkeiten in der Auffassung
eht, die der Schüler nicht bewältigen kann.
on dieser Seite in der Verkennung des entwicklungsge-
Prinzipes einer zu weit gehenden Umgestaltung des
hen Lehrpensums das Wort geredet, so hört man von
e wieder, daß man sich eine möglichst große Beschrä-
Verwendung des Funktionsbegriffes und dessen Eigen-
zuerlegen habe. Man könne wohl an geeigneten Stellen
alen Zusammenhängen sprechen, solle aber auf die Be-
s Wachstums der Funktionen und des Maßes dieses
nicht eingehen. Auch diese Ansicht ist unhaltbar, schon
weil die Schulmathematik solchen Ueberlegungen, wie
worfen werden, nicht aus dem Wege gehen kann.
t uns auf dem Standpunkt der entwicklungsgeschicht-
richtsmethode steht, wird sich in dem Widerstreit der
welche die modernen Bestrebungen des mathematischen
hervorgebracht haben, leicht zurecht finden. Nicht
oder Weniger des Lehrstoffes handelt es sich, sondern
ondere Gestaltung desselben. Eine Vereinheitlichung der
hen Lehren und damit eine Vereinfachung des Unter-
Platz greifen. Die gleichen Gedanken sollen auch mit
n Ausdruck gebracht werden, nicht wie früher unter
n Masken.
diesen Leitsätzen die Forderung des funktionalen Den-
es Unterrichtsprinzipes hinzu, so sind die modernen
n auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichtes im
gekennzeichnet. Wie sie im besonderen zur Geltung ge-
en sollen, soll im folgenden wenigstens in übersichtlicher
angegeben werden.
ungen über das Wachstum der Funktionen wird man
stellen lassen, schon in den untersten Klassen. Im Ge-
richte wird man bei den Konstruktionsaufgaben eines

der gegebenen Daten veränderlich annehmen und das z
Bestimmungsstück in Abhängigkeit davon setzen und di
gigkeit durch eine Tabelle darstellen lassen. Damit is
Grundlage für Fragen über funktionale Beziehungen
deren Beantwortung den Schülern erst volle Einsicht in
der Aufgabe gewährt.

Das Tabulieren zusammengehöriger Zahlen leis
physikalischen Unterrichte große Dienste. Die durch e
zum Ausdruck kommende Beziehung der zusamme
Größen hat für die Schüler der unteren Klassen größe
kraft als die üblichen mathematischen Deduktionen. An
spiel soll dies klar gemacht werden. Es sei die Abhäni
Beschleunigung auf der schiefen Ebene (b) von der St
selben (σ) festzustellen, also die funktionale Beziehung b =
zufinden. (Natürlich wird man hier wie noch im folgend
brauch solcher Symbole vorläufig Abstand nehmen.
liegenden Texte werden sie nur der küzeren Darstell
verwendet.) Um das Funktionsgesetz $f(\sigma)$ zu gewinnen
mit einer drehbaren schiefen Ebene entsprechend viele
und trägt die Resultate in eine Tabelle ein. Aus derselb
dann ablesen, daß zwischen den Größen g, σ direkte Pro
tät besteht, daß also der Ansatz $b = k.\sigma$ gilt. Zur Besti
Proportionalitätsfaktors k, stehen zwei Wege offen: e
der Tabelle selbst erhalten werden oder dadurch, daß
besonderen Wert von σ wählt. Als dieser Wert eigne
(freier Fall). Derselbe ergibt $k = g$. Dieses Resultat i
dem aus der Tabelle gefundenen nicht im Einklang. W
den beiden hat man größeres Vertrauen entgegenzubring
ist die Nichtübereinstimmung aufzuklären? — Es brau
nicht alle Fragen angeführt zu werden, die bei dieser
an die Schüler zu stellen sind.

Dem Studium der Tabellen zusammengehöriger Grö
im weiteren Unterrichte volle Aufmerksamkeit zu schen
der Behandlung der logarithmischen Funktion, der goni
Funktionen usw. Man wird das Maß der Stärke des
der betreffenden Funktion an verschiedenen Stellen ent
so auf empirischem Wege die Differenzenquotienten d
ten Funktion, also

$$\frac{\triangle \operatorname{Log} x}{\triangle x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\triangle \sin x}{\triangle x} = \cos x \text{ usw.}$$

durch wirkliche Ausrechnung bestimmen lassen. Um in
hiefür zu bringen, betrachten wir die Tabelle, welche di
keit des Dampfdruckes p von der Temperatur T =
Darstellung bringt:

Abs. Temp.	373	378	383	388	393	398	40
Druck	1·033	1·232	1·462	1·726	2·0275	2·371	·7

und berechnen uns die Druckzunahme per 1° C. Tem

30° C. Berücksichtigen wir bei der Bestimmung von $\triangle p$ arten Zahlen von $p = 2{\cdot}760$, so erhalten wir als Mit- $\triangle p$ die Zahl 0·415, somit ist $\frac{\triangle p}{\triangle t} = 0{\cdot}083$. Um auch eine von diesem Resultate zu machen, ermitteln wir das Volumen des Wasserdampfes bei 130° C. Für dasselbe lich die Bezeichnung:

$$W = 10T\,(v_T - v'_T)\,\frac{\triangle p}{\triangle T},$$

Verdampfungswärme in mkg, v_T das spezifische Vo- ampfes und v'_T das des Wassers in dm^3 bei T° ist. W ir uns nach der empirischen Formel:

$$W = 341000 - 305\,T;$$

ungefähr $W = 218000$ mkg, somit ist $v_T = 653\ dm^3$.

wie Differential- wird man auch Integralaufgaben auf n Betracht kommenden Tabellen in Angriff nehmen, um so auf empirischem Wege mit den wichtigsten Integral- ekannt zu machen.

iem Tabulieren ist für das einleitende Studium funktio- gigkeiten die graphische Darstellung von besonderem kann jenem gegenüber als naturgemäße Fortsetzung in ng und Uebung des funktionalen Denkens angesehen

ersten Behandlung der Graphika sind die Schüler vor- alten, die Abhängigkeitsbeziehungen zweier Veränder- uptsache nach im Bilde festzuhalten. Bei proportionalen ie größere oder kleinere Steilheit der betreffenden Ge- die verschiedenen Lagen derselben zu den Koordinaten- uge zu fassen; bei Größen, die einem anderen Abhängig- ls dem linearen unterworfen sind, genügt es, wenn die charakteristischen Eigenschaften der Schaulinie anzu- n. Man wird sie also in diesem propädeutischen Teil der stellungen nur zum „Denken in Kurven" anhalten. Erst nan auf die genaue Konstruktion der Graphika eingehen gungsverhältnisse durch die empirisch zu zeichnenden beschreiben. Zum Abschluß dieser Gedankenentwick- man die Richtungskoeffizienten der Tangenten an ver- tellen aus der Figur ablesen, um so Ausdrücke für das rke des Wachstums der Funktionen zu erhalten. Bei der . B. läßt man für den Punkt $(\varphi, \sin\varphi)$ $a = \operatorname{tg}\tau$ bestimmen

n, daß $a = \frac{\triangle \sin\varphi}{\triangle \varphi} = \cos\varphi$ ist.

n so manche Aufgaben der Differentialrechnung auf Wege lösen, so wird man es auch nicht verabsäumen, Integralrechnung in Angriff zu nehmen, indem man die Diagrammen mit Hilfe von Millimeterpapier bestimmen ben sich so die durch die Gleichungen

$$\int_0^x \cos x \, dx = \sin x, \quad \int_1^x \frac{dx}{x} = \log x \quad \text{usw.}$$

usw. zum Ausdruck kommenden Beziehungen, die gleich au
sche Aufgaben (über die harmonische Bewegung, über das P
insbesondere Gravitationspotential usw.) Anwendungen finden
Solche graphische Lösungen sind deswegen von besondere
weil sie in jedem einzelnen Fall das Besondere der Aufgabe
heben und die später zu verwendenden Formalprinzipie
schärfer hervortreten lassen.

Den Uebergang zur genauen Berechnung des Maßes i
Wachstum einer Funktion an einer bestimmten Stelle lie
Fehlerrechnung, der man deswegen auch eine besondere Pfle
deihen lassen soll, dies umso mehr, als die diesbezüglichen
lungen ohne Schwierigkeit gegeben werden können. Ma
leicht, daß der Fehler, der bei der Berechnung des Ausdru
im Resultat erscheint, durch

$$\triangle f(x) = f(x + \triangle x) - f(x)$$

bestimmt ist, wenn der Fehler von x gleich $\triangle x$ ist, und fin
Verständnis, wenn man erklärt, daß die Auswertung vo
nur dann von Bedeutung ist, wenn der sogenannte relati
$\frac{\triangle x}{x}$ sehr klein ist. Unter dieser Voraussetzung ist die En
von $\triangle f(x)$ für alle im Unterricht vorkommenden Funktio
lich und einfach durchzuführen.

Schon beim Rechnen mit unvollständigen Zahlen wird
von den Grundsätzen der Fehlerverrechnung leiten lasse
aus dem Grunde zweckdienlich, weil dadurch gerade die sch
sten und wichtigsten Probleme dieses Kapitels eine einheitl
handlung erfahren können; denn es werden nicht allein
Fragen: Wie groß ist der Fehler des Resultatets y, wenn
der Veränderlichen x gleich $\triangle x$ ist? und: Wieviel Stel
müssen berücksichtigt werden, wenn für das Resultat y
stimmte Anzahl von Stellen vorgeschrieben ist? durch
Gleichung $\triangle y = f'(x) \triangle x$ beantwortet, diese gilt ja überdi
für die direkte als die indirekte Operation. Handelt es sich
die Rechnung $y = x^3$, so ist die Bestimmung von $\triangle y$ aus
von $\triangle x$ aus $\triangle y$ nach der Gleichung $\triangle y = 3x^2 \triangle x$ vorzuneh
dieselbe Gleichung löst, zu diesem Zweck in der Form $\triangle$

geschrieben, die gleichen Fragen für die indirekte Operati
Der Fehlerrechnung wird man auch im übrigen Mth
unterrichte die größte Aufmerksamkeit schenken, selbst b
lösung von Gleichungen (linearen und höheren Gleichungen)
ist freilich vorausgesetzt, daß in der Schule auch Gleichuren
handlung genommen werden, deren Lösungen nicht einfachsi

tigung übrigens, die durch das praktische Leben geboten
n sochen Falle wird man dann, um sich von der Richtigkeit
nen Resultate zu überzeugen, die Probe mit abgerundeten
achen und die Ergebnisse mit den durch die Abrundung
en Fehlern vergleichen.

sgiebigstes Feld der Anwendung hat die Fehlerrechnung
ysik und in den Naturwissenschaften überhaupt. Dieses
echt fleißig bebaut werden; die Früchte, die es trägt, sind
itzbarem didaktischen Werte.

wird die Fehlerrechnung in den Lehrbüchern der Physik
wendet, dort aber, wo sich ein Einschlag davon vorfindet,
s gegen die Regeln der Logik. Wir erinnern diesbezüglich
m die gebräuchliche Ableitung der Linsenformel. Da wird
n lauter optische Prismen zerlegt und vorausgesetzt, daß
den Winkel derselben, sowie die Einfallswinkel der Licht-
hr klein seien. Beide Voraussetzungen treffen bloß für
der Nähe des Scheitels der Linse zu, so daß das Resultat

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{f}$$

nz spezielle Bedeutung hat. Darf man aber dann aus der
olgern, daß einem Lichtpunkte als Bild wieder ein Punkt
Müßte man als solches nicht vielmehr eine Lichtstrecke
da doch durch sämtliche (in Gedanken gebildete) Prismen

erwerfen diese Ableitung vor allem deswegen, weil in ihr
jedes Fehlers auf das Resultat nicht zu erkennen ist, und
die folgende, welche in dieser Beziehung den strengsten
gen gerecht wird. Nimmt man zwei verschieden dichte
t dem Brechungsexponenten n und als brechende Fläche
mit dem Radius O S = r an, sei L' das Bild des Licht-
beide auf O S gelegen, und P ein beliebiger Punkt der
gilt, wie man fast ohne Rechnung findet, die Beziehung

$$\frac{L\,O}{L'O}:\frac{L\,P}{L'P'}=n.$$

die Gegenstandsweite a und die Bildweite α für den Fall
itt P der Scheitel S in Betracht kommt, so erhält man

$$\frac{1}{a}+\frac{n}{\alpha}=\frac{n-1}{r}.$$

man nun eine Bikonvexlinse mit der Dicke d an, so be-
e Brechung des Lichtstrahles an der zweiten Sphäre mit
s r' die Gleichung:

$$\frac{1}{\alpha+d}-\frac{\frac{1}{n}}{\beta}=\frac{\frac{1}{n}-1}{r'}\quad\text{oder}$$

$$\frac{n}{\alpha}-\frac{n\,d}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta}=\frac{1-n}{r'}.$$

Subtrahiert man sie von der ersten Gleichung, so erg

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right),$$

wobei links das Glied $\frac{n\,d}{\alpha^2}$ vernachlässigt wurde.

Noch auf einen anderen Fall wollen wir des Näheren nämlich auf den, wo es sich darum handelt, die Wirkung netstabes auf eine Deklinationsnadel durch eine Formel druck zu bringen. Auch hier werden bei dem gebräuchl fahren so erhebliche Vernachlässigungen gemacht, daß die Giltigkeit des Resultates

$$\frac{\mu\,\mu'}{r^3}, \text{ bezw. } \frac{2\mu\,\mu'}{r^3}$$

in Zweifel ziehen müssen, dies um so mehr, als man ihne Anhaltspunkte dafür gibt, mit welchem Gewichte die Fehler im Ergebnis auftreten können.

Wie der übliche Vorgang vom logischen, so ist er didaktischen Standpunkt zu verwerfen, einerseits deshal Ableitung zu gekünstelt ist, weswegen sie sich dem Ged schwer einprägen läßt, andererseits deshalb, weil sie ei Komplikation enthält, indem gleich von der Wirkung ein stabes auf e i n e M a g n e t n a d e l (und nicht auf einen Fl chen wird.

Wegen dieser Mängel des gebräuchlichen Verfahren wir folgenden Vorgang. Man bestimmt die Feldstärke i Felde, und zwar für einen Punkt in achsialer und einen äquatorialer Richtung. Im ersten Falle ergibt sich hiefür Punkt mit der nordmagnetischen Menge 1 von der Mitt langen Magnetstabes r cm entfernt ist, der Ausdruck:

$$\frac{\mu}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{\mu}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2}$$

und im zweiten Falle bei den gleichen Maßen:

$$2\,\frac{\mu}{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \cdot \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}}$$

Für die genauen Ausdrücke:

$$2\,\frac{M}{r^3}\,\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}\,\frac{l^2}{r^2}\right)^2}, \text{ bezw. } \frac{M}{r^3} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4}\,\frac{l^2}{r^2}\right)^2}$$

wo M das magnetische Moment des Magneten darstellt ka auf Grund der Fehlerrechnung die Näherungswerte

$$2\,\frac{M}{r^3}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{l^2}{r^2}\right), \text{ bezw. } \frac{M}{r^3}\left(1 - \frac{3}{8}\,\frac{l^2}{r^2}\right)$$

hen oder, wenn l gegen r sehr klein ist, durch die folgenden:

$$2\,\frac{M}{r^3},\ \text{bezw.}\ \frac{M}{r^3}.$$

man so die Feldstärke für die beiden Hauptrichtungen des n Feldes bestimmt, so hat man noch die Ablenkung φ einer ionsnadel aus dem magnetischen Meridian für den Fall zu en, daß neben dem Erdfelde mit der Feldstärke H ein zweites ies Feld mit der Feldstärke H' vorhanden ist, dessen Kraft- rmal zu denen des ersten sind. Man findet leicht:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{H'}{H}$$

so die Grundlagen für die weitere Entwicklung gegeben.

e Darstellung verdient vor der in den meisten Physiklehr- üblichen namentlich auch deswegen den Vorzug, weil sie Gedankenprozesse stützt, die im Physikunterrichte häufig det werden können. Es sei in dieser Beziehung nur auf die g der Phänomene von Ebbe und Flut, beziehungsweise auf endung der Tangentenboussole verwiesen.

che werden freilich Bedenken tragen, den binomischen in der allgemeinen Form, wie wir ihn hier verwendet ollen, im Unterrichte zu gebrauchen. Diesen legen wir fol- eichungen ($x < 1$):

$$1:(1+x) = 1 - x + x^2 - \ldots$$

$$1:(1+x)^2 = 1 - 2x + \ldots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \ldots$$

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + \ldots$$

$$1:\sqrt{1+x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \ldots$$

che vor und fragen sie, ob sie derlei Gleichungen für zu halten. Wenn aber nicht, so ist doch auch nicht (gerade im auf für die Schüler zu schaffende Erleichterungen) einzu- rum der allgemeine binomische Lehrsatz auf diese Formen ewendet werden sollte. Gewiß wäre es verfehlt, den bino- ehrsatz im Sinne der symbolistischen Theorie der Didaktik deln, seine Besprechung im Sinne der entwicklungsge- nen Methode aber ist geboten, weil den Schülern so die chwierigkeiten des physikalischen Unterrichtes, soweit der ische Teil in Betracht kommt, aus dem Wege geräumt wer- dies zu zeigen, könnte man fast jedes Kapitel heranziehen, ern aber hier nur an die Bestimmungsarten der Wellen-

länge des Lichtes, wo durchwegs im Resultate unvollständ
stehen, die es stets unbegreiflich erscheinen lassen müssen
wirklich so kleine, wie die hier in Betracht kommenden
so großen, während der Rechnung gemachten Vernachl
bestimmen kann, wenn man nicht die Fehlergrenze des
anzugeben imstande ist.

Solche Unsicherheiten, an denen die mathematischen
lungen der Schulphysik überaus reich sind, werden erst aus
sikalischen Unterrichte verschwinden, wenn die Fehlerre
Anerkennung findet, die sie verdient. Dann werden wohl
gisch unzulässige Beweisführungen, wie die L o m m e l s c
elektrische Potential in einem Punkte, die fast in alle e
Lehrbücher Eingang gefunden hat, für immer unmöglich s

Mit den bisher zur Sprache gekommenen Anwend
Fehlerrechnung sind die approximationsmathematischer
tungen, die Bezug auf die Infinitesimalrechnung haben,
abgeschlossen. Sie können noch dadurch vertieft werde
auf die geometrische Bedeutung der Gleichung $\triangle y =$
eingeht. Sie ist leicht gegeben. Da $\triangle y$ den Zuwachs der
eines Punktes der Schaulinie $y = f(x)$ angibt, wenn die
sich um $\triangle x$ verändert, so ist jeder Zuwachs von y inn
Intervalles $\triangle x$ auf Grund der vorhergehenden Gleichu
tional dem entsprechenden Zuwachs der Abszisse, so d
dem in Betracht kommenden Grad der Genauigkeit das K
zwischen den Ordinaten y und $y+\triangle y$ als geradlinig an
Damit ist dann auch die Berechtigung der linearen Interp
kannt, von der im Schulunterricht so häufig Gebrauch ge
den muß.

Indem ich bezüglich der weiteren Ausführung dies
auf mein Lehrbuch der Elementarmathematik (verlegt be
Wien) verweise, mache ich noch besonders darauf a
welche instruktive Behandlung auf dem bezeichneten W
garithmische Funktion erfahren kann. Bei dieser Art d
lung wird einerseits mit einem Schlage klar, warum de
Logarithmus eine so große Bedeutung für die Analysis e
dererseits erkennt man die volle Tragweite des im früh
richte geschilderten Gedankenganges bei B ü r g i, der n
folgt, charakterisiert werden kann. Durch die Betrachtu
gressionen

$$x = c\,k^n,\quad y = (k-1)\,n$$

erhält man zunächst für $\triangle n = 1$

$$\triangle x = c\,k^n\,(k-1) = (k-1)\,x,\quad \triangle y = k-1$$

und daraus

$$\triangle y = \frac{\triangle x}{x}.$$

Nimmt man zu diesen Erläuterungen die geometrisch
pretation der letzten Formel nach N i k o l a u s M e r c t

man die logarithmische Funktion auch auf Grund des In-
riffes ein, so läßt man die Schüler einen Blick in die Werk-
thematischen Schaffens tun, der ihnen vollen Ersatz für die
dete Mühe gibt. Diese ist übrigens nicht so groß und gewiß
als die, welche die gewöhnliche, durch einen Wust von
ı Formeln das Wesentliche verdunkelnde Berechnung der
denten e erfordert.

ı wir auch noch den Vorschlag bringen, neben der linearen
quadratische, kubische, . . . Interpolation zu besprechen,
eht dies aus dem Grunde, weil hier der Fall gegeben ist,
ıethodische Grundsatz Anwendung findet, daß man häufig
ändnis fördert, wenn man ein Kapitel in größerem Umfange
es anzueignen ist. Wenigstens sollte man die geometrische
ion, das heißt die Approximation der Kurven durch Pa-
herer Ordnung, behandeln. Gerade dieser Teil der Appro-
nathematik liefert so lebendigen Uebungsstoff, wie er
il nicht mehr anzutreffen ist.

der arithmetische Teil der Interpolationen höherer Ordnung
Sprache kommen. Bieten sie doch eine überaus einfache
it — die einzige für die Schulmathematik, wie es scheint
) fruchtbaren Taylorschen Satz einführen. Aber auch
ıd sie interessant und bildungsfähig und schon darum des
Wert. Solche die Elementarmathematik mit der höheren
ik in Verbindung setzende Lehren wird man selbstver-
nicht zum Gegenstand des Prüfens machen, höchstens in
, daß man sich an jene Schüler wendet, welche Interesse
ändnis hiefür besitzen, während die schwächeren Schüler
ndung der einzelnen Operationen herangezogen werden.
t dann, wenn derartige Betrachtungen nur zum Zwecke der
er Fassungskraft der Schüler angestellt werden, sind sie
ı Bildungswerte und daher im Schulunterrichte am Platze.

em Sinne befürworten wir sogar ein Eingehen auf die Newton-
olationsformel. In welchem Umfange, mag hier angedeutet wer-
e betreffenden Ausführungen in das genannte Lehrbuch der Ele-
ematik keine Aufnahmen fanden.

n die Funktionswerte $y_1, y_2 \ldots y_n$ einer linearen Funktion $y =$
äquidistante Werte der unabhängigen Veränderlichen berechnet,
Differenzen

$$y_2 - y_1,\ y_3 - y_2,\ \ldots,\ y_n - y_{n-1}$$

d jeder Funktionswert wird aus dem vorhergehenden erhalten,
u diesem die konstante Differenz addiert.

:n wir dasselbe Verfahren auf die quadratische Funktion $y = a x^2$
ın, so bilden die ersten Differenzen

$$\triangle y_1 = y_2 - y_1,\ \triangle y_2 = y_3 - y_2,\ \ldots\ \triangle y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

:r abnehmende Reihe. Die zweiten Differenzen dagegen

$$\triangle y_1,\ \triangle^2 y_2 = \triangle y_3 - \triangle y_2,\ \ldots\ \triangle^2 y_{n-2} = \triangle y_{n-1} - \triangle y_{n-2}$$

er gleich. Ferner ist z. B.

$$y_3 = y_2 + \triangle y_2 = y_1 + 2\triangle y_1 + \triangle^2 y_1$$

Für die kubische Funktion $y = a x^3 + b x^2 + c x + d$ ergibt die dritten Differenzen konstant sind und daß

$$y_4 = y_1 + 3 \triangle y_1 + 3 \triangle^2 y_1 + \triangle^3 y_1$$

ist.

Man erschließt so durch Induktion die Newton'sche Form

$$y_{n+1} = y_1 + \binom{n}{1} \triangle y_1 + \binom{n}{2} \triangle^2 y_1 + \ldots,$$

deren Allgemeingiltigkeit durch den Schluß von n auf n + 1 leicl fizieren ist.

Handelt es sich nicht um ganze rationale Funktionen, woh monoton zu- oder abnehmende Funktionen, so wird man zwar Differenzenreihe, auch wenn diese noch so hoch gewählt wird, z men gleichen Differenzen kommen, man wird jedoch einmal so renzen erhalten, die für die angestrebte Genauigkeit als konstant werden können. So erhält man z. B. für die logarithmische Funkt betrachteten Stelle:

$$\begin{array}{lll} \log. 550 = 2{\cdot}7403627 & & \\ & + 7889 & \\ \log. 551 = 2{\cdot}7411516 & & - 14 \\ & + 7875 & \\ \log. 552 = 2{\cdot}7419391 & & - 15 \\ & + 7860 & \\ \log, 553 = 2{\cdot}7427251 & & - 13 \\ & + 7847 & \\ \log. 554 \quad 2{\cdot}7435098 & & \end{array}$$

so daß die zweiten Differenzen als konstant gelten dürfen.

Bei derartigen Funktionen schreibt man die Newton'sche der Gestalt

$$y = y_1 + n \left[\triangle y_1 + \frac{n-1}{2} \left(\triangle^2 y_2 + \ldots \right) \right]$$

und beweist sie auch für gebrochene n. Ihre Anwendung ergib log. 550·28, da $n = 0{\cdot}28$, $\triangle y_1 = 0{\cdot}000788$ $\triangle y_1 = 0{\cdot}0000014$ ist:

$$\log. 550{\cdot}28 = \log. 550 + 0{\cdot}28 \left[0{\cdot}0007889 - \frac{0{\cdot}72}{2} - 0{\cdot}000001 \right]$$

$$= 2{\cdot}740362 + 0{\cdot}28 . 0{\cdot}0007894 = 2{\cdot}7405837.$$

Wir haben nun noch zu zeigen, wie durch Einführur griffes des bestimmten Integrales eine Vereinheitlichun mathematischen Kapitel erzielt werden kann. In erster Lin hier natürlich die Quadratur- und Kubaturaufgaben in Bet wird an geeigneter Stelle noch einmal auf die Bestimmur chen eines Dreieckes, eines Trapezes usw. zurückkomm lich unter dem neuen, durch den Integralbegriff gegebene punkte. Man wird also zunächst ein rechtwinkliges Dei trachten, das durch äquidistante Parallele zur Grundlinie streifen zerlegt wird, die einerseits durch Hinzufügung v rechtwinkligen Dreiecken zu Rechtecken ergänzt, andere Abschneiden kleiner rechtwinkliger Dreiecke zu solchen m werden. Durch entsprechende Zusammenfassung je zwe Rechtecke (sowohl der über das Dreieck hinausragende der innerhalb desselben liegenden) und Aneinanderlegn Paare werden zwei Flächen

$$A = \frac{x y}{2} + \frac{y \triangle x}{2} \text{ und } B = \frac{x y}{2} - \frac{y \triangle x}{2}$$

wo x die Grundlinie, y die Höhe und $\triangle x$ die Breite je

Streifen ist, erhalten, so daß also für die Dreiecksfläche f
hung gilt:

$$A > f > B,$$

$-B = y\ \Delta x$ beliebig klein gemacht werden kann. Um das
esultat zu erhalten, berücksichtigt man noch die Relation

$$A > \frac{xy}{2} > B$$

ßt sodann auf Grund des Euklidisch-Archimedischen Ver-
laß $f = \frac{xy}{2}$ ist.

nan auf diese Weise mehrere Quadratur- und Kubatur-
behandelt, so wendet man dann seine Aufmerksamkeit
formalen Seite zu, indem man die Summen
$2 + 3 + \ldots$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots$
Rede stehenden Problemen in Beziehung bringt und derart
ietisierung derselben schreitet. Man gewinnt so die Formel

$$\int_{x_1}^{x_2} x^n \, dx = \frac{x_2^{n+1} - x_1^{n+1}}{n+1},$$

st für ganze positive Werte von n gilt, der aber trotzdem
Anwendungsfähigkeit innewohnt. Aufgaben über die Qua-
Parabeln höherer Ordnungen, über den freien Fall eines
iber Trägheitsmomente usw. werden den früheren Be-
n angeschlossen, um zu zeigen, daß bei den verschieden-
emen der mathematische Gedankengang der gleiche ist.

ie vorhergehende Gleichung für beliebige Werte von n
eschlossen) Giltigkeit besitzt, ist nun noch zu beweisen.
olgt aus der Inversion der Funktionen, daß ihre Richtig-
en bleibt, wenn n irgendeinen Stammbruch bedeutet. Daß
ler Fall ist, wenn n eine negative ganze Zahl, und endlich
n irgendeine Zahl angibt, läßt sich leicht durch Zurück-
f die bereits erledigten Fälle in bekannter Weise dartun.

eser Gelegenheit ist vielleicht auch der Anlaß gegeben,
erkungen über die Klassifikation der Zahlen einzustreuen,
die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

edene Werte von p erörtert und Reihen der Form

$$\lim_{n=\infty} (1^{-2} + 2^{-2} + 3^{-2} + \ldots + n^{-2}) = \frac{\pi^2}{6}$$

eziehung setzt.

wie zu dem obigen, führen auch zu den übrigen Inte-
in der Schule zur Sprache zu bringen sind, nämlich:

$$\int \cos x \, dx = \sin x, \quad \int \sin x \, dx = -\cos x, \quad \int \frac{dx}{x} =$$

mannigfache Wege. Die meisten davon sind uns bereits b
erübrigt uns in dieser Hinsicht nur noch, die Art bekan
wie der Physikunterricht zur propädeutischen Behandl
Integrale beizutragen hat.

Die beiden ersten Integrale treten im Physikunte
erstemal bei der Eröterung der harmonischen Bewegun
werden der Reihe nach die Elongation, die Geschwindigk
Beschleunigung berechnet und hiefür aus der Kreisbe
Ausdrücke aufgestellt:

$$x = a \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad v = \frac{2a\pi}{T} \cos. 2\pi \frac{t}{T}, \quad b = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

von denen jedes nachfolgende als Differentialquotient
gehenden oder bei umgekehrter Reihenfolge als Integra
werden kann.

Das Integral $\int \frac{dx}{x} = \text{Log } x$ kommt im Physikunte
bei der Behandlung der barometrischen Höhenmessung
Es wird die Beziehung

$$x = 760\, k^y$$

wo y die Erhebung über dem Meeresniveau in m, x d
Höhe herrschenden Barometerstand bedeutet und di
$k = 0{\cdot}999875$ ist, abgeleitet und daraus für $\triangle y = 1$ m d

$$\triangle y = \frac{\triangle x}{(k-1)\, x} = 8000 \frac{\triangle x}{x}$$

gewonnen, in der „Das Gesetz des organisch
sens“ zum Ausdrucke gebracht ist: Die momentane
nahme ist dem Werte der sich verändernden Größe pro

Es braucht wohl nicht besonders hervorgehoben zu
die mathematischen Kenntnisse, die auf die angegeben
Physikunterrichte erworben werden, bei jeder sich bi
legenheit verwertet werden sollen.

3. Grundlegung der Infinitesimalrec

Die historische Entwicklung der Infinitesimalrechn
wie wohl kein anderer Zweig der Mathematik mit solc
keit den Weg, den die mathematische Begriffsbildung
Reihe von Sonderfällen weckt bei der Verarbeitung di
Geisteskräfte, durch fortgesetztes Ueben derselben w
früher ohne gegenseitige Beziehung gedachten Merkm
intuitiv als Einheit erfaßt und schließlich bewußt zum B
arbeitet.

Die Begriffe des Differentialquotienten und des Int

n Sinne nicht nur die Endglieder von Gedankenketten, sie er-
uch den Kausalnexus dieser Gedanken und sind gerade darum
Anwendungen so äußerst wirkungsvoll. Schon um den
die diesen Begriffen innewohnende Kraft, um sie neben
rdegang unserer Wissenschaft auch die Entwicklungsfähig-
selben erkennen zu lassen, ist eine systematische Grund-
ler Infinitesimalrechnung wünschenswert.

es überhaupt didaktisch verfehlt ist, den systematischen
ler Schulmathematik nach dem der Wissenschaft zu richten,
es besonders bezüglich der Infinitesimalrechnung der Fall.
nan bei der Behandlung der Voraussetzungen derselben dem
ulunterrichte folgen und den Limeskalkül als Grundlage der-
zählen, so würde man soviel Zeit und Mühe aufzuwenden
aß man zur eigentlichen Infinitesimalrechnung gar nicht käme.

len wir also auf die Einverleibung derselben in das mathe-
Lehrpensum nicht verzichten und den Aufbau doch mit
indlichkeit besorgen, so müssen wir einen Weg suchen, der
zum Ziele führt als der traditionelle. Daß es einen solchen
nn, folgt schon daraus, daß der Mittelschullehrer nicht wie
nschullehrer sämtliche Funktionen in den Kreis seiner Be-
gen zu ziehen hat (wozu man vielleicht auf den Limeskalkül
en ist), sondern nur monoton zu- oder abnehmende Funk-
der solche, die sich aus diesen zusammensetzen lassen. Daß
ein so eng begrenztes Gebiet der Forschung die wissen-
te Ausrüstung nicht die gleiche zu sein braucht wie für den
noch unbekannte Fernen zu entdecken sind, wird wohl
Zweifel gezogen.

Ausgangspunkt der systematischen Darstellung der Infini-
chnung bilden Stetigkeitsbetrachtungen, die zunächst auf
ktion fußen (z. B. Interpolationen), dann allmählich zu
ortschreiten, die Einzelprobleme der Stetigkeit betreffen
r Satz: Wächst ein Winkel eines Dreieckes, während die
enden Seiten unverändert bleiben, so wächst auch die
te desselben), um schließlich den Begriff der Stetigkeit in
lgemeinheit zu erfassen.

Definition der Stetigkeit mag vielleicht die Bolzanosche
werden: „Nach einer richtigen Erklärung versteht man
Redensart, daß eine Funktion $f(x)$ für alle Werte von x,
oder außerhalb gewisser Grenzen liegen, nach dem Ge-
Stetigkeit sich ändern, nur soviel, daß wenn x irgendein
Wert ist, der Unterschied $f(x + \omega) - f(x)$ kleiner als jede
Größe gemacht werden könne, wenn man ω so klein, als
immer will, annehmen kann."

Sätze, die daran angeschlossen werden, nämlich einerseits,
im Intervall $x_1 < x < x_2$ den Nullwert annehmen müsse,
$x_1)$ und $f(x_2)$ verschiedenes Vorzeichen haben, anderer-
$f(x)$ jeden zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ gelegenen Wert
ns einmal erreiche, wenn x die Wertereihe von x_1 bis x_2
wird man zur größeren Verdeutlichung des Stetigkeits-

begriffes wohl erwähnen, die Notwendigkeit des Beweise doch im Schulunterrichte nicht gegeben. Umso gründlicher auf die Stetigkeit der monoton zu- und abnehmenden Funkt zugehen haben. Hierin wird man (auch in der Schulma Serret-Scheffers (Lehrbuch der Differential- und rechnung) folgen können und es sei darum die betreffende angegeben:

„Wenn die Funktion f(x), während x alle des Intervalles $a \leq x \leq b$ durchläuft, be wachsend alle Werte von A bis B annimmt bei stets bestimmte endliche Werte hat, s stetig an jeder Stelle innerhalb des Inte von a bis b.

Ist nämlich $x = x_0$ irgendeine Stelle im Innern des von a bis b und $x_1 > x_0$ eine zweite solche Stelle, so bil Differenz $f(x_1) - f(x_0) = \tau$. Dann ist τ positiv. Ist nun liebig klein gewählte positive Zahl, so kann erstens Alsdann ist bereits $0 < f(x) - f(x_0) < \sigma$ für jedes x im $x_0 < x < x_1$. Ist dagegen zweitens $\tau > \sigma$, so Voraussetzung, während x alle Werte von x_0 bis x_1 $f(x) - f(x_0)$ beständig wachsend alle Zahlen von 0 bi schreiten. Für eine bestimmte Stelle $x = x_0 + h$ zwische wird daher jene Differenz einmal den Wert σ annehmen, u x im Intervalle $x_0 < x < x_0 + h_1$ ist dann wieder $0 < f(x) - f$ Betrachtet man eine Stelle $x_2 < x_0$, so findet man eben eine positive Zahl h_2, so daß $0 < f(x_0) - f(x) < \sigma$ ist i im Intervalle $x_0 - h_2 < x < x_0$.

Nimmt man nun h gleich der kleineren der beiden Za h_2 an, so ist folglich $[f(x) - f(x_0)] < \sigma$ für jedes x i $x_0 - h < x < x_0 + h$."

Der entsprechende Satz für eine monoton abnehmen $f(x)$ ergibt sich aus dem vorhergehenden, wenn man $-f$ $f(x)$ nimmt.

Aus der Stetigkeits- und der Monotonieeigenschaft d pensum zu behandelnden Funktionen läßt sich leicht die gleichung

$$\triangle f(x) = f'(x) \triangle x$$

gewinnen, als deren hervorstechendstes Merkmal zu e ist, daß sie umso genauer ausfällt, je kleiner $\triangle x$ genom

Die geometrische Bedeutung von $f'(x)$, der (erst tung der betrachteten Funktion $f(x)$, ist leicht gegeben sich nämlich das Graphikon $y = f(x)$ nicht im kontinuie sondern als Polygon, dessen Seiten dem angestrebte Genauigkeit entsprechend klein zu nehmen sind, gezeic $f'(x)$ angenähert den Richtungskoeffizienten derjenige Polygons an, deren Endpunkte die Koordinaten (x, y) u

$$(x + \triangle x, y + \triangle y)$$

besitzen. — Die phoronomische Bedeutung von $f'(x)$ ist Weise zu gewinnen.

den Uebergang von der Approximations- zur Präzisions-
ik zu vollziehen, hat man die Frage vorzulegen: Was sagt
r die Stelle x der Funktion f(x) aus? Die Antwort darauf
n, wenn man sich den Begriff der Monotonie klar macht.
se desselben ergibt, daß der Richtungskoeffizient der Tan-
Punkte (x, y) identisch ist mit der ersten Ableitung f'(x)

den schwierigen Begriff des Differentialquotienten zur
rheit zu bringen, ist es nützlich, den Schülern Auffassungen
n, die jener im Laufe der Zeiten gefunden hat. In dieser
ist namentlich das Bestreben von Lagrange erwähnens-
Infinitesimalrechnung auf algebraische Weise aus dem
entwickeln, daß jede Funktion in eine unendliche, nach
ositiven Potenzen des Arguments fortschreitende Reihe
bar ist. Die Einwände, die dagegen zu erheben sind (näm-
ler verwendete Satz in der ausgesprochenen Allgemeinheit
ewiesen ist und daß die Ableitungen so keine unabhängige
ute Erklärung finden können), fallen mehr vom Standpunkt
enschaft als von dem des Unterrichtes ins Gewicht. Für
erfolgt die Ablehnung mit der Schwierigkeit der direkten
wicklung.

besondere Förderung des Verständnisses darf man von
k der infinitesimalen Betrachtungen, wie sie in den meisten
ern vorkommen, erwarten. Es sei diesbezüglich nur an
nmliche Ableitung des Richtungskoeffizienten der Tangente
inem Punkte des Kreises erinnert. Da wird die Gleichung
te durch die Kreispunkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) derart ermittelt,
lie eine der beiden Gleichungen

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2, \quad x_2^2 + y_2^2 = r^2$$

nderen subtrahiert:

$$x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 = 0$$

n den Richtungskoeffizienten $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ durch $-\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$ aus-
en Richtungskoeffizienten der Tangente im Punkte (x_1, y_1)
uf erhalten, indem man den Punkt (x_2, y_2) in den Punkt
llen läßt. Bei dieser Ableitung übersieht man jedoch, daß
Gleichungen, die den Schlüssen zugrunde liegen, durch die
en $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ illusorisch werden.

Frage drängt sich bei solchen Beweisführungen auf, deren
tung den Schülern nicht vorenthalten werden darf: Wieso
, daß man trotz der Verwendung falscher Prämissen zu
ntigen Resultat kommt? Den hier vorliegenden Sachver-
man durch das folgende einfache Beispiel klarlegen: Wel-
t nimmt $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ für $x = 1$ an? Solange x von 1 verschieden
$\frac{1}{1} = x + 1$ der Quotient, also ebenso wie $x + 1$ genau
Für $x = 1$ dagegen ist er unbestimmt, das heißt, er kann

jeden beliebigen Wert annehmen. Nur einer davon ist mit gen Funktionswerten in inniger Beziehung: wird nur er b während die übrigen von der Betrachtung ausgeschlosse so ist die Funktion $\frac{x^2-1}{x-1}$ an der Stelle genau so stetig v Dieser ausgezeichnete Wert, der passend mit Stetigke bezeichnen ist, wird formal erhalten, wenn man Zähler u durch den gemeinsamen Faktor kürzt und erst im erha sultat die geforderte Substitution vollzieht, eine Tatsach durch den Begriff des „wahren Wertes" verdunkelt wer — Die ganze hier zum Ausdruck gekommene Gedankenf auch bestehen, wenn der Grund anzugeben ist, warum formelle Herleitung des Differentialquotienten aus dem D quotienten trotz der unrichtigen Prämissen zu einem ric sultat führt.

Von hervorragender Wichtigkeit für die Förderung ständnisses der infinitesimalen Betrachtungen ist die derselben auf physikalische Vorstellungen. In erster Li hier die Definition der Geschwindigkeit einer ungleichfö wegung in Betracht. Sie wird am besten zunächst in de schen Auffassung von L a g r a n g e gegeben und sodann gemäße Erweiterung derselben mit Hilfe des Begriffes rentialquotienten exakt formuliert. Auch sonst findet sich unterrichte häufig Gelegenheit (nämlich überall dort, wo änderungen zu erfassen sind), das Wesen des Differentia zur Sprache zu bringen. So wird man zum Beispiel die homogenen Körpers an einer bestimmten Stelle durch $\frac{}{d}$ drücken lassen und dahin erklären, daß sie so groß ist, Volumeneinheit haben würde, wenn in ihr die Masse d schaffenheit hätte wie an der betrachteten Stelle. Vo brauch des in solchen Fällen nicht zu umgehenden Irrea nicht zurückschrecken.

Worauf man bei solchen Betrachungen besonders ist, daß man zunächst den nach dem Gesetz einer ge erfolgenden Funktionsverlauf einer genauen Untersuch zieht und daß man erst dann allmählich komplizierter beziehungen in Angriff nimmt. Ist zum Beispiel den S gemacht worden, daß das Potential V, das erreicht wir ein Leiter von der Länge l mit der Geschwindigkeit c schen Feld von der konstanten Feldstärke H bewegt, d der Sekunde geschnittene Kraftlinienzahl N dargestellt w daß also $V = H c l$ ist, so wird man dann etwa von d der Geschwindigkeit absehen, oder man wird H verä nehmen (etwa derart, wie es beim einphasigen, harmoni selstrome der Fall ist), um so allmählich die Bedeutu chung $V = \frac{dN}{dt}$ zu gewinnen.

ıer war nur von expliziten Funktionen die Rede. Welchen hat man nun bei impliziten Funktionen einzuhalten? Ver- re es, den Weg einzuschlagen, der in einem Lehrbuch ge- wird, wo es bezüglich der Gleichung

$$2x\triangle x + \triangle x^2 + 2y\triangle y + \triangle y^2 = 0$$

Gehen wir nun von den „endlichen" Größen $\triangle x$, $\triangle y$ zu endlich kleinen" Größen dx, dy über, das heißt, lassen wir chbarpunkt" mit dem gegebenen Punkte (x, y) zusammen- o verschwinden die Quadrate der Differentiale vollständig ede Vernachlässigung!)" usw. Die Schüler werden sich um einreden lassen, daß $dx^2 = 0$ und doch dx von Null den ist.

können auch der im allgemeinen empfohlenen Methode, die n Funktionen in explizite zum Zwecke der Ermittlung des ialquotienten zu verwandeln, nicht zustimmen. Wir sind den Weg, der direkt zum Ziele führt, wenn er nicht be- cher ist als die übrigen. Daß es einen solchen gibt, ist in on wiederholt genannten Lehrbuche der Elementarmathe- zeigt.

einer Frage der Methodik der Differentialrechnung haben Stellung zu nehmen: Sollen in der Schule auch Funktionen ktionen zur Sprache kommen? Unser Lehrplan spricht sich aus, aber, wie es scheint, nur deswegen, weil er an allge- Funktionen von allgemeinen Funktionen denkt. Die en von Funktionen schlechthin aus dem Schulpensum verban- ollen, geht wohl, wie schon die einfachen Beispiele $(1 + x^2)$, $\overline{x^2}$, $\sin\frac{2\pi t}{T}$ zeigen, nicht an, ist aber auch nicht notwendig,

e Behandlung keine besonderen Schwierigkeiten aufweist, ie Schüler zu dem Rechnungsgang angehalten werden, wie en folgenden Gleichungen zu ersehen ist:

$$\triangle(1+x)^2 = 2(1+x)\triangle(1+x) = 2(1+x)\triangle x,$$

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\triangle(1-x^2) = -\frac{x\triangle x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\triangle\sin\frac{2\pi t}{T} = \cos\frac{2\pi t}{T}\triangle\frac{2\pi t}{T} = \frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi t}{T}\triangle t.$$

anderen als diesen durch die vorstehenden Beispiele cha- erten Funktionszusammenhängen kommen für den Schul- t nur höchstens noch die Logarithmen der goniometrischen en in Betracht, und zwar einzig aus dem Grunde, um den die Beziehungen zwischen den Zuwächsen der gonio- en Funktionen und denen der Logarithmen derselben (zum $\triangle\log\sin x = \frac{\triangle\sin x}{\sin x}$) zur Kenntnis zu bringen.

rübrigt uns noch, einige Bemerkungen über den Aufbau der echnung vorzubringen. Man muß vor allem darauf bedacht

sein, die Gedanken herauszuarbeiten, daß die Integralauf
denen aus dem Elementargesetz das Gesamtgesetz zu fin
formaler Hinsicht darauf hinauslaufen, Funktionen zu fin
Differentialquotient bekannt ist, während in materieller H
Aufstellung des bestimmten Integrales in Betracht ko
Frage, ob zunächst das unbestimmte oder das bestimmt
zu behandeln ist, ist im Hinblick auf den früher skizzier
deutschen Unterricht dahin zu beantworten, daß das Inte
die inverse Operation des Differenzierens zu lehren ist.
man den Begriff des unbestimmten Integrales festgelegt u
fachsten Eigenschaften desselben aufgezeigt hat, wird n
gehen, zu zeigen, daß die Exhaustionsmethode (im weite
und die Tangentenaufgabe aus dem Grunde invers sind
Differentialquotient der Fläche, welche von den Koordina
der Schaulinie und der abschließenden Ordinate begrenzt v
letzteren gleich ist.

Besonders hervorzuheben ist noch, daß unsere Auff
Differentiale nichts von den Schwierigkeiten weiß, die b
erkennung des Limeskalküls der Einführung des Integ
entgegenstehen. Um dieselben einigermaßen zu charakteri
die diesbezügliche Darstellung von Czuber (Einführ
höhere Mathematik) angeführt: „Die begriffliche Bede
selben (des Differentials in $df(x) = f'(x)\,dx$ .... 1)
daß es die Aenderung, welche die Funktion bei dem Uebe
x zu $x + dx$ erleidet, umso genauer darstellt, je klein
ja daß man durch Einschränkung von dx den Unterschie
der Aenderung der Funktion und ihrem Differential nicht n
sondern auch im Verhältnis zu dx beliebig klein machen

An dieser Stelle möge auf die Verschiedenheit der
hingewiesen werden, welche den Zeichen dx und dx
Gleichung (1) einerseits und in dem Leibnizschen Syn
Differentialquotienten $\frac{df(x)}{dx}$ andererseits zukommt. Hi
dx und $df(x)$ zugleich gegen die Grenze Null konvergie
unendlich klein werdende Größen und
$\frac{df(x)}{dx}$ selbst den Grenzwert ihres Quotienten; dort b
eine endliche und $df(x)$ eine dem dx proportionale
etwa x und $f(x)$ selbst.“ Es ist hier nicht der Ort, au
dieser Ausführungen einzugehen, nur soviel sei bemerkt, da
Mittelschüler nicht unter dx bald eine endliche, bald ein
klein werdende Größe verstehen können, ganz abgesehen da
ihnen das Werden einer Größe so lange unverständ
muß, solange man die Elementarmathematik unabhängig
entwickelt.

Was die Grundlegung der Integralrechnung in un
anbelangt, so brauchen wir hier nicht näher darauf einz
sie in dem öfter zitierten Lehrbuche zu finden ist.

SCHULNACHRICHTEN.

I. Lehrplan.

Obligate Lehrgegenstände.

richt wurde nach dem Normallehrplan vom 8. April 1909 erteilt.*)

Stundenübersicht.

hrgegenstände	I.	II.	III	IV.	V.	VI.	VII.	Summe
. . . . .	2	2	2	2	2	2	1	13
e Sprache	4	4	4	4	3	3	4	26
sche Sprache	6	5	4	4	3	3	3	28
e Sprache	—	—	—	—	3	3	3	9
ıte	2	2	2	2	3	2	3	16
hie	2	2	2	2	1	1	—	10
ıtik	3	3	3	4	4	I.Sm.4 II. „ 3	5	26 (25)
chichte	2	2	—	—	2	I.Sm.2 II. „ 3	3	11 (12)
. . . . .	—	—	—	3	3	2	—	8
. . . . .	—	—	3	2	—	4	4	13
isches Zeichnen . . .	—	2	2	3	3	3	2	15
zeichnen	4	4	4	3	3	2	3	23
ıreiben	1	—	—	—	—	—	—	1
. . . . .	2	2	2	2	2	2	2	14
Summe . . .	28	28	28	31	32	33	33	213

—

vollständige Abdruck dieses Lehrplanes für Realschulen ist im k. k. Schulbücher-Preise von 30 h erhältlich.

Unobligate Lehrgegenstände.

ie in 2 Abteilungen zu je 2 Stunden wöchentlich (IV.—VII. Kl.).
3 Abteilungen zu 2, 1 und 1 Wochenstunde.
Uebungen im chemischen Laboratorium in 2 Abteilungen zu je 2 Wochenstunden.
he Schülerübungen in 4 Abteilungen zu je 2 Wochenstunden.
nschaftliche Schülerübungen in 2 Abteilungen zu je 2 Wochenstunden.

Themen für die deutschen Aufsätze.

1. Wie ich mir meinen künftigen Beruf, seine guten und bösen Seiten vorstelle. (H.) — 2. Die Sprache gewährt uns manchen Einblick ins Völkerleben. (Im Anschluß an die Einleitungsvorträge zur Literaturgeschichte.) (S.) — 3. Das Meer im Leben der Völker. Auszug aus dem Lesestück Nr. 31. (S.) — 4. Das Feuer im Dienste der menschlichen Kultur. (H.) — 5. Unsere körperliche Ausbildung in ihrer Abhängigkeit von den Jahreszeiten, von unserem Wohnsitz, unseren Geldmitteln, unserer verfügbaren Zeit, unseren besonderen Bedürfnissen und Neigungen und den gebotenen Gelegenheiten. (S.) — 6. Parzival. (S.) — 7. Von nützlichen und unnützen Dingen. Ein Gespräch. (Im An-

schluß an Les choses inutiles von Souvestre.) (H.) duhten sich ze nihte, Si schüefen starc gerihte. S künege unde reht, Sie setzent herren unde kneht. (d. Vogelweide.) (S.) — 9. Die Schule will uns nicht bl bieten, sie will auch unser Denkvermögen anregen An einzelnen Gegenständen zu zeigen. (H.) — 10. a) der deutschen Literatur der höfischen Blütezeit mi Reformationszeitalters. (Soziale Grundlagen, Liter Publikum, Stil und vorherrschende Gattungen.) (S.) des Naturfreundes. (S.) Dr. W. M. Feichtinger. (Na

VI. Klasse. 1. Christus wird vom hohen Rate zum Tode verurte 2. Inhaltsangabe der Auftritte 6—12 des ersten Au Minna von Barnhelm. (H.) — 3. a) Drei Soldaten (Nach Lessings Minna von Barnhelm.) b) Unsere Wahl.) (S.) — 4. Der Zerfall der Reiche Karls des G Napoleons I. (Eine geschichtliche Parallele nach Th 5. Der Fall Trojas. (Nach Virgil, übers. von Schill 6. Rousseau's Gedanken über das Landleben. (S.) — 7 das ich mit besonderem Interesse gelesen habe. (H.) - Uebergang vom Mittelalter zur Neuzeit. b) Eine edl gabe ist das Licht des Auges. (Schiller.) (Nach Wa. 9. Tells Anteil am Befreiungskampfe der Schweiz Schillers Tell.) — 10. Die Wärme als Energieform.

Ph.

VII. Klasse. 1. Die Mutter der nützlichen Künste ist die Not. (H Charakterbild Medeas aus Grillparzers Drama: „D Vließ." (S.) — 3. a) Die Geschichte, ein Bildungsm welcher Beziehung kann man unser Zeitalter da nennen? (S.) — 4. Ringe, Deutscher, nach römische griechischer Schönheit! — Beides gelang dir, do gallische Sprung. (Schiller.) (H.) — 5. Welchen Be Schiller selbst zur Verwirklichung seines Gedanke Schaubühne eine moralische Anstalt sei? (S.) — (Ein Charakterbild.) (H.) — 7. a) Licht- und Schatt Romantik. b) „Teuer ist mir der Freund, — Doc Feind kann ich nützen: — Zeigt mir der Freund, w — Lehrt mich der Feind, was ich soll. (S.) — 8. D Moment im „Meineidbauer". (H.) — 9. Ein Verglei den österreichischen Alpen und den Karpathen. (S.)

Dr. Hugo (o

II. Lehrmittelsammlungen.

Die Unterrichtsbehelfe haben im Schuljahre 1910/11 nach zeichnete Vermehrung erfahren:

1. Lehrmittelsammlung für Erdkunde und Gesch

a) **Ankauf:** Kiepert, Formae orbis antiqui (Fortsetzu 12 große und 50 kleine Photographien von Italien durch Brog — Droysen, Allgem. historischer Atlas. — Bilder: 1. Tisch in der Campagna. 2. Der Römer in Frankfurt. 3. Bismarckdenkm burg. 4. Der Dom in Mainz. 5. Der alte Dovenfiet in Hamburg. und 20 kleinere geograph. Bilder aus den Alpen. — 10 Spezialka Wald), 1 Zeichenschlüssel hiezu.

b) **Geschenke:** 24 Photographien aus Oesterreich-Ungar händler v. Hölder.) — Volksbücher der Kunst: Dürer und Tizi Dr. Schloegl). — Simony, Das Dachsteingebiet (Dr. Schloe meine Erdkunde in Bildern, 1. Teil (Dr. Schloegl). — Artaria karte von Oesterreich-Ungarn (Dr. Schloegl). — 4 Photogra

Wunderbaldinger, IV a). — 6 künstlerisch ausgeführte Plakate der . Staatsbahnen (Kohn, IV a).

ülerarbeiten: Darstellung der Hauptindustriegebiete Oesterreichs Prowaznik, VII. und Ehrmann, V), der Bodenkultur und des der Monarchie (Hofbauer und Ostersetzer, IV b), die Höhen- es Ortlers, 2mal (Hofbauer und Stenitzka, IV b), das europäische r (Stenitzka, IV b), Florenkarte von Oesterreich-Ungarn, 2mal V a und Hofbauer IV b).

Verwalter: Prof. Dr. Robert Schloegl.

2. Naturhistorische Lehrmittelsammlung.

f: Schädel vom Rind, Pferd und Schwein. — 2 Mikroskope. — enner, 1 Bunsenbrenner, 1 Teclubrenner, 2 Vollpipetten, Uhr- ierpapier, verschiedene Reagentien und Verbrauchsgegenstände.

enke: Eidechseneier (Pawlíček Rudolf, VI), Aquarium (Hofbauer V), 2 kleine Aquarien (Landesberger Alfred, IV).

3. Physikalische Lehrmittelsammlung.

f: 1 Sphaerometer, 1 Differential-Flaschenzug, 1 Wellrad, nmodelle, 4 Kreisel mit Nebenapparaten, 1 Dezimalwagenmodell, che Presse, 1 Apparat zur Fortpflanzung des Druckes, 1 Auf- t, 1 Torricellische Röhre (graduiert, mit Stahlhahn), 1 analyti- chtssatz, 2 Astbestplatten, 1 Eternitplatte, 4 Meßzylinder, Filtrier- Pulvergläser, 2 Spiralen, 1 Quecksilber-Tropfläschchen, 5 Zinke, nd 5 Klemmen für Leclanché-Elemente, 200 Etiketten, 100 Stück g Gummistöpsel, 250 g Gummischläuche, 1 Wasserkübel, 5 Opo- er, 10 Reagenzflaschen, 1 Gummiplatte, 1 Maßstab auf Eisenfuß 1 Heberbarometer, 1 Brücke zu Kolbes Elektroskop, 1 Bunsen- Max.- und Min.-Thermometer, 1 Stativ mit schwerem Eisendrei- kengestell, 4 Eprouvetten, 4 Glasröhren, 1 Flasche Ketonblau, mit Reibzeug, 1 Ebonitstab mit Reibzeug, 4 Salze für Kälte- , 1 Messingstab mit Glasgriff, 1 Daniell-Hygrometer, 1 Glas- aschen mit flachem Stöpsel, 3 einfache Rollen aus Messing mit Cartesianischer Taucher, 1 Maßstab mit Halter für 2 Röhren, mit Trichter für Seitendruck, 10 g Fuchsin, 1 kleiner Fülltrichter, , 1 Eichenbrett für die Luftpumpe, 1 Katzenfell, 1 kg Quecksilber, zum Filtrierstativ, 1 Metronom, 1 Apparat zur Erläuterung der eise des Telephons, 9 Paar Leitungsschnüre, verschiedene Drähte.

e physikalischen Schülerübungen wurden angekauft:

metrische Körper von verschiedener Größe aus verschiedenen 0 Metallwürfel von 1 cm Seitenlänge, 1 Magnetnadel auf Stativ, ieter nach Weber, 2 Stabmagnete in Etui, 2 Schublehren, Stan- elapparate, 2 Gewichtssätze mit Häkchen, Coconfäden, 1 tech- e, 1 Stoppuhr, 1 hydrostatische Wage, 1 Gewichtssatz, 3 Stahl- efäße mit Ausflußrohr, 1 Tangentenbussole, 1 schiefe Ebene aus olz, 1 Flaschenzug auf Gestell, 1 Siegellackstange mit Reibzeug, stange, 1 Doppelpendel, 2 zylindrische Konduktoren, 1 Spitzen- parat, 1 Elektrophor, 1 Lanesche Flasche, 1 Quadrant-Elektro- niversalstativ, Hollundermarkfiguren, 1 Pendelappart, 1 Kugel- aufende Metallkugel, 1 Motor für Influenzelektrizität, 1 Volta- uenzmaschinen, 3 Konduktorkugeln, 1 Volta-Element, 2 Daniell- Unterbrechungsrädchen, 1 Bussole, 1 Demonstrations-Vertikal- , 1 Wasserzersetzungsapparat, 1 elektrolytischer Apparat, astischer Apparat, 1 Galvanoskop, 1 Spiegelsextant, 1 Spektro- atindrähte, 9 Metallsalzlösungen für Spektralversuche, Asbest- holsonsche Senkwage, 1 Morse-Taster, 1 Morse-Schreibapparat, ren, 3 Gummistöpsel mit je 2 Löchern, 50 angefüllte Thermo- , 6 Thermometer, 3 Stativringe, 5 Uhrgläser, 4 Sätze Becher- eßzylinder, 2 Standzylinder, 4 Pyknometer, Millimeterpapier,

Kartonpapier, 1 Blechtopf, 40 Stricknadeln, 80 Zeichenblätter, 660 g Kapillarröhren, Spiegelglas, verschiedene Chemikalien und drähte.

Geschenk: 1 Eisklopfer (Engel, III a).

Verwalter: Prof. Jos. E

4. Lehrmittel für Geometrie.

Ankauf: 1 Würfel, 1 gerader Zylinder, 1 Doppelkegel schnitten. Verwalter: Prof. Ernst S

5. Lehrmittel für Chemie und Mineralogie.

Ankauf: Chemie: 1 Platintiegel samt Deckel, 1 Plati 1 Trockenapparat mit Habermann'schem Hahn, 1 Apparat für mung der Dampfdichte nach Viktor Meyer, 2 Universalverbrenn 1 Nemetz'sche Anlysenwage mit $^1/_{10}$ mg Empfindlichkeit und 2 kraft, 1 Funkeninduktor mit Deprez- und Platinunterbrecher, 1 P halbschattenapparat nach Schmidt und Haensch mit 4 Beobach mit Beleuchtungslampe und ringförm. Salzbehälter aus Platin, Gebläse mit Vakuummeter, 1 Handwage mit Neusilberbalken, 1 Gewichtssatz für die Analysenwage, 1 Universalstativ aus 3 Universalstative aus Eisen, Sicherheitsvorrichtung zum Erhit fährlicher Flüssigkeiten, 1 Apparat zur Darstellung von Aethe apparat nach Liebig und Geißler, 8 Spektralröhren (N, H, O, Cl, A) und 1 dazugehöriges Stativ, 1 Wasserstrahlpumpe aus Gla Gasbrenner mit Zündflamme, 1 signierte Flasche für destillier 6 Stück flexible Kabel, 2 Holzformen für festes CO_2, 2 Dewar' 1 Dewar'scher Zylinder und 1 Dewar'sche Schale, 7 Meßzylinder gestell aus Holz, 2 Wasserbäder aus Kupfer mit verstellba 1 Eprouvettengestell für 12 große Eprouvetten, 2 Kipp'sche lungsapparate, 1 Waschflasche, 3 Chlorkalziumzylinder, 2 Wo schen, 1 signierte Flasche für Methylalkohol, 2 pneumatisc 1 dreiflammiger Brenner mit Hahn, 1 Brenner mit Sparflamm 28 Stück Berliner Abdampfschalen, 16 diverse Glaszylinder, halter aus Holz, 6 Holzkasten, 4 Eternitplatten.

Für das Schülerlaboratorium:

75 Reagentienflaschen mit Emailsignatur, 4 Rahmen, 4 mit Milchglasskala, 6 Stative mit Eisenplatte, 10 Drahtnetzen decke, 10 Glasplatten, 8 Bürettenklammern, 3 Glaswaschflasch schlauch, 54 Bechergläser, 25 Glasstäbe, 40 Kochkolben, 42 Filtriertrichter, 36 Erlenmeyerkolben, Glasröhren aus hartn chem Glas, Kautschukschläuche, Kautschukpfropfen, Korke, Re parate, destilliertes Wasser und andere Verbrauchsgegenständ

Mineralogie: Melanit-Schwarzenstein, Spargelstein-Ill suvian-Canzocoli, Cerussit-Mies, Klinochlor-Rotenkopf, Heliotr kiesel-Gümela, Fahlerz-Kapnik, Orthoklas-Val Floriana, Granat kristall-Prägratten, Wulfenit-Schwarzenbach, Eisenglimmer Rötel-Vashegy, Bornit-Redruth, Molybdänit-Kanada, Perikl Albit-Amelie-County, Avanturinquarz-Ceylon, Fluorit-Zinnwald Bühl, Auripigment-Tajowa, Realgar-Binnental, Hyalith-Walsh Geyser, Eisenblüte-Eisenerz, Arsenkies-Mitterberg, Arsenies Achatgeode-Oberstein, Gem. Opal-Telkebanya, Feueropal-Pier opal-Barcon River, Sphaerosiderit-Felsobanya, Speckstein un sedel, Festungsachat-Uruguay, Zinkspat-Altenberg, Epidot-na Kupfer-Lake superior.

Geschenke: Von Prof. Dr. Hugo Grohmann 1 Seri Mineralstufen von Hüttenberg in Kärnten (Spateisenstein, Chalzedon, Baryt, Wad, Löllingit und Vierlinge des Kalzits). — Diewald der VI. Klasse 16 Schachteln für Lötrohre.

Verwalter: Prof. Franz Neu

6. Lehrmittel für Freihandzeichnen.

auf: 1 Messingkessel, 1 Kupfergefäß mit Handgriff, Wandtafeln für rne Schrift (Lebeda), Künstlerkarten, Ornamentvorlagen (Jiranek), :rwaffen, Steinzeichnungen (Schiller und Goethe), Vorlagsblätter, ·tock, Ton- und Steingutgefäße, Bargue und Gérome: figurale Vor- r, Landschaftliche und figurale Vorlageblätter Rothmann-Gérome, ıchter.

:henke: I b-Kl.: Bettelheim: Bücher und Blumentöpfe. — Fiedler: zum Aufmotieren. — Glaß: Schnecke, Muscheln, Glasobjekte. — zum Aufmontieren. — Dorfmeister: Schnecken und Muscheln. — lampel: Werkzeuge. — Jägersberger: Schmetterlinge, Schachteln, te. — Ludwig: Glasobjekte. — Skalitzky: Wachtelkönig. — Winter: Schnecken und Muscheln. — IV b-Kl.: Schild: 1 Relief- ɔtenmaske, 3 Hände, 1 Kinderhand, 1 Fuß, alles aus Gips (Natur-

Verwalter: Prof. Hugo Soyka.

eräte für den Turnunterricht und die Jugendspiele.

ıuf: 1 Barren, 2 Pferde, 1 Eisenwürfel (15 kg), 4 Stück Eisen- 10 kg, 1 Eisenkugel (5 kg), 1 Ger (2 kg), 1 Schleuderball (2 kg), älle, 1 kleiner Vollball, 2 große Vollbälle à 1·5 kg, 1 Faustball, 0 m), 1 Diskus (2 kg).

Verwalter: Turnlehrer Josef Müller.

8. Lehrmittel für den Gesangunterricht.

) autogr. Abzüge für gemischten Chor von: „Gebet für unsern ɔn Karl Hennig; „Dem Kaiser" von K. Zelter; je 20 autogr. für Tenor und Baß zu „Oesterreich, mein Vaterland"; 25 Parti- Kirchengesangbuche von König, Preiß und Heitger.

Verwalter: Rud. Hanke.

III. Bibliothek.

a) Lehrerbibliothek.

I. Zeitschriften.

uf: Zeitschrift für französische Sprache und Literatur, Bd. XXXV. rift für das Realschulwesen, Bd. XXXVI. — Zeitschrift für latein- e Schulen, Bd. XXII. — Zeitschrift für österreichische Gymnasien, — Zeitschrift für Schulgeographie, Bd. XXXII. — Die neueren Bd. XVIII; Ergänzungsband: Festschrift für W. Viëtor. — Zeit- den physikalischen und chemischen Unterricht, Bd. XXIV. — gen zur Didaktik und Philosophie der Naturwissenschaft, Bd. I. h der Radioaktivität und Elektronik, Bd. VII. — Oesterreichische , Bde. XXIV und XV. — Sprachwissenschaft für alle, Bd. III. — des allgemeinen deutschen Sprachvereines, Bd. XXVI. — Ger- manische Monatsschrift, Bd. III. — Chemiker-Zeitung, Bd. XXXV. ıngen der k. k. geographischen Gesellschaft, Bd. LIV. — The :cho, Bd. XIII. — Das literarische Echo, Bd. XIII. — L'Echo Bd. XXX. — Physikalische Zeitschrift, Bd. XII. — Zeitschrift für k und Physik, Bd. LIX. — Petermans Mitteilungen, Bd. LVI.

2. Werke.

uf: Bornecque, Questions d'Enseignement Secondaire. — Deutsche Bühnenaussprache. — Bornecque-Röttgers, - Saar, Sämtliche Werke. — Shakespeare's sämtliche ers. v. Schlegel und Tieck. — Büchmann, Geflügelte Worte.

— Glanning, Didaktik und Methodik des englischen Unter
Münch, Didaktik und Methodik des französischen Unterrichts.
heineke, La Classe en français. — Eberhard, Synonymisc
wörterbuch. — Borinski, Lessing. — Bürkner, Herder. —
lin, Die deutsche Sprache der Gegenwart. — Reum, Petit D
de Style. — Andree, Geographie des Welthandels. — Hann,
der Klimatologie. — Ratzel, Anthropogeographie. — Philip
Grundriß der politischen Oekonomie. — Hilbert, Grundlagen
metrie. — Nernst-Schönfließ, Mathematische Behandlun
turwissenschaften. — Lorentz, Differential- und Integralrec
Burkhardt, Differential- und Integralrechnung. — Lurot
sches Rechnen. — Schwering, Handbuch der Elementarmath
Blaschke, Mathematische Statistik. — Pitzker, Elementarr
— Henrici, Elementargeometrie. — Enriques, Elementa
— Holzmüller, Ingenieurmathematik. — Klein, Elemen
matik. — Thieme, Elemente der Geometrie. — Nielsen, Le
unendlichen Reihen. — Scheindler, Verhandlungen der IV.
der Direktoren (2 Exemplare). — Enquete für körperliche Er
Jahrbuch des höheren Unterrichtswesens 1911. — Krebs, Das
Betriebssystem für Schulsparkassen.

Geschenke: Dannemann, Der naturw. Unterricht aufp
heurestischer Grundlage (k. k. Min. f. K. u. U.). — Pötzl,
Skizzen. (k. k. Min. f. K. u. U.). — Rieger, Das Deutschmei
(Magistrat der Stadt Wien). — Geschichtslügen. — Kellner,
gogik der Schule und des Hauses (Dr. H. Grohmann).

Verwalter: Prof. Ph. Gal

b) Schülerbibliothek.

Ankauf: Anzengruber, Der Meineidbauer. — Bars
vellen. — Björnson, Synnöve Solbakken. — Cooper, De
Der letzte Mohikaner. — Dahms, An der See. Geologisch-geg
Betrachtungen. — Daiber, Vom Mars zur Erde. — EbnerE
bach, Der Kreisphysikus. — Erckmann-Chatrian, Gesch
Soldaten im Jahre 1813. — Fraungruber, Oesterreichs
Hansjakob, Aus meiner Jugendzeit. Wilde Kirschen. Aus
dienzeit. Schneeballen I. und II. Reihe. — Hebbel, Agnes
Heim und Herd, I. und II. Teil. — Hennig, Buch berühmter
— Heyse, Andrea Delfin. — Kolten, Das Polarschiff. —
Kronprätendenten. — Der Deutsche Jugenfreund, II. und
— Keferstein, Große Physiker. — Kettner, Bergmans
Kingsley, Die Wasserkinder. — Kleinpaul, F. Cortez, d
von Mexiko. — Kraepelin, Naturstudien in fernen Zonen. —
bilder der Jugend. Artoria. — Ludwig, Der Erbförster
Francisco Pizarro und die Eroberung von Peru. — Meiste
schollene Schiff. — Nieritz, Der Dorfschulmeister. — Nor
germanische Götter- und Heldensage. — Saar, Innocens. —
cher, Ein fester Wille. — Smolle, Tegetthoff, ein Held u
Stitter, Der Hochwald. — Thackery, Rose und Ring. —
Lorenz Baumgartner, ein bairischer Held. — Thiele, Die
Wien. — Ulrich, Auf der Grimsel. — Neues Universum

Geschenke: Arndt, Sagen und Schwänke von Rübez
recht, Das goldene Buch der Jugend. Andersen, Ausgewäh
— Bendel, Erzählungen aus dem Leben der Vögel. (Bo
Byron, Childe Harolds Pilgrimage. (Prof. Dr. Grohmann.).
Der Wildtöter. (Kohn Hugo Ia.) — Erckmann-Chatria
(Bettelheim Ib.) — Grimm-Bechstein, Deutsche K
(Borel IVa.) — Grimm, Sagen und Märchen aus der H
Griechen und Römer. (Prof. Dr. Grohmann.) — Hauff, In
(Oberhauser Ia.) — Hoffmann, Neuer deutscher Jugendf

)er Fliegende Holländer. (v. Nagy V.) — Jacobi, Onkel Toms Nagy V.) — Das Buch der Jugend. (Borel IV a.) — Loreau,)eurs de rochers. — Lohmayer, Deutsche Jugend. — Meinchhausen. — Moritz, Der schweizerische Robinson. (Borel lière, Les oeuvres de Molière. (Prof. Dr. Grohmann.) — Mme. r, Le Général Dourakine. — Schmid, Das alte Raubschloß. — der junge Einsiedler. (Borel IV a.) Sophokles, übersetzt von Prof. Dr. Grohmann.)

Verwalter: Prof. Dr. Hugo Grohmann.

IV. Reifeprüfungen.

Sommertermin 1911.

Themen für die schriftlichen Reifeprüfungen.

Deutsche Sprache.

(Zur Auswahl.)

elchen Einfluß haben die klimatischen Verhältnisse Oesterreichs :ben und die Kultur seiner Bewohner?
ohl stürzt, was Macht und Kunst erschufen,
ie für die Ewigkeit bestimmt,
ch alle Trümmer werden Stufen,
orauf die Menschheit weiterklimmt.
e Bedeutung der technischen Errungenschaften unserer Zeit für ellen und geistigen Interessen der Menschheit.

Französische Sprache.

leux frères (D'après le texte français lu par le professeur).

Englische Sprache.

music drama von George Lilley in The Contemporary Review.

Darstellende Geometrie.

n senkrechter Zylinder ($r = 2{\cdot}5$ cm, $h = 8$ cm, O [— 4, 8, 0]) :u. Auf demselben liegt zentrisch eine zylindrische Platte ($r_1 = 3$ cm) und auf dieser eine regelmäßige sechsseitige Platte von e und 6 cm Seitenlänge. (Eine Basiskante sei parallel zu π_2.) e sämtliche Schatten, wenn die Projektionen des Lichtstrahles :hse 45° einschließen.

f einem geraden Kegel, dessen Basis in π_1 liegt, soll der geo-Ort jener Punkte dargestellt werden, welche von den Punkten 3) und B (+ 3, 6, 10) gleich weit entfernt sind. (Mittelpunkt des : O (— 3, 7, 0), Radius $r = 5$ cm, Höhe $h = 10$ cm).
nstruiere eine Kugel, welche durch die Punkte A (— 6, 10, 2), 8) geht und deren Mittelpunkt auf der Geraden g [P (— 5, 8, 0), 10)] liegt.

nündlichen Reifeprüfungen finden vom 12.—15. Juli 1911 unter :ze des Herrn k. k. Realschuldirektors Adolf Pokorny statt.

V. Unterstützungswesen.

A. Stipendien.

Schüler befand sich im Genusse einer Joachim Winternitzschen ftung von 360 K, ein Schüler war im Genusse der Wilhelm

Bücherschen Stiftung für Waisenknaben im Betrage von 900
Schüler wurde ein Graf Windhagsches Stipendium in Betrage v
einem ein Ritter von Lucamsches Stipendium von 400 K verlie
Schüler erhielten je eine Ettel Goldschmidtsche Stiftung von 1
Schüler stand im Genusse eines Handstipendiums von 200 K aus
fällsstrafgelderüberschüssen.

Summe der Stipendienbeträge 2690 K.

B. Schülerlade.

Einnahmen:

Interessen	K
Spende der israelitischen Kultusgemeinde Wien	„ 1
Ueberschuß von einer Prüfungstaxe	„
Spende des Herrn Johann Rys, Fabrikanten	„
Ueberschuß vom Schülerausflug der III b Klasse	„
Anderweitige kleinere Spenden	„
Von den Schülern*) der Anstalt, und zwar:	
I. Klasse A	„ 7
I. Klasse B	„ 7
II. Klasse A	„ 5
II. Klasse B	„ 6
III. Klasse A	„ 6
III. Klasse B	„ 1
IV. Klasse A	„ 1
IV. Klasse B	„ 9
V. Klasse	„ 8
VI. Klasse	„ 7
VII. Klasse	„ 4
Summe	K 2

Ausgaben:

Für den Ferienhort der Bezirksgruppe Alsergrund	K 0
Für den Ankauf von Büchern bei Hölder (10%)	„ 3
Für den Ankauf von Büchern bei Felizian Rauch (10%)	„ 5
Unterstützung von Schülern bei Ausflügen	„ 9
Beitrag für 1 Schüler für Schülerübungen	„ 3
Für Porti und Trinkgelder	„ 1
Summe	K 52

Vermögensstand am Schlusse des Schuljahre

Einnahmen	K 822
Ausgaben	„ 762
Ueberschuß	K 59
Barvermögen von 1909/10	K 2071
Barvermögen am Schlusse des Schuljahres 1910/11	K 2131
Davon sind in der k. k. Postsparkasse	K 21
Davon sind in der Währinger Sparkasse	„ 2109
Kassarest	K —

In diesem Jahre wurden auf Kosten der Schülerlade 119 Sch
Anstalt 1017 Lehrbücher, ebenso anderweitige Lehrmittel, als: Re
Reißbretter, Reißschienen etc. sowie Turnschuhe zur Verfügun ge

Bücherspenden:

K. k. Schulbücherverlag	50 Bän
Firma Alfred Hölder	32 „
„ A. Pichlers Witwe & Sohn	26 „
„ F. Tempsky	16 „
„ F. Deuticke	21 „
„ Ed. Hölzel	11 „
„ C. Gerolds Sohn: 3 Bde. Wretschko-Heimerl	Ve

der Botanik.

ıso erfolgten auch Bücherspenden von einigen Professoren und der Anstalt.

unterzeichnete Verwaltung spricht allen Gönnern der Schülerlade sten Dank für das derselben erwiesene Wohlwollen aus und bittet, ukunft des humanitären Werkes zu gedenken.

nel, E. Schmidt, Rechnungsprüfer. F. Pejscha, k. k. Direktor. F. Engel, Verwalter.

ın den Schülern der Anstalt, und zwar:

asse A (37·40): Klein, Kohn, Korisko, Sernetz je K 2·—; Deutsch irmann K 1·70; Kovař K 1·40; Braun K 1·30; Damaschke, Lipa, , Wiberal je K 1·20; Heß, Schreiber je K 1·10; Fischer, Handowsky, Löscher, Oberhauser, Pribitzer, Seltenwert, Spitz je K 1·—; No- K —·70; Brandmann, Krzywon, Prenosil, Schüller K —·60; zar, Szilagyi je K —·50; Veit K —·40; Diamant, Jansky je K —·30; -·20.

asse B (K 37·20): Hütter, Necker je K 3·—; Aigner, Hořicky, K 2·—; Böhm, Bombach, Chlamtatsch, Dorfmeister, Drößler, Ferter, Glaß, Holl, Jontof, Leschner, Napravnik, Ritz, Schlanger, Schodl, hel je K 1·—; Adler, Heinl, Hutter je K —·80; Bettelheim, Schrom ; Katz J., Katz M., Montag je K —·50; Lerchner, Marbach je nbenannt K 2·30.

asse A (K 55·—): Wagner K 10·—; Negedly K 7·— ; Weiß K 4·—; in, Eckstein, Friedrich je K 3·—; Arlt, Beer, Gelles, Pazdernik, e K 2·—; Antal, Březina, Frucht, Görlich, Herzl, Hörner, Huber, učera, Leskovar, Nedwidek, Spielmann je K 1·—.

asse B (K 56·60): Morgenstern K 5·—; Hampel K 3·60; Hofmann, Schöchl. Weiß Theodor je K 3·—; Fuchs, Jägersberger, Ludwig, K 2·—; Machata, Wolf je K 1·50; Beran, Eckstein, Epstein, Foller, r, Gebauer, Giebner, Glauber, Goldnagel, Haunzwickl, Herrn- rand, Klein, Krasny, Malirsky, Marschall, Pulgramm, Reininger, chönwaitz, Singer, Skalitzky, Streit, Türk, Weiß Samuel je K 1·—.

lasse A (K 66·80): Zett K 10·—; Finder, Steiner je K 5·—; Rosset, K 4·—; Komor, Kraus je K 3·—; Engel, Gyri, Kurzmann, Mendl- , Proschek, Springer, Zwillinger je K 2·—; Heinert K 1·20; Farkas, Goldschmid, Hermann, Hilberger, Hoffenreich, Hönig, lch, Paskusz, Schindler, Schischa, Stiaßny, Wachs, Weicht, l je K 1·—; Benjamin K —·60.

asse B (K 51·10): Rink K 5·—; Linhardt, v. Perko je K 4·—; Her- olak je K 3·—; Binder, Haas, Landau, Schulhof je K 2·—; Areli, linger, Gefäll, Goldscheider, Götzl, Guth, Hajek, Heindl, Jellinek, Löw, Mandel, Morawitz, Reininger, Soyka, Winter je K 1·—; —·60; Bender, Deutsch, Felmayer, Golant, Gottlieb, Krames, azar, Moritz, Mayer, Nowak, Raimann, Szamek je K —·50.

asse A (K 41·—): Völker K 4·—; Friedländer, Hlawenitzka, Koll- ann, Nidetzky, Perutz, Sandig, Wanka, Wollisch je K 2·—; Ber- l, Deutsch, Elger, Freiberger, Gutschera, Hirsch, Jokl, Kleedorfer, aß, Reich, Rosenberg, Salz, Schmetterling, Spiegler, Wachs- land, Wunderbaldinger je K 1·—.

asse B (K 59·—): Landesberger K 20·—; Hedding K 5·—; Groß- —; Hofbauer, Siegert je K 3·—; Schild K 2·80; Friederici, Grieß, Pick, Stenitzka, Weiß, Neumann K 1·20; Gröger, Schiff, Schön- , Strodl, Tritsch je K 1·—.

sse (K 78·20): Schmid K 10·—; Henzel, Lorenz, Richer, Schwartz t je K 5·—; Gogoditsch, v. Nagy, Palfy je K 3·—; Ehrmann, Mäh- , Romstorfer, Scheu, Welzel, Winternitz je K 2·—; Schleifer

K 1·60; Kohn Max K 1·20; Böck, Bürgmann, Dudič, Garfein, Gröge
Keiß, Klinger, Kohn Karl, Kubat, Malkovský, Máša, Melaun, Nadl
necký, Schön, Spitzer, Stiasny, Thomastik, Vettermann, Waldm
berger je K 1·—; Barborka K —·40.

VI. Klasse (K 67·—): Kohl, Kropf je K 5·—; Fonovits, Kuba
Fürth, Moser, Polak je K 3·—; Brasser, Eder, Greulberger,
Knöpfelmacher, Krasny, Mahovsky, Mayer, Pichler, Schlegel,
Thürriegl je K 2·—; Bachmann, Behal, Binder, Feil, Frank E
schmid, Hornischer, Kärpel, Kornfeld, Kunzenbach, Nadel, Pess
ler, Schwarz, Steskal, Zwick je K 1·—.

VII. Klasse (K 54·—): Bellak, Fleischmann, Steiner Leo
Eislitzer, Hantschl je K 3·—; Haberlick, Heichler, Hengl, Kainz
Mayer, Opawa, Ruff, Weinreb je K 2·—; Bader, Brand, Caiou
Gottlieb, Jalkotzy, Morawetz, Neubauer, Pollak, Pritzl, Prowazk
Hugo, Thieberg, Tostmann, Trantina je K 1·—.

C. Ferienhort.

Um einer Anzahl würdiger aber bedürftiger Schüler des
milian-Staatsgymnasiums und der k. k. Realschule im IX. Wiene
bezirke auch in diesem Jahre den Landaufenthalt in den Hai
ermöglichen, wurde, wie in den früheren Jahren, dank dem e
Entgegenkommen der Direktion der Volksoper von der Be
„Alsergrund" des Vereines „Ferienhort für bedürftige Gymnasi-
alschüler in Wien" eine Theatervorstellung veranstaltet. In d
gelangte die komische Oper „Die Glocken von Corneville" zur
Der aus dieser Vorstellung fließende Reingewinn und die Beiträ
glieder der Bezirksgruppe Alsergrund ermöglichten es, 8 Reac
Kosten der Bezirksgruppe in das neue Ferienheim am Wol
entsenden.

Das Ausschußmitglied der Bezirksgruppe „Alsergrund", I
Siegfried Fehl, hatte wie im Vorjahre die Liebenswürdigkeit d
Ferienkolonie entsendeten Schüler unentgeltlich auf den Zustan
zu untersuchen und ihnen die nötige Hilfe zu leisten.

VI. Chronik der Anstalt.

a) Veränderungen im Lehrkörper.

Aus dem Lehrkörper schieden: Der der Anstalt zur Diens
gewiesene wirkliche Lehrer Max Glass; er wurde der E
realschule im II. Wiener Gemeindebezirke zugewiesen. Ferr
plenten: Binder Franz, der eine Supplentenstelle am Albr
gymnasium in Teschen erhielt. Der supplierende Turnlehrer E
Edgar wurde zum wirklichen Turnlehrer am k. k. Staatsg
Lundenburg, die Supplenten Krasser Robert und Dr. Mat
wurden zu provisorischen Lehrern ernannt, und zwar ersterer a
realschule im XVI. Wiener Gemeindebezirke, letzterer an de
schule in Znaim. Der Supplent Johann Eisterer erhi
plentenstelle an der Staatsrealschule im VIII. Wiener Gemeind
der Probekandidat Dr. Otto Tintner eine prov. Lehr
Landes-Unterrealschule in Auspitz.

Weiters schieden von der Anstalt die Turnassistenten E
Josef Patry und Emil Witschel.

In den Lehrkörper traten ein: Der Professor der Staat
Plan, Josef Böhnel, ernannt mit Erl. v. 11. Juni 1910, Z.
9. August 1910, Z. 1187/3—I/L. Sch. R.; Professor Philipp S
der deutschen Staatsrealschule in Budweis, ernannt mit Erl.
1910, Z. 19.326/M. K. U., 16. August 1910, Z. 464/5—I/L. Sch.

d von Stubenrauch vom Staatsgymnasium in Mährisch-
, ernannt mit Erl. v. 31. August 1910, Z. 32.507/M. K. U., 13. Ok-
0, Z. 2230/4—I/L. Sch. R.; der prov. Lehrer Dr. Wilhelm
nger von der Staatsrealschule im I. Wiener Gem.-Bez., ernannt
. 15. Juni 1910, Z. 17.292/M. K. U., 12. Juli 1910, Z. 1692/3—I/L.
ier Turnlehrer Müller Josef vom Staatsgymnasium in Lun-
ernannt mit Erl. v. 16. Juni 1910, Z. 17.277/M. K. U., 9. August 1910,
-I/L. Sch. R.; die Supplenten Dr. Isaak Leißner, Alois
(4. Oktober 1910, Z. 3734/L. Sch. R.); ferner die Assistenten
Engelbert (27. September 1910, Z. 3349—I/L. Sch. R.); May
. September 1910, Z. 3513—I/L. Sch. R.); Pucher Johann
mber 1910, Z. 3322/L. Sch. R.).

Ableistung des Probejahres wurden der Anstalt zugewiesen die
:andidaten: Dubowy Johann, approbiert aus Deutsch und
Erl. v. 8. November 1910, Z. 4338/1—I/L. Sch. R.); Schmidt
(Erl. v. 12. November 1910, Z. 4453—I/L. Sch. R.), approbiert für
ik und Physik; Dr. Rudolf Lenk, approbiert aus Deutsch und
Erl. v. 8. Februar 1911, Z. 650/1—I/L. Sch. R.), und Straberger
r, approbiert für Chemie als Hauptfach, Mathematik und Physik
fächer (Erl. v. 11. März 1911, Z. 1263/1—I/L. Sch. R.).

b) Beförderungen.

Professor Leopold von Stubenrauch wurde die III. Quin-
ge verliehen (Erl. v. 9. Februar 1911, Z. 778—I/L. Sch. R.). —
iche Religionslehrer Engel Franz wurde mit Erl. v. 18. Ok-
, Z. 4108/L. Sch. R. und der wirkliche Lehrer Schmidt Ernst
26. September 1910, Z. 3701—I/L. Sch. R., im Lehramte definitiv
nd ihnen der Titel eines k. k. Professors verliehen.

Personalstand des Lehrkörpers und Lehrfächerverteilung.

1. Direktor.

ranz, VI. Rangsklasse, Ritter des Franz Joseph-Ordens, k. k.
ılrat, lehrte Französisch in IV b (4 St.).

2. Professoren.

sef, Professor, IX. Rangsklasse, Verwalter der physikalischen
·mittelsammlung, Klassenvorstand in V, lehrte Mathematik in V,
sik in III a, III b, IV a, IV b und war Leiter der physikalischen
ungen in III und IV (18 St.).

ız, Professor, IX. Rangsklasse, Verwalter des photogr. Ateliers
der Schülerlade, lehrte katholische Religion in allen Klassen und
Exhortator (23 St.).

r Johann, Phil. Dr., prov. Lehrer, IX. Rangsklasse, Klassenvor-
d in II a, lehrte Deutsch und Französisch in II a und V (15 St.).

Philipp, Professor, IX. Rangsklasse, Verwalter der Lehrer-
othek und Klassenvorstand in VI, unterrichtete Deutsch in VI
Französisch in I a, VI und VII (15 St.).

Hugo, Phil. Dr., Professor, IX. Rangsklasse, Verwalter der
ilerbibliothek, Klassenvorstand in VII, lehrte Deutsch in IV b
VII und Englisch in V und VII (14 St.).

win, Phil. Dr., Professor, IX. Rangsklasse, lehrte Geschichte in
II a, III a, V, VI, Geographie in II a, III a, V und VI (17 St.).

, Professor, IX. Rangsklasse, Klassenvorstand in IV b, lehrte
ematik in II b, III a, IV a und IV b und Geometrie in II b, III a
V (17 St.).

r Franz, Professor, IX. Rangsklasse, Verwalter des chemischen
nettes und der Mineraliensammlung, lehrte Chemie in IV a, IV b,
d VI, Mineralogie in VII und war Leiter der chemischen Schüler-
gen (18 St.).

hilipp, Professor, IX. Rangsklasse, Klassenvorstand in I a, Ver-
er der naturhistorischen Sammlungen und Leiter der natur-

wissenschaftlichen Schülerübungen, lehrte Mathematik in Naturgeschichte in I a, I b, II a, II b, V und VI (im I. Sem. II. Sem. 20 St.).

Schloegl Robert, Phil. Dr., Professor, IX. Rangsklasse, Verw historisch-geographischen Sammlungen und Klassenvorstan lehrte Geschichte in II b, IV a, IV b und VII und Geograph II b, IV a, IV b und VII (17 St.).

Schmidt Ernst, Professor, IX. Rangsklasse, Verwalter der Lehr Geometrie, Klassenvorstand in III b, lehrte Mathematik in und Geometrie in III b, IV a, VI und VII (im I. Sem. 17 und in 16 St.).

Schmidt Josef, Professor, VIII. Rangsklasse, lehrte Mathemati Physik in VI und VII und war Leiter der physikalischen übungen in VI und VII (17 St.).

Soyka Josef, Professor, VII. Rangsklasse, Verwalter der Lehr Freihandzeichnen, lehrte Freihandzeichnen in I a, II a, III a, und VI (20 St.).

v. Stubenrauch Leopold, Professor, VIII. Rangsklasse, lehrte Freih nen in I b, II b, III b, V und VII (18 St.).

Zuck Josef, Phil. Dr., Professor, IX. Rangsklasse, Klassenvor III a, lehrte Deutsch in III a, Französisch in II b und III a un in VI (16 St.).

3. Turnlehrer.

Müller Josef, k. k. Turnlehrer, X. Rangsklasse, Verwalter des Tu lehrte Turnen in allen Klassen (22 St.) und war Leiter de spiele.

4. Supplenten.

Knapp Franz, Dr. techn., Klassenvorstand in IV a, lehrte Mathemik II a, IV a und Geometrie in II a und IV b (15 St.).

Leißner Isaak, Phil. Dr., Klassenvorstand in I b, lehrte Deutsch u zösisch in I b und IV a (18 St.).

Lorenz Karl, lehrte Geschichte und Geographie in I b und III b

Wagner Alois, lehrte Deutsch in I a, II b, III b und Französisc (16 St.).

5. Akatholische Religionslehrer.

Rosenfeld Moritz, Phil. Dr., lehrte israelitische Religion in I a, I III a, III b, IV a, IV b, V, VI und VII (15 St.).

Zwernemann Gustav, evang. Pfarrvikar, lehrte evangelische Reli 3 wöchentlichen Stunden.

6. Lehrer der nicht obligaten Lehrgegenstä

Hanke Rudolf, lehrte Gesang in 3 Abteilungen und leitete de gesang (5 St.).

Gasparin Philipp, Professor, lehrte Stenographie in 2 Abteilung

May Karl, lehrte Kalligraphie in I a und I b.

7. Assistenten.

Buttiro Engelbert, assistierte im geometrischen Zeichnen in III, VI und VII (14 St.).

Knapp Franz, Dr. techn., assistierte im geometrischen Zeichnen IV a (4 St.).

Hartel Karl, assistierte beim Freihandzeichnen in I a, II a, III a und VI (20 St.).

May Karl, assistierte beim Freihandzeichnen in I b, II b, III b, (18 St.).

Pucher Johann, assistierte beim Turnunterrichte in allen Klass

8. Probekandidaten.

hann.
f, Phil. Dr.
gust.
Theodor, Assistent an der Lehrkanzel für analyt. Chemie an . k. techn. Hochschule in Wien.

9. Dienerschaft.

·nold, definit. Schuldiener.
definit. Schuldiener.
ıst, Aushilfsdiener.
Aushilfsdiener.

* * *

mber 1910 wurden die Einschreibungen, Wiederholungs-, Nach- und Aufnahmsprüfungen vorgenommen.
tember wurde das Schuljahr durch einen Festgottesdienst er-

tember begann der regelmäßige Unterricht.
ber, dem Allerhöchsten Namensfeste Seiner Majestät, wohnten ıtholischen Schüler mit dem gesamten Lehrkörper einem Fest- dienste bei.
11. November inspizierte der Herr Landesschulinspektor Re- gsrat Hans Januschke in mehreren Klassen den realisti- Unterricht.
ember, dem Namensfeste weiland Ihrer Majestät der Kaiserin eth, wurde ein Seelengottesdienst abgehalten, dem die katho- ı Schüler und der gesamte Lehrkörper beiwohnten.
ıer 1911 besuchte Herr Dr. Feuchtwang den israelitischen ɔnsunterricht.
ɛr wurde das I. Semester geschlossen.
ıar begann das II. Semester.
ɔruar besuchte Herr Fachschulinspektor Regierungsrat Josef ;l die Anstalt, um die künstliche Beleuchtung der Zeichen- ı Augenschein zu nehmen.
war zum Zwecke der Veranstaltung von Ausflügen schulfrei torialtag).
inspizierte der hochw. Prälat Dr. Ferd. Wimmer den katho- ı Religionsunterricht.
fand ein Schauturnen mit den Schülern der Anstalt statt.
?. Juni wurde der humanistische Unterricht in mehreren Klassen ɛm Herrn k. k. Landesschulinspektor Dr. C. Vrba inspiziert.
ı inspizierte Herr Landesschulinspektor Regierungsrat Ja- hke in zwei Klassen den realistischen Unterricht.
vurde das Schuljahr mit einem Dankgottesdienste geschlossen.

VII. Körperliche Erziehung der Jugend.

1. Hygiene.

ıe des Ministerial-Erlasses vom 11. Februar 1880, Z. 2160, ine korrekte Körperhaltung beim Sitzen in der Schule gesehen. ahme der Kurzsichtigkeit zu steuern, wurden der vorgesetzten schläge bezüglich der künstlichen Beleuchtung in den Zeichen- reitet. — Im Sinne der Ministerial-Verordnung vom 13. März 38, wurde mit besonderer Aufmerksamkeit auf die Reinhaltung ıume gesehen. Dreimal im Schuljahre wurden sämtliche Unter- mit Stauböl eingelassen, alle Einrichtungsstücke gewaschen wurden alle Unterrichtsräume ausgekehrt. — Um das Herein- Straßenschmutz hintanzuhalten, wurden die Schüler angehalten,

beim Betreten des Schulhauses ihr Schuhwerk an Scharreisen liegenden Matten zu reinigen. Bei trockenem Wetter wurden di Unterrichtspausen im Schulhofe zugebracht, bei ungünstigem W gaben sich die Schüler in den Respirien auf die ihnen zugewiesen während die Unterrichtsräume hinreichend gelüftet wurden.

2. Körperliche Ausbildung.

a) Der Turnunterricht hat in erster Linie die körpe bildung der Realschüler zur Aufgabe. Er wurde an der Anstalt System des 1907 verstorbenen badischen Hofrates Alfred Maul der Turnunterricht ein obligater ist, wurden ganze Befreiungen vom Gerätturnen nur auf Grund eines amtsärztlichen Zeugnisse

Um die im Sinne der Ministerial-Verordnung vom 8. Z. 19.847, von Unterricht und Aufgaben freigelassenen zwei N tatsächlich für die körperliche Erziehung der Schüler zu sicherr der rauhen Jahreszeit an der Anstalt das Kürturnen eingeführt. Zwecke wurden die Schüler in Gruppen eingeteilt, von denen Stunde unter Aufsicht des Turnlehrers und seines Assistenten hatte. Jede Gruppe der Schüler wurde in mehrere Riegen einge unter Aufsicht von Vorturnern abwechselnd die verschiedenen zugewiesen wurden. Der Wechsel der Turngeräte wurde nach Turnsaal angebrachten festen Plan und auf ein Zeichen des vorgenommen. Die Teilnahme der Schüler am Kürturnen ist in larischen Uebersicht ausgewiesen.

Um das Interesse am Turnen zu heben, wurde im Monat Juni ein Wetturnen veranstaltet. Das Wetturnen im März, a 16 Schüler der zwei obersten Klassen beteiligten und dem Schüler und mehrere Professoren mit dem Direktor beiwohnt im Turnen am Reck, Barren und Pferd.

Im Juni bestand das Wetturnen in einem Drei- und einem Hiebei wurden die Schüler nach ihrem Alter in drei Gruppe Im ganzen beteiligten sich an diesem Wetturnen 127 Schüler.

Um den Angehörigen der Schüler der Anstalt einen Einb nach der Methode Alfred Mauls betriebenen Turnunterricht zu wurde am 30. Mai 1911 ein Schauturnen der Schüler veranst der Unterrichtsbetrieb klassenweise vorgeführt wurde. An a turnen schloß sich die Vorführung einiger Turnriegen an ver Geräten und einige Wettspiele. Der Herr Vizepräsident desk. Landesschulrates Josef Khoß von Sternegg, Herr Landesschulin gierungsrat Hans Januschke, der Referent für administrative A heiten Herr Philipp Freiherr von Winkler und der Referent f liche Erziehung im Ministerium für Kultus und Unterricht He Robert Litschauer sowie zahlreiche Angehörige der Schüler Veranstaltung mit ihrer Anwesenheit. Trotz der Ungunst de konnte fast die ganze Turnordnung durchgeführt werden.

Für den Eintritt wurde eine kleine Gebühr eingehoben erträgnis wird zur Anschaffung von fehlenden Turn- und Spie wendet werden. Hiebei wurden folgende Ueberzahlungen gei Apotheker Gyri 3 K, Herr Julius Herlitschka 1 K, Herr Karl K Siegmund Mährischl 3 K, Frau Jeannette Mandl 60 h, L (V. Kl.) 60 h, Herr Heinrich Riebl 1 K, Alois Schild (IV. Kl.) 3 h, (III b) 1 K, Herr Johann Völker 1 K.

b) Sport. Der unter der Aufsicht der Mittelschuldirek II., III., IX. und XX. Bezirkes stehende Eislaufplatz des na Augartens bot den Schülern der Anstalt eine sehr günstige zum Schlittschuhlaufen. Eine Saisonkarte kostete 4 K; ein dürftiger Schüler erhielten Freikarten.

Das Rodeln, Skilaufen und Radfahren waren an der ns nicht organisiert, doch wurde den Schülern ein mäßiger un Betrieb dieser Sporte, wenn Gelegenheit hiezu vorhanden wä Ganz besonders wurde den Schülern das Schwimmen und

as Dianabad gewährte zu diesem Zwecke den Schülern gegen
; der Legitimation eine bedeutende Preisermäßigung. Ueber Er-
Direktion wurden der Anstalt von der Leitung des Brünnlbades
en zur Verfügung gestellt, die zur Behebung von ermäßigten
das Vollbad und den Schwimmunterricht berechtigten. Im
urden den Schülern die Strombäder auf der Elisabethpromenade
r Reichsbrücke empfohlen.

gendspiele. Im Frühjahr und im Sommer wurde an den
aufgabenfreien Nachmittagen im Augarten und im Prater das
gepflegt. Die Schüler wurden in Gruppen eingeteilt, von denen
unden spielte. Bei regnerischem Wetter trat an die Stelle des
es Kürturnen ein, so daß keiner der zwei für die körperliche
estimmten Nachmittage unbenützt blieb. Die beliebtesten Spiele
otenlaufen, Eilbotenball, Schlaglaufen, Ball über die Schnur,
Faustball und Schleuderball.

**tabelle über die Teilnahme an den verschiedenen Veranstal-
tungen zur Förderung der körperlichen Erziehung.**

Schlittschuhläufer	Schwimmer	Radfahrer	Skiläufer	Rodler	Tennisspieler	Ruderer	Leben in den letzten Wochen d. Schuljahres auf dem Lande	Leben während der Hauptferien auf dem Lande	Beteiligen sich an: Jugendspielen	Beteiligen sich an: Kürturnen	Beteiligen sich an: Schießübungen	Zahl der Spieltage	Zahl der Kürturntage	Vom Turnen waren befreit: Für d. ganze Schuljahr	Vom Turnen waren befreit: Für ein Semester	Vom Turnen an Geräten waren befreit
15	17	1	—	5	3	13	—	34	32	27	—	9	1	3	—	1
14	18	6	3	16	3	9	1	32	36	26	—			3	2	2
21	17	6	—	11	1	15	1	27	30	30	—		2	2	1	1
21	20	2	1	7	5	9	2	33	20	24	—			5	—	—
38	32	12	2	23	6	33	—	38	27	28	—	8		3	1	—
33	27	13	—	8	13	26	4	38	31	33	—		3	2	1	1
21	19	6	—	6	4	19	—	28	23	21	—			4	—	—
25	20	11	3	14	6	20	—	29	25	23	—		4	1	1	—
31	30	12	1	10	9	28	1	28	19	14	.			7	2	—
28	37	20	1	5	4	38	3	30	33	24	24	8	5	5	—	—
20	22	12	4	8	5	17	—	15	7	11	—			3	2	2
267	259	101	15	113	59	227	12	332	283	261	24			38	10	7
62·9	61·1	23·8	3·5	26·6	13·9	53·5	2·8	78·3	66·7	61·5	5·7			7·5	2·4	1·6

kursionswesen. Im Sinne des Erlasses des k. k. n.-ö.
rates vom 8. Dezember 1910, Z. 2168—I, wurden mit den
er Wanderungen in die nähere oder entferntere Umgebung von
ommen. Sie dienten teils zu Marschübungen und Spielen, teils
rung der Kenntnis der Heimatskunde oder waren der Veran-
des in der Schule Gelernten gewidmet. Mit einzelnen Klassen
en von Schülern unternahmen die Professoren Wanderungen
igung von Sehenswürdigkeiten oder hervorragenden Industrie-
ngen.

Uebersichtstabelle über die unternommenen Exkursi-
26. Juni 1911.

Datum	Klasse	Ziel der Exkursion	Zweck	
1910 2./10.	IV b	Mödling-Frauenstein-Anninger-Eisernes Tor-Baden	Veranschaulich. geogr. Bodengestaltungen	Dr
1911				
25./3.	II b	Kaltenleutgeben-Gaisberg	Jugendspiele	Dr
12./4.	II b u. IV b	Weißenbach-Steinwandklamm-Mirafälle-Pernitz	Erosionstäler, Verkarstung	Dr
22./4.	II a	Höflein a/d. Donau-Hadersfeld-Klosterneuburg-Kierling	Marsch u. Spiel	
22./4.	I a	Pötzleinsdorf-Schafberg	Botanisieren	
22./4.	IIb IVa IV b	Kaltenleutgeben-Höllenstein-Wassergspreng Hinterbrühl-Mödling	Marschübung	Dr
29./4.	II b	Grinzing-Kahlenberg-Himmel	Botanisieren	
2./5.	II a	Sühnhauskapelle, Kirche Maria am Gestade, Votivkirche	Kirchenbaustile	
5./5.	I a	St. Andrä-Wördern-Kierling-Klosterneuburg	Marsch u. Spiel	
9./5.	II a	St. Stephansdom, das Innere der Kirche, Reliquien-Schatzkammer	Besichtigung mit Erklärungen	
13./5.	III a u. b	Stift Klosterneuburg	Besichtigung	
13./5.	V	Leopoldsberg	Botanisieren	
13./5.	IV a u. b	Kahlenbergerdorf-Klosterneuburg	Zeichnen und Malen	
16./5.	II a	Kritzendorf-Hadersfeld-Kritzendorf	Marsch u. Spiel	
19./5.	II a	Kritzendorf-Hadersfeld-Kritzendorf	"	
19./5.	I b	Baden und Umgebung	"	
19./5.	II b	Miesenbach-Dürre Wand-Öhler-Puchberg	"	
19./5.	III a u. b	Krems-Aggstein	"	
19./5.	IV a u. b	Krems-Dürrenstein-Rossatz-Wien (mit Schiff)	Marsch und Besichtigung	
19./5.	VI	Weißenbach-Mirafälle-Pernitz	Marsch und Besichtigung	
19./5.	VII	Reichenau-Knappenhof-Preintal Payerbach	Erklärung des Raxgebietes	
20./5.	VII	Kunstausstellung im Künstlerhause	Besichtigung mit Belehrung	
20./5.	VI	Kunstausstellung im Künsterhause	Besichtigung mit Belehrung	
23./5.	VII	Fabrik für Erzeugung elektr. Beleuchtungskörper d. Johann Kremenetzky	Besichtlgung	
23./5.	I a	Pötzleinsdorf-Hameau-Sofienalpe-Neuwaldegg	Botanisieren	

Ziel der Exkursion	Zweck	Leitende Professoren
Kunstausstellung im Künstlerhause	Besichtigung mit Belehrung	Hartl
Sievering - Hameau - Pötzleinsdorf	Botanisieren	Saupper
Neuwaldegg-Heuberg-Jubiläumswarte-Ottakring	»	Saupper
Kritzendorf-Hadersfeld-Kritzendorf	Kriegsspiel im Waldgebiet	Dr. Feichtnger
Payerbach-Höllental-Kaiserbrunn. Aufstieg über die Brandscheide zum Otto-Schutzhaus. Nächtigung. Am 18. Wanderung über das Raxplateau zum Karl Ludwighaus-Heukuppe-Preiner Schütt-Payerbach	Erklärung der Hochgebirgsformen der Kalkalpen und ihres Pflanzenkleides. Orientierung von der Heukuppe.	Dr. Schloegl Dr. Zuck
Sievering-Hermannskogel-Sievering	Botanisieren	Saupper.
Besichtigung des Himmels auf der Sternwarte der Urania	—	Jos. Schmidt.

hießunterricht. Da mit dem Schießunterricht infolge r Verzögerung erst Mitte April begonnen werden konnte, erchüler der VII. Klasse, die sich zur Teilnahme gemeldet hatten, g von demselben. Mit Rücksicht auf die bevorstehenden Reifeurde ihrem Ansuchen Folge gegeben und der Schießunterricht Schüler der VI. Klasse abgehalten.

usammenwirken zwischen Schule und Haus.

alschule hat eine doppelte Aufgabe zu lösen: die Schüler mit digen Wissen und Können auszustatten und sie zu tüchtigen, gen Männern zu erziehen. Das Erziehungswerk bedeutet eine ntige und schwere Aufgabe und ist nur möglich, wenn die chüler mit den Lehrern Hand in Hand gehen. Die häuslichen n sind für die Charakterbildung der Jugend in der Regel von em Einflusse; daher sind den Lehrern Mitteilungen über die Schüler recht willkommen, damit sie die Schüler individuell önnen. Für die Eltern müssen hingegen Aufklärungen der das Verhalten ihrer Söhne, das nicht selten von dem in der verschieden ist, wertvoll sein. Daher werden gewissenhafte teresse der Erziehung ihrer Kinder mit der Schule in regem en, um über alle Vorkommnisse in der Schule unterrichtet zu llen Fällen, wo es notwendig sein sollte, auf ihre Kinder einönnen. Zur Erleichterung dieses Verkehrs wurden von allen wöchentliche Sprechstunden festgesetzt und das Verzeichnis Vorhause des Schulgebäudes angebracht. In Fällen, wo es den möglich war, in den festgesetzten Sprechstunden zu erscheinen, tglieder des Lehrkörpers nach Maßgabe ihrer verfügbaren Zeit alb der Sprechstunden bereitwilligst Auskünfte über die Sprechstunden wurden auch dazu benützt, Aufklärungen über ne Erziehung und die Teilnahme der Schüler an den zu diesem der Schule getroffenen Veranstaltungen zu geben. — Die Daten rkonferenzen wurden zu Beginn jedes Semesters den Schülern cht und den Eltern ungünstige Ergebnisse in den Leistungen

und im Betragen der Schüler mitgeteilt. Bei besonders wichtigen
nissen wurden die Eltern sofort brieflich verständigt. Durch die
rungen war es möglich, manchen Mißerfolg im Fortgange hin
und manches Gebrechen im Betragen im Keime zu ersticken.

Auf Grund dieser knappen Ausführungen
die Direktion an die Eltern oder deren Stellv
die dringende Aufforderung, im Interesse ihre
auch in Hinkunft in einem regen Verkehr mit de
zu bleiben.

IX. Statistik der Schüler.

	Klasse											Zu-sammen
	I A	I B	II A	II B	III A	III B	IV A	IV B	V	VI	VII	
Zahl.												
09/10	43	36	43	38[1]	36	37	38[5]	40	50	37	—	398[4]
1910/11 .	43	43	38	37	41	42	35	34	52[1]	46	29	440[1]
s Schuljahres												
1	—	—	1	—	1	1	—	—	—	—	—	3
iso aufgenom.	43	43	39	37	42	43	35	34	52[1]	46	29	443[1]
ufgenom. u. zw.												
ufnahmsprüf.	42	41	1	1	—	—	—	—	—	—	—	85
gen	—	—	1	5	5	6	4	—	—	4	1	26
en	—	—	—	—	—	1	—	—	1	1	1	4
enom. u. zw.:												
gen	—	—	36	30	36	36	30	33	42[1]	36	27	306[1]
en	1	2	1	1	1	—	1	1	9	5	—	22
s Schuljahres												
. . . . .	3	3	2	—	—	1	1	1	7	1	—	19
u Ende 1910/11	40	40	37	37	42	42	34	33	45[1]	45	29	424[1]
ffentl. Schüler	40	40	37	37	42	42	34	33	45	45	29	424
ivatisten . .	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1
ort (Vaterland).												
. . . . .	31	25	24	30	29	34	25	26	34[1]	34	22	314[1]
(außerWien)	1	2	4	4	2	—	2	—	1	2	4	22
ch	—	—	—	—	1	—	—	—	1	—	—	2
. . . . .	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
. . . . .	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1	2
. . . . .	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
. . . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1		2
. . . . .	2	1	1	1	1	3	2	4	3	2	1	21
. . . . .	—	2	1	—	1		—	1	1	2	1	9
. . . . .	—	—	—	—	1	1	1	—	—	1	—	4
. . . . .	1	5	4	—	—	1	2	1	1	—	—	15
. . . . .	—	—	2	—	—	1	—	—	2	—	—	5
. . . . .	3	4	—	1	3	1	1	1	1	2	—	17
. . . . .	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
. . . . .	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1
. . . . .	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1
. . . . .	—	—	1	1	—	—	—	—	—	1	—	3
. . . . .	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1
. . . . .	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1
. . . . .	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1
	40	40	37	37	42	42	34	33	45[1]	45	29	424[1]
sprache.												
. . . . .	32	33	37	37	39	42	33	30	39[1]	45	28	395[1]
isch	1	1	—	—	—	—	—	2	5	—	1	10
. . . . .	—	4	—	—	—	—	—	—	1	—	—	5
. . . . .	7	2	—	—	1	—	—	1	—	—	—	11
h	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1
. . . . .	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1
. . . . .	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1
	40	40	37	37	42	42	34	33	45[1]	45	29	424[1]

	Klasse								
	I A	I B	II A	II B	III A	III B	IV A	IV B	V
4. Religionsbekenntnis.									
Katholisch d. latein. Ritus	20	21	16	17	17	16	17	16	28
„ d. griech. „	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Altkatholisch	1	—	—	—	—	—	—	—	—
Evangelisch A. B.	1	2	2	2	—	2	—	—	—
„ H. B.		—	—	1	—	—	—	4	2
Israelitisch	18	17	19	17	25	24	17	13	15[1]
	40	40	37	37	42	42	34	33	45[1]
5. Lebensalter.									
11 Jahre alt	19	16	—	—	—	—	—	—	—
12 „ „	17	19	12	3	—	—	—	—	—
13 „ „	3	4	18	22	1	3	—	—	—
14 „ „	1	1	6	12	28	27	2	4	—
15 „ „	—	—	1	—	13	12	23	25	3
16 „ „	—	—	—	—	—	—	8	3	27
17 „ „	—	—	—	—	—	—	1	1	6[1]
18 „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	6[1]
19 „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	3
20 „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	—
21 „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	—
22 „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	40	40	37	37	42	42	34	33	45[1]
6. Wohnort.									
IX. Bezirk	33	33	29	28	36	39	28	25	39
I. „	—	1	—	1	1	—	1	1	—
II. „	—	—	—	—	—	—	2	1	—
III. „	—	—	—	—	—	—	—	1	—
VI. „	—	1	—	—	—	—	—	—	—
VIII. „	—	1	—	1	1	—	1	—	—
XIII. „	1	—	—	—	—	—	—	1	—
XV. „	—	—	1	—	—	—	—	—	—
XVI. „	—	—	—	—	—	—	—	—	—
XVIII. „	1	1	2	1	—	1	—	2	2
XIX. „	—	—	2	4	1	1	1	2	2
XX. „	5	3	1	—	2	—	1	—	—
XXI. „	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Außerhalb Wiens	—	—	2	2	1	1	—	—	1
	40	40	37	37	42	42	34	33	45

	Klasse											Zusammen
	IA	IB	IIA	IIB	IIIA	IIIB	IVA	IVB	V	VI	VII	
assifikation.												
es Schulj. 1910/11:												
h geeignet, in die Klasse aufzusteig.	5	10	2	—	2	4	3	7	4	1	4	42
in die nächste aufzusteigen	31	23	22	35	32	28	27	22	32	31	25	308
eignet, in die Klasse aufzusteig.	3	6	6	1	6	8	2	2	4[1]	8	—	46[1]
Wiederholungs- zugelassen		1	7	1	2	2	2	2	4	5	—	26
Nachtragsprüfung itshalber zugel.	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	2
	40	40	37	37	42	42	34	33	45[1]	45	29	424[1]
zum Schuljahre 909/10:												
lungsprüfungen ewilligt	4	1	3	3	—	3	1	2	3	2	—	22
en haben	1	1	3	2	—	3	1	2	2	2	—	17
sprochen haben erschienen sind)	3	—	—	1	—	—	—	—	1	—	—	5
prüfungen waren t	1	—	1	—	—	—	1	—	—	2	—	5
en haben	1	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	2
prochen haben	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1
hienen sind	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	2
t das Ergebnis 1909/10:												
geeignet, in die Klasse aufzust.	4	3	3	7	3	7	7	1	1	8	—	44
in die nächste ufzusteigen	33	30	38	28[1]	31	28	27[2]	32	36	20	—	303[3]
., in die nächste ufzusteigen	6	3	2	3	2	2	4[1]	7	13	7	—	49[1]
bleiben	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	2
	43	36	43	38[1]	36	37	38[3]	40	50	37	—	398[4]

	„ II. „	—	—	—	1	—	1	—	2	2	2	10
Ganz befreit:	„ I. „	16	18	25	20	20	25	25	16	27	22	20	254
	„ II. „	18	24	20	21	23	23	18	13	22	19	18	219
Das Schulgeld betrug: im	I. Semester K	1300.—	1150.—	700.	825.	1050.—	825.—	450.—	850.	1200.	1150.—	400.—	9900.—
	„ II. „ „	975.	800.—	825.—	775.	925.	925.—	775.—	975.	1150.—	1250.—	500.—	9875.—
Die Aufnahmstaxen à K 4.20	„	176.40	172.20	8.40	25.20	21.—	29.40	16.80	—	4.20	21.—	8.40	483.—
Lehrmittelbeiträge à K 4.—	„	172.—	172.	156.	148.	168.—	172.	140.	136.—	208.—	184.—	114.—	1772.—
Taxen für Zeugnisduplikate	„	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	8.—
Beiträge zur Deckung der Auslagen für die Jugendspiele à K 1.—	„	43.	43.—	39.—	37.—	42.—	43.—	35.	34.—	52.—	46.—	29.—	443.—
9. Besuch des Turnunterrichts.													
Am Turnunterrichte nahmen teil		37	37	35	32	39	40	30	32	38	40	26	386.—
Befreit waren		3	3	2	5	3	2	4	1	7	5	3	38
10. Besuch der nicht obligaten Unterrichtsgegenstände.													
Den Stenographieunterr. besuchten:	I. Abt.	—	—	—	—	—	—	23	16	—	—	—	39
	II. „	—	—	—	—	—	—	—	—	18	—	—	18
Den Gesangsunterricht besuchten:	I. „	16	14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	30
	II. „	—	—	11	9	7	1	1	—	—	—	—	29
	III. „	—	—	—	—	—	—	—	—	4	13	7	24
Die chem. Schülerübung. besucht.:	I. „	—	—	—	—	—	—	—	—	16	—	—	16
	II. „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	9	4	13
Die naturwissensch. Schülerüb. besucht.:	Im I. Sem.	—	—	—	—	—	—	—	—	13	10	—	23
	„ II. „	—	—	—	—	—	—	—	—	7	7	—	14
Die physikal. Schülerübung. besucht.:		—	—	—	—	7	27	13	14	—	17	10	88
11. Stipendisten.													
		—	—	—	—	—	2	—	—	1	2	2	7
							200.—			630.—	900.—	360.—	2690.—
							100.—				100.—	400.—	

X. Wichtige Erlässe.

rial-Erlaß vom 29. September 1910, Z. 29.386, eröffnet, daß an ıen Mittelschulen angestellten Lehrpersonen, welche einer an- nstalt für die Dauer von mindestens einem Jahre zur Dienst- ewiesen werden, während dieser Zeit die für den Standort dieser hranstalt normierte Aktivitätszulage gebührt.

rial-Erlaß vom 16. Oktober 1910, Z. 28.968, ordnet die Einfüh- chießübungen in den zwei obersten Klassen der Mittelschulen en Gegenstand an.

rial-Erlaß vom 6. Mai 1910, Z. 31.093 ex 1909, weist die Direk- Lehranstalten, an welchen Stenographieunterricht erteilt wird, h die ihnen vom königl. Stenographischen Landesamt in Dres- den Zählkarten sorgfältig ausgefüllt an dieses Amt zurückzu-

ɔrschrift Nr. 39, Z. 3320—I, des k. k. n.-ö. L. Sch. R. sind Schüler ısse, denen im zweiten Semester ein Zeugnis mit ungünstiger sse erteilt wurde, nicht vor Ablauf eines weiteren Schuljahres g der Reifeprüfung zuzulassen. Solche Schüler sind auch zur Prüfung nicht zuzulassen, da diese ein integrierender Teil der ist. Es ist vielmehr die Klassifikation der Schüler der VIII. Beginn der schriftlichen Reifeprüfungen abzuschließen.

es k. k. Landesschulrates vom 8. Dezember 1910, Z. 2168—I, chführung der Ministerialverordnungen, besonders jener vom Z. 19.847, betreffend die körperliche Erziehung an Mittelschulen. ial-Erl. vom 30. März 1911, Z. 8661, ordnet an, daß die dies- ptferien an den Mittelschulen von 16. Juli bis 15. September zu ı. Um aber für die unbehinderte Vornahme der Reife-, Priva- ıufnahmsprüfungen sowie anderer Abschlußarbeiten die erfor- zu gewinnen, entfällt die Erteilung des Unterrichtes schon in ehn Tagen vor Beginn der Hauptferien und wird am ersten dieser unterrichtsfreien Tage der Schlußgottesdienst abge- ie Zeugnisverteilung vorgenommen. Bis einschließlich 5. Juli Unterricht in vollem Umfange aufrecht zu halten. Die Reife- ben demnach zwischen dem 6. bis einschließlich 15. Juli 1911

fänner hat allgemein als schulfreier Tag zu gelten.
emester schließt mit dem letzten Samstage vor dem 16. Fe- s II. Semester beginnt mit dem darauffolgenden Sonntage. Der doch noch schulfrei.

---

chnis der Lehrbücher für das Schuljahr 1911/12.

Auflage eingeklammerten Zahlen bedeuten die zulässigen Auflagen.)

Religion:

s c h: I. u. II. Klasse. Großer Katechismus der kathol. Rel. 80 h.
Lehrb. der kath. Liturgik. 2. (1.) Aufl. 1 K 50 h.
P a u k e r, Liturgik wie in I. — P a u k e r, Lehrb. der Offen- ngsgeschichte des alten Bundes. 1. Aufl. 1 K 50 h.
. P a u k e r, Lehrb. der Offenbarungsgeschichte des neuen les. 1. Aufl. 2 K.
K ü h n l, Lehrb. der kath. Rel. für die oberen Klassen der sch. 1. Teil: Glaubenslehre. 2. (1.) Aufl. 2 K 50 h.
K ü h n l, Lehrb. der kath. Rel. f. d. oberen Klassen der Real- len. 2. Teil: Sittenlehre. 2 K 50 h.
. B a d e r, Lehrb. der Kirchengeschichte zum Gebrauche für ler und zum Selbstunterrichte. 7. (6.—4.) Aufl. 2 K 20 h.

b) Evangelisch: I.—IV. Klasse. Biblische Geschichte für den protestant. Religionsunterricht. Ausgabe f. Oesterreich.
Luthers kl. Katechismus. Ausg. f. Oesterr. 2. Aufl. 44 h.
Witz-Oberlin, Der Heidelberger Katechismus. H. B. 1 K.
Schulbibel, bearb. im Auftrage d. Bremischen Bibelgesellschaft.
Liederschatz, Ausgewählte evang. Kirchenlieder zum brauche. 2. (1.) Aufl. 60 h.
Aust Karl, Lehrbuch der Kirchengeschichte f. d. evang. Religi richt. 5. (4. u. 3.) Aufl. 1 K 24 h.
V.—VII. Klasse. Hagenbach, Leitfaden des christl. Releg richtes, bearbeitet v. Deutsch. 8. Aufl. 2 K 88 h.

c) Israelitisch: I. Klasse. Wolf-Pollak, Geschichte Israe israel. Jugend. 1. Heft. 16. (15. u. 14.) Aufl. 96 h.
Israel. Gebetbuch, herausgeg. vom mähr.-schles. israe vereine. 6. (5.—1.) Aufl. 84 h.
Pentateuch, hebr. Ausg. von Letteris.
II. Klasse: Wolf-Pollak, Gesch. Israels wie oben 1. u. 2 (14. u. 13.) Aufl. 1 K 4 h.
Gebetbuch u. Pentateuch wie in I.
III. Klasse: Wolf-Pollak, Gesch. Israels. 3. Heft. 12. (11. u lage. 76 h.
Gebetbuch u. Pentateuch wie in I.
IV. Klasse: Wolf-Pollak, Gesch. Israels. 4. Heft. 11. (10.) u
Wolf-Pollak, Gesch. Israels. 5. Heft. 11. Aufl. 64 h.
Wolf, Kurzgefaßte Religions- u. Sittenlehre. 9. (8.) Aufl. 40.
Gebetbuch u. Pentateuch wie in I.
V. Klasse. Psalmen, hebr. Ausg. v. Letteris.
Hecht-Kayserling, Lehrbuch der jüd. Gesch. u. Litt arbeitet von Doctor u. Biach. Ausg. f. Oesterr. 3 K.
VI. Klasse. Prophetae posteriores, hebr. Ausg. v. Letter.
Hecht-Kayserling wie in V.
VII. Klasse. Pentateuch wie in I.
Hecht-Kayserling wie in V.

Deutsche Sprache:

I.—III. Klasse. Spengler, Deutsche Schulgrammatik. 1 K 80 h
IV.—VII. Klasse. Kummer, Deutsche Schulgrammatik. 7. (6.) Au
I. Klasse. Jelinek-Pollak-Streinz, Deutsches Lesebuch für Realschulen. 1. Band. 2 K 10 h.
II. Klasse. Dasselbe. 2. Band. 2 K 50 h.
III. Klasse. Dasselbe. 3. Band. 2 K 80 h.
IV. Klasse. Dasselbe. 4. Band. 3 K.
V. Klasse. Bauer-Jelinek-Pollak-Streinz-Brandis sches Lesebuch. 5. Band. 3. (2.) Aufl. 2 K 80 h.
Bauer-Jelinek-Streinz, Leitfaden der deutschen Ler österr. Realschulen. 1. Teil. 1 K.
VI. Klasse. Jelinek-Pollak-Streinz, Deutsches Lesebuch. 3 K 50 h.
VII. Klasse. Jelinek-Pollak-Streinz, Deutsches Lesebuch.

Französische Sprache:

I. Klasse. Fetter-Ullrich, La France et les Français. Lirg franz. Sprache für. Realsch. 1. Teil. 13. Aufl. 1 K 40 h.
II. Klasse. Fetter-Ullrich, 2. Teil. 13. Aufl. 1 K 80 h.
III. Klasse. Fetter-Ullrich, 3. Teil. 8. Aufl. 2 K.
IV. Klasse. Fetter-Ullrich, 4. Teil. 9. Aufl. 2 K 80 h.
V.—VII. Klasse. Fetter-Alscher, Französische Schulgramat u. 2.) Aufl. 3 K.
Fetter-Alscher, Uebungsbuch f. d. ob. Klassen. Des Le der franz. Sprache. 5. Teil. 6. (5. u. 4.) Aufl. 2 K.
Fetter-Ullrich, Franz. Lesebuch f. d. ob. Klassen der Rea 1. u. 2. Teil, jeder Teil samt Kommentar. 2 K 80 h.

Englische Sprache:

.llinger-Butler, Lehrgang der engl. Sprache. Ausgabe A. l. 2. (1.) Aufl. 2 K 25 h.
asse. Ellinger-Butler, 2. Teil: An English Reader. 2. ufl. 4 K 50 h.
er-Butler, 3. Teil: A Short English Syntax and Exercises. 0 h.

Geschichte:

zerwenka-Landwehr-Pollak, Lehr- u. Lesebuch der ichte, 1. Teil: Altertum. Ausgabe f. Realschulen. 2 K 80 h.
annak-Rebha nn, Lehrbuch d. Gesch. 2. Teil. 15. (14.) Aufl. Hannak. 2 K 12 h.
Rebhann, Lehrb. d. Gesch. f. d. unteren Klassen. 3. Teil. l. 1 K 80 h.
Zeehe-Rebhann, Lehrb. der Gesch. f. d. oberen Klassen ealschulen. 1. Teil: Altertum. 3. Aufl. 2 K 40 h.
eehe-Rebhann, 2. Teil. 3. Aufl. 2 K 60 h.
Zeehe-Rebhann, 3. Teil. 2. (1.) Aufl. 2 K.
Zeehe-Heiderich-Grunzel, Oesterreichische Vaterunde. 3. Aufl. 3 K 40 h.
II. Klasse. Hannak-Umlauft, Historischer Atlas. 1. Teil. -1.) Aufl. 1 K 60 h.
VII. Klasse. Hannak-Umlauft, Historischer Atlas. 2. Teil. -1.) Aufl. 2 K 32 h.

Geographie:

eiderich, Oesterr. Schulgeographie. 1. Teil. 4. (3.—1.) Aufl.) h.
sse. Heiderich, Oesterr. Schulgeogr. 2. Teil. 3. (2.—1.) Aufl.) h.
eiderich, Oesterr. Schulgeogr. 3. Teil. 2. (1.) Aufl. 2 K 60 h.
sse. Heiderich, Oesterr. Schulgeogr. 4. Teil. 3 K 80 h.
se. Kozenn-Heiderich, Geograph. Atlas. 42. (41. und ufl. 8 K.

Mathematik:

chmidt Josef, Arithmetik u. Geomterie f. d. Unterstufe. . 1 K 80 h.
chmidt Josef, Arithmetik u. Geometrie f. d. Unterstufe. . 2 K.
Schmidt Josef, Arithmetik u. Geometrie f. d. Unterstufe. . 2 K 20 h.
sse. Schmidt Josef, Lehrbuch der Elementarmathematik.)e f. Realsch. 1. Band. 3 K 80 h.
asse. Schmidt Josef, Lehrbuch der Elementarmathematik.)e f. Realsch. 2. Band.

Naturgeschichte:

e. Zoologie: Pokorny-Latzel, Tierkunde f. d. unteren n der Mittelsch. 29. (28.) Aufl. 4 K.
k: Pokorny-Fritsch, Pflanzenkunde f. d. unteren Klasr Mittelsch. 25. Aufl. 4 K.
retschko-Heimerl, Vorschule d. Botanik f. d. Gebrauch eren Klassen d. Mittelsch. 8. Aufl. 3 K 50 h.
Graber-Latzel-Altschul, Leitfaden der Körperlehre kunde f. d. oberen Klassen der Realsch. 6. Aufl. 4 K 70 h.
Scharizer, Lehrbuch d. Mineralogie u. Geologie f. d. oberen n d. Realsch. 3. (2.) Aufl. 3 K.

Chemie:

IV. Klasse. Rippel, Grundzüge der Chemie und Mineralogie f. d. d. Realsch. 3. Aufl. 2 K 50 h.
V. Klasse. Rippel, Grundlinien der Chemie f. Oberrealsch. 1. organische Chemie. 2. (1.) Aufl. 3 K 50 h.
VI. Klasse. Rippel, Grundlinien der Chemie f. Oberrealsch. 2. ganische Chemie. 2. Aufl.

Physik:

III. u. IV. Klasse. Wallentin, Grundzüge der Naturlehre f. d Klassen. Ausgabe B f. Realsch. 5. Aufl. 2 K 40 h.
VI. u. VII. Klasse. Wallentin, Lehrbuch d. Physik f. d. oberen Ausgabe B für Realsch. 12. Aufl. 3 K 80 h.

Geometrie:

IV. Klasse. Rosmannith-Schober, Grundriß der Geometri 11. Aufl. 1 K 30 h.
V. Klasse. Schiffner, Leitfaden f. d. Unterricht in der dare Geometrie. 1. Teil. 3. Aufl. 2 K 40 h.
VI. Klasse. Schiffner, wie in V. 2. Teil. 3. Aufl. 1 K 60 h.
VII. Klasse. Schiffner, wie in VI. 3. Teil. 2. (1.) Aufl. 3 K 50 l

Stenographie:

I. Kurs. Weizmann, Lehrgang der Gabelsbergerschen Ste 2. Aufl. 1 K 80 h.
Weizmann, Stenograph. Lesebuch. 1. Teil. 2. Aufl. 1 K 60
II. Kurs. Weizmann, Stenograph. Lesebuch. 2. Teil. 2. Aufl.
Weizmann, Lehrgang usw., wie im I. Kurs.

Empfehlenswerte Lehrbehelfe:

Sachs-Villatte, Wörterbuch der franz. u. deutschen Sprach ausgabe.) I. u. II. Teil (in gesonderten Bänden).
Pfohl, Neues Wörterbuch der franz. u. deutschen Sprache.
Petit Larousse illustré.
Heller, Aufgabensammlung aus der darstellenden Geometrie.
Die Schüler werden aufmerksam gemacht, bi kaufe der Lehrbücher genau die Auflage anzuse

---

XII. Verzeichnis

sämtlicher Schüler am Schlusse des Schuljahres 1910/1

(Die mit * bezeichenten sind vorzüglich geeignet, in die höhe aufzusteigen.)

I. Klasse A, 40 Schüler.

*Birmann Otto	Jansky Johann	Pribitzer Sta
Brandmann Rudolf	Klein Ernst	Schlosser Er
Braun Karl	Kohn Robert	Schreiber Liu
Damaschke Otto	*Korisko Johann	Schüller Jos
*Deutsch Richard	Kowař Karl	Seltenwert O
Diamant Josef	Kzywon Ernst	Silberg Salo
Fischer Erwin	Laufer Hugo	Spitz Nikolaus
Haas Oskar	Lazar Ernst	Srnetz Eri
*Handowsky Alfred	Lipa Franz	Szilágyi Rich
*Heß Friedrich	Löscher Alexander	Veit Johan
Himmelberg Oskar, Frhr. v.	Nowakowsky Julius	Vogelsang mi
	Oberhauser Karl	Wiberal Atus
Hock Franz	Oismüller Franz	Wollmarke Ru
Janiczek Adolf	Prenosil Josef	

I. Klasse B, 40 Schüler.

Holiczer Ludwig
Holl Karl
Hořicky Josef
Hutter Rudolf
Hütter Franz
Jontof-Hutter Hans
*Katz Ignaz
Katz Marzell
Lerchner Fritz
*Leschner Karl
Marbach Moritz
Meisl Oskar
Montag Ernst
Napravnik Wenzel
Navratil Karl
Necker Friedrich
Riha Robert
*Ritz Josef
Schier Josef
*Schlanger Moritz
Schodl Karl
Schrom Otto
Schwarz Heinrich
Seßler Ignaz
*Trauth Karl
*Zahel Alfred

II. Klasse A, 37 Schüler.

Glas Eugen
Glatzer Siegfried
*Görlich Johann
Herzl Max
Hörner Viktor
Huber Rudolf
Kladiva Josef
Kučera Januarius
Leskovar Anton
Mischel Salomon
*Nedvidek Karl
Negedly Werner
Neumann Ferdinand
Oppitz Hans
Pazdernik Karl
Ruland - Klein Bernhard
Slanař Heinrich
Spielmann Bruno
Spitzer Leopold
Steinfeld Egon
Toth Hugo
Wagner Walter
Weiß Friedrich
Zižkovsky Eduard

II. Klasse B, 37 Schüler.

Hillebrand Hans
Hofmann Robert
Jägersberger Jakob
Klein Felix
Krasny Rudolf
Ludwig Franz
Machata Josef
Malirsky Anton
Marschal Eduard
Maykut Norbert
Morgenstern Hugo
Pulgram Armin
Reininger Otto
Rosenberg Wilhelm
Schiller Hans
Schöchl Rudolf
Schönweitz Otto
Singer Fritz
Skalický Max
Streit Adolf
Türk Eduard
Weiß Theodor
Weiß Samuel
Wolf Rudolf

III. Klasse A, 42 Schüler.

Komor Heinrich
Kraus Robert
Kurzmann Fritz
Mendl - Felsenburg Otto
Mund Paul
*Paskusz Salomon
Proschek Robert
Rosset Walter
Schatz Herbert
Schiller Bruno
Schindler Friedrich
Schischa Fritz
Sonnek Otmar
Spitzer Geza
Springer Robert
Spurny Karl
Steiner Wilhelm
Stiasny Ernst
Uher Albert
Ungar Albert
Wachs Samuel
Waldmann Ernst
Weicht Franz
Wolf Herbert
Zett Josef
Zilsel Paul
Zwillinger Oskar

III. Klasse B, 42 Schüler.

Areli Heinrich
Bender Ernst
Binder Artur
Denzel Alois
Deutsch Bela
Duschnitz Alexander
Felmayer Rudolf
Fillinger Artur
Gefäll Josef
Golant Albert
Goldscheider Georg
Gottlieb Friedrich
Götzl Richard
*Guth Bruno
Haas Robert
Hajek Viktor
Heindl Johann
Herlitschka Fritz
Jellinek Karl
Kalinka Othmar
*Krames Josef
Krischke Josef
Landau Louis
Langsam Moritz
Lazar Hans
Lienhart Johann
Löw Philipp
Mendl Emanuel
Mayer Jos
Morawitz F
Moritz Joh
*Munk Ster
Nowak Eri
Perko, R. v
Polak Fran
*Raiman S
Reininger
Rink Otto
Schulhof V
Soyka Ro
Számek F
Winter Le

IV. Klasse A, 34 Schüler.

Berman Viktor
*Borel Gustav
Deutsch Karl
Elger Karl
Freiberger Paul
Friedländer Ludwig
Grabler Johann
Gutschera Ferdinand
Hammer Georg
Hirsch Ernst
Hlaweniczka Karl
Jokl Paul
Kleedorfer Friedrich
König Karl
Kohn Leo
Kollmer Anton
Kurzmann Leo
*Melzer Gustav
Nidetzky Franz
Parnaß Siegfried
Perutz Ladislaus
Psenička Friedrich
*Reich Anton
Rosenberg Oskar
Salz Joha
Sandig Ed
Schmetter
Spiegler L
Völker Fr
Wachsma
Wanka J
Wieland
Wollisch
Wunderb

IV. Klasse B, 33 Schüler.

Becke Hans
Braun Hermann
Cohn Erwin
Friederici Emil
Fröhlich Josef
*Grieß Friedrich
Gröger Johann
Großberg Isidor
Großmann Viktor
Hajek Leo
Handowsky Paul
Hedding Egon
Hofbauer Friedrich
Houdal Johann
Landesberger Alfred
Landesmann Erwin
Neumann Alexander
Nový Josef
Ostersetzer Gustav
Paul Karl
*Pick Rudolf
Plihal Eduard
Pollak F
*Schiff G
Schild Als
Schönma
*Siegert
*Spitz H
*Stefan
*Stenitzk
Strodl L
Tritsch-S
Weiß Ot

V. Klasse, 45[1] Schüler.

Baborka Johann
Böck Franz
Bürgmann Erwin
Dudič Viktor
*Ehrmann Friedrich
Garfein Emanuel
Gogoditsch Karl
Gröger Leopold
Hantschel Leopold
Heč Alfons
Henzel Adam
Keiß Erich
*Klinger Franz
Kohaut Hermann
Kohn Karl
Kohn Max
Kubat Karl
Leitkep Oskar
Lorenz Zdenko
Mährischl Julius
Malkovský Alois
Máša Gustav
Melaun Martin
Mokre Josef
*Nadler Gustav
v. Nagy Karl
Pálfi Johann
Pick Viktor
Postránecký Josef
Richer Hermann
Romstorfer Irmfried
Scheu Ernst
Schleifer
Schmid
Schön
Schwart
stedt
Spieß O
*Spitzer
Stern P
Stiasny
Thomast
Vetterm
Waldma
Weinber
Welzel
Wintern

VI. Klasse, 45 Schüler.

Robert	Herrmann Karl	Nadel Otto
s	Hornischer Josef	Pawliček Rudolf
ann	Infeld, R. v., Otto	Pessak Alexander
osef	Kärpel Ernst	Pichler Karl
aximilian	Kaufmann Karl	Polak Johann
ert	Knöpfelmacher Paul	Schäffler Gustav
n	Kohl Karl	Schiller Karl
	Kornfeld Otto	Schlegel Gustav
ichard	Krasny Franz	Schwarz Heinrich
t	Kropf Wilhelm	Skamperl Karl
	Kubai Alexander	Spielberg Max
	Kunzenbach Karl	Steskal Felix
l	Mahovsky Eugen	Thürriegl Rudolf
Egon	Mayer Otto	Wieland Johann
r Franz	Moser Gustav	Zwick Walter

VII. Klasse, 29 Schüler.

s	Heichler Markus	Pritzl Franz
x	*Hengl Franz	*Prowaznik Franz
ard	Jalkotzy Leopold	Ruff Albert
ugust	Kainz Rudolf	Steiner Hugo
egfried	Mauthner Alois	Steiner Leo
n Richard	*Mayer Ernst	Thieberg Herbert
nz	Morawetz Josef	Trantina Eduard
ax	Neubauer Leopold	Tostmann Friedrich
Josef	Opawa Friedrich	Weinreb Franz.
Viktor	Pollak Karl	

XIII. Kundmachung für das Schuljahr 1911/1

Aufnahme in die I. Klasse.

Für das Schuljahr 1911/12 erfolgen die Aufnahmsprüfunge I. Klasse am 6. und 7. Juli, dann am 16. September, wenn Plätze v sind; und zwar findet am 6. Juli um 2 Uhr nachmittags die schrift 7. Juli um 8 Uhr die mündliche Prüfung statt.

Die Aufnahmsbedingungen für neu eintretende Schüler sind

1. Schüler, welche in die erste Klasse einzutreten wünschen, Begleitung ihrer Eltern oder deren Stellvertreter in der Direktic zu erscheinen, den Tauf- oder Geburtsschein, das Zeugnis der z suchten Volksschule vorzuweisen und ein vollständig ausgefülltes abzugeben. Der Schulausweis muß gemäß dem Erlasse des k. k. desschulrates vom 17. September 1903, Z. 734/I, den Vermerk „Ausgefolgt zum Zwecke des Uebertrittes a Mittelschule". Schüler, deren Schulnachricht diesen Verm enthält, werden bei der Meldung zurückgewiesen.

Zur Aufnahme in die I. Klasse ist erforderlich:

1. Der Nachweis, daß der Aufzunehmende das 10. Lebensjah ginn des Schuljahres, in welchem die Aufnahme erfolgen soll, hat oder noch in dem Kalenderjahre, in welches der Beginn jahres fällt, vollendet.

2. Der Nachweis über den Besitz der nötigen Vorkenntnisse durch eine Aufnahmsprüfung geliefert wird.

Bei dieser Prüfung wird gefordert:

a) Jenes Maß von Wissen in der Religion, welches in den e Jahreskursen der Volksschule erworben werden kann.

b) Fertigkeit im Lesen und Schreiben der deutschen Sprach lateinischen Schrift; Kenntnis der Elemente der Formenl deutschen Sprache, Fertigkeit im Analysieren einfacher Sätze, Bekanntschaft mit den Regeln der Orthographie, Uebu vier Grundrechnungsarten in ganzen Zahlen.

Die Aufnahmsprüfung aus der deutschen Sprache u Rechnen wird schriftlich und mündlich vorgenommen. Die münd fung kann aus einem dieser Gegenstände erlassen werden, w schriftliche Prüfung mindestens eine zweifellos genügende Leistu Volksschulzeugnis (Schulausweis) mindestens die Note „gut" u Sind dagegen die Zeugnisnote und das Ergebnis der schriftlich entschieden ungünstig, so ist der Schüler zur mündliche nicht zuzulassen, sondern als unreif zurückzuweisen (Minis vom 27. Mai 1884, Z. 8016). Erst die gut bestandene Aufnahmsprü rechtigt zum Eintritt in die Realschule.

Eine Wiederholung der Prüfung, sei es an de oder an einer anderen Lehranstalt, ist in de Schuljahre unzulässig. Um einem allfälligen Vo der Uebertretung dieses Verbotes vorzubeugen sen die Namen der an einer Anstalt Zurückgewe den Direktoren der anderen Lehranstalten mi werden. (Erlaß des k. k. Ministeriums für Kultus u terricht vom 2. Jänner 1886, Z. 85).

Jene Schüler, welche die erste Klasse zu holen beabsichtigen, haben sich in Begleitung Eltern oder deren Stellvertreter ebenfalls sp 6. Juli um 2 Uhr bei der Direktion zu melden u letzte Semestralzeugnis mitzubringen.

Aufnahme fremder Schüler in die II.—VII. Klasse.

Aufnahmswerber, welche in eine höhere Klasse als die st treten beabsichtigen und ein Zeugnis über die mit Erfolg absvie mittelbar vorhergehende Realschulklasse nicht beizubringen vermö ben sich einer Aufnahmsprüfung aus allen obligaten Unterrichtsg

erziehen. Hiefür ist eine gesetzlich festgesetzte Taxe von 24 K
Die Zulassung zu dieser Prüfung erfolgt nur nach Maßgabe der
n Plätze am 16. September zwischen 9 und 10 Uhr vormittags.
selbst wird an diesem Tage um 2 Uhr beginnen und wird am
er um 8 Uhr fortgesetzt werden. Schüler, welche von einer gleich
n Realschule kommen und in eine höhere Klasse als die erste
gen Anstalt eintreten wollen, haben nebst dem Tauf- oder Ge-
, einem vollständig ausgefüllten Nationale sämtliche Realschul-
orzuweisen, von denen das letzte mit der Abgangsklausel ver-
muß.

ener Schüler, welche im Schuljahre 1910/11 der Anstalt angehörten.

r, welche ihre Studien an der Anstalt fortsetzen wollen, haben
September zwischen 8 und 9 Uhr in der Klasse zur Einschrei-
lden, in welche aufzusteigen sie geeignet sind, und das letzte
is, sowie ein vollständig ausgefülltes Nationale abzugeben.
sich nicht rechtzeitig einschreiben lassen, werden als ausge-
chtet und ihre Plätze werden an fremde Aufnahmswerber ver-
en.

Wiederholungs- und Nachtragsprüfungen.

r, welche eine Wiederholungs- oder eine Nachtragsprüfung zu
ben, melden sich am 16. September um 8 Uhr in Anhoffung eines
rgebnisses der Prüfung in die nächst höhere Klasse. Die sofort
nden Wiederholungsprüfungen sind im Laufe des Vormittags

Eröffnungs-Gottesdienst.

September haben sich die katholischen Schüler um 8¼ Uhr im
zu versammeln, um zum Gottesdienste geführt zu werden. Nach
lienste werden sie wieder in das Schulhaus geführt werden, wo
chulvorschriften erklärt werden. Die nicht katholischen Schüler
n Schulgebäude die Rückkehr der Katholiken von der Kirche.

Schulgeld.

chulgeld ist in den ersten sechs Wochen eines jeden Semesters
s k. k. Postsparkassenamtes zu entrichten und beträgt für jedes
i K.
dingungen für die Schulgeldbefreiung und Stundung der Zahlung
ldes werden den Schülern rechtzeitig bekannt gegeben werden.
gelmäßige Unterricht beginnt am 20. September um 8 Uhr.

Programm

des

tholischen Gymnasiums an der Apostelkirche

zu Köln.

Siebentes Schuljahr. 1866 — 1867.

Zusammengestellt von dem

Director des Gymnasiums

Prof. **H. Bigge.**

Inhalt:

der Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen. — Von dem Oberlehrer J. P. Schmidt.
nachrichten. — Von dem Director.

Köln.

Gedruckt bei J. P. Bachem, Verlagsbuchhändler und Buchdrucker.

1867.

Aus der bekannten Reihe:

$$\log (1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

folgt, wenn x gleich (—1) gesetzt wird:

$$\log o = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \ldots$$

Nun ist aber log o gleich (— ∞); also ergibt sich:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = \infty.$$

Eine unendliche Reihe heißt convergent, wenn der Unterschied zwischen der Summe all und der Summe der n ersten Glieder kleiner werden kann, als jede noch so kleine angebliche Gr dies nicht der Fall, so wird die Reihe divergent genannt.

Es muß hiernach eine convergente Reihe immer eine abnehmende oder fallende, aber nach bewiesenen Lehrsatze nicht jede fallende eine convergente sein.

Eine steigende Reihe ist immer divergent, eine divergente aber nicht immer steigend.

Bezeichnet man die Summe aller Glieder einer unendlichen Reihe mit S, die der n ersten so hat man:

$$S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4} + \ldots$$

und, wenn man $u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4} + \ldots$ gleich E (Ergänzung d Reihe) setzt:

$$S - S_n = E.$$

In einer convergenten Reihe muß E kleiner als jede angebliche Größe werden können, we hinlänglich groß gesetzt wird. Hiernach ist die oben angeführte erste Reihe convergent; den S 1 und

wenn n gleich 1 ist, S_n gleich $\frac{1}{2}$,

„ n „ 2 „ S_n „ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ oder $\frac{3}{4}$

„ n „ 3 „ S_n „ $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$ „ $\frac{7}{8}$

„ n „ 4 „ S_n „ $\frac{7}{8} + \frac{1}{16}$ „ $\frac{15}{16}$

u. s. w.

Daher ist E gleich $\frac{1}{2}$, wenn n gleich 1 ist;

„ „ E „ $\frac{1}{4}$, „ n „ 2 „

„ „ E „ $\frac{1}{8}$, „ n „ 3 „

„ „ E „ $\frac{1}{16}$, „ n „ 4 „ u. s. w.

a $S - S_n$ gleich E ist, so ist S_n gleich $S - E$, also auch Grenze S_n oder lim S_n gleich
m E. Nun wird aber E unendlich klein, wenn n unendlich groß ist; folglich ist lim E gleich
nithin lim S_n gleich S.

---

1. Eine Reihe kann fallend sein, ohne daß ihre letzten Glieder unendlich klein sind. Es ist
der fallenden Reihe

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{8}{15} + \frac{16}{31} + \frac{32}{63} + \ldots$$

ed größer als $\frac{1}{2}$.

e letzten Glieder einer steigenden Reihe müssen nicht unendlich groß sein. In der steigenden Reihe

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{3}{7} + \frac{7}{15} + \frac{15}{31} + \frac{31}{63} + \ldots$$

Glied vom zweiten an kleiner als $\frac{1}{2}$.

t die Summe (S) einer unendlichen Reihe einer endlichen Größe gleich, so
Reihe convergent.

nn da die Reihe kein Ende hat und dennoch S einer endlichen Größe gleich ist; so muß die
end sein. Ist S aber eine endliche Größe, und die Reihe fallend; so müssen ihre letzten Glieder
klein werden. Denn bliebe jedes Glied größer als eine bestimmte Zahl, wie es in der 1. Reihe
der Fall ist; so müßte die Summe aller Glieder schon unendlich groß sein, wenn jedes Glied
Zahl gleich wäre. Ist die Reihe aber fallend und werden die letzten Glieder unendlich klein;
$S - S_n$ oder E kleiner als jede angebliche Größe werden können, also die Reihe convergent sein.
t die Summe (S) einer unendlichen Reihe unendlich groß, so ist die Reihe
nt, weil eine unendliche Größe (S) weniger einer endlichen (S_n) gleich einer unendlichen ist und
icht kleiner als jede angebliche Größe werden kann.

2. Jede unendliche Reihe, deren Glieder eine fallende geometrische Pro-
bilden, ist convergent.

ist z. B. die unendliche Reihe

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + aq^6 + \ldots$$

, wenn q kleiner als 1 ist.

nn in diesem Falle ist die Summe der Reihe der endlichen Größe $\frac{a}{1-q}$ gleich und also der 1.
vorigen §. anwendbar.

merkung: Alle Glieder der Reihen, von denen in der Folge die Rede ist, sind als positive
betrachten, wenn nicht auf deren verschiedene Vorzeichen besonders aufmerksam gemacht wird.

3. Sind die Glieder einer fallenden Reihe abwechselnd positiv und negativ
letzten unendlich klein, so ist die Reihe convergent.

ist z. B. die Reihe

$$1, \left(-\frac{1}{2}\right), \frac{1}{3}, \left(-\frac{1}{4}\right), \frac{1}{5}, \left(-\frac{1}{6}\right) \ldots \text{ convergent.}$$

Addirt man die 4 ersten Glieder, so ergibt sich:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} < S,$$

weil die folgenden Glieder lauter positive Differenzen liefern:

$$\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) + \cdots$$

Ebenso folgt: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} > S.$

Es ist also S größer, als die Summe der 4 ersten und kleiner, als die Summe der 5 Glieder. Der Unterschied dieser beiden Summen ist aber genau $\frac{1}{5}$. Folglich muß der Unterschied zwischen S und der Summe der 4 ersten Glieder kleiner als $\frac{1}{5}$ sein. Hieraus ergibt sich, daß der Unterschied zwischen S und S_n weniger als das $(n+1)$te Glied beträgt. Dieses kann aber gemäß der Voraussetzung kleiner werden, als jede noch so kleine angebliche Größe; folglich ist die Reihe convergent.

Hätten die Glieder dieser Reihe dasselbe Vorzeichen; so wäre die Reihe, wie oben dargethan, divergent. Eine Reihe kann also convergent sein, wenn auch die absoluten Werthe ihrer Glieder eine divergente Reihe bilden.

§. 4. Eine Reihe ist convergent, wenn ihre Glieder wenigstens von einer Stelle an kleiner sind, als die entsprechenden Glieder einer convergenten Reihe, deren sämmtliche Glieder gleiche Vorzeichen haben.

Es sei z. B. von den beiden Reihen

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \ldots + v_n + v_{n+1} + v_{n+2} + \cdots$$

die 2. convergent und außerdem $u_1 < v_1$ $u_2 < v_2$ u. s. w. Es ergibt sich dann:

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots < v_n + v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots$$

Also ist die Ergänzung der 1. Reihe kleiner als die der 2. oder $E < E'$. Da aber die 2. convergent ist, so wird E' um so kleiner, je größer n ist. Also muß dies auch mit E um somehr der Fall sein, d. h. die 1. Reihe ist convergent.

Nach diesem Satze läßt sich aus der Convergenz der ersten Reihe der Einleitung auf die Convergenz folgender Reihen schließen:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^6} + \cdots$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{5^9} + \frac{1}{5^{11}} + \ldots$$

Die Reihe $1, \frac{1}{1.2}, \frac{1}{1.2.3}, \ldots \frac{1}{1.2.3\ldots n}, \frac{1}{1.2.3\ldots n\,(n+1)}, \ldots$ ist convergent, weil ihre Glieder von der $(n+1)$ten Stelle an kleiner sind, als die entsprechenden der geometrischen Progression:

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}, \frac{1}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{1}{n}, \frac{1}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{1}{n^2} \cdots$$

die beiden Reihen

$u_1 \sin a,\ u_2 \sin b,\ u_3 \sin c,\ u_4 \sin d,\ u_5 \sin e, \ldots$

$u_1 \cos a,\ u_2 \cos b,\ u_3 \cos e,\ u_4 \cos d,\ u_5 \cos e, \ldots$

ergent, wenn die Reihe

$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ u_6 \ldots$ convergirt.

enso leicht wie die Richtigkeit des letzten Satzes läßt sich die des folgenden darthun:

ne Reihe ist divergent, wenn ihre Glieder gleiches Vorzeichen haben und von einer Stelle an größer sind, als die entsprechenden Glieder einer diver-Reihe.

ist z. B. die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{4}},\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{7}},\ \frac{1}{\sqrt{8}} \ldots$$

weil die Reihe

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8} \ldots \text{ divergirt.}$$

vorige Satz verlangt, daß alle Glieder der 2ten Reihe dasselbe Zeichen haben, während die bwechselnd positiv und negativ sein können. Der letzte Satz fordert gerade das Umgekehrte; so der absolute Werth eines Gliedes der 1ten Reihe größer sein, als der absolute Werth des en Gliedes der 2ten Reihe.

. Eine Reihe ist convergent, wenn jedes Glied, von einer bestimmten n, durch sein vorhergendes dividirt, einen Quotienten liefert, welcher klei-ls der Quotient der entsprechenden Glieder einer convergenten Reihe.

z. B. von den beiden Reihen

$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots u_n, u_{n+1}, u_{n+2} \ldots$

$v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots v_n, v_{n+1}, v_{n+2} \ldots$

ergent und finden ferner folgende Beziehungen statt:

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < \frac{v_{n+2}}{v_{n+1}},\ \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < \frac{v_{n+3}}{v_{n+2}} \text{ u. s. w.,}$$

) die 1te Reihe convergiren.

man nämlich

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = q,\ \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} = q_1,\ \frac{u_{n+4}}{u_{n+3}} = q_2,$$

$$\frac{v_{n+2}}{v_{n+1}} = r,\ \frac{v_{n+3}}{v_{n+2}} = r_1,\ \frac{v_{n+4}}{v_{n+3}} = r_2$$

u. s. w.

:

$u_{n+2} = q.\ u_{n+1},\ u_{n+3} = q_1 u_{n+2},\ u_{n+4} = q_2 u_{n+3}$ u. s. w.

$v_{n+2} = r.\ v_{n+1},\ v_{n+3} = r_1 v_{n+2},\ v_{n+4} = r_2 v_{n+3}$ u. s. w.

) erhält man durch Addition:

$u_{n+3} + u_{n+4} + \ldots = q.\ u_{n+1} + q q_1 u_{n+1} + q.q_1 q_2 u_{n+1} + \ldots$

$v_{n+3} + v_{n+4} + \ldots = r.\ v_{n+1} + r r_1 v_{n+1} + r r_1 r_2 v_{n+1} + \ldots$

oder, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichungen noch Gleiches ($u_{n+1} = u_{n+1}$ und v_{n+1} v_{n+1}) hinzufügt:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4} \ldots = u_{n+1}(1 + q + qq_1 + qq_1q_2 +$$
$$v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + v_{n+4} \ldots = v_{n+1}(1 + r + rr_1 + rr_1r_2 +$$

Gemäß der Annahme: $q < r$, $q_1 < r_1$, $q_2 < r_2$ u. s. w. ergibt sich:

$$1 + q + qq_1 + qq_1q_2 \ldots < 1 + r + rr_1 + rr_1r_2 + \ldots$$

Daher hat man:

$$u_{n+1}(1 + q + qq_1 + qq_1q_2 \ldots) < u_{n+1}(1 + r + rr_1 + rr_1r_2 +$$

und folglich $E < \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} E'$, wenn mit E und E' die Ergänzungen der Reihen bezeichnet wer

Nun nimmt aber der Factor $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$ um so mehr ab, je größer n wird. Da nämlich $\frac{u}{u}$

kleiner als $\frac{v_{n+2}}{v_{n+1}}$ ist, so folgt:

$$u_{n+2} < \frac{v_{n+2} \cdot u_{n+1}}{v_{n+1}} \quad \text{oder} \quad \frac{u_{n+2}}{v_{n+2}} < \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}.$$

Ebenso nimmt der Factor E' immer mehr ab, wenn n wächst. Also kann auch die Erg E der ersten Reihe kleiner werden, als jede angebliche Größe, d. h. die 1te Reihe ist converge

Eine Reihe ist divergent, wenn jedes Glied, von einer bestimmten Stel durch sein vorhergehendes dividirt, einen Quotienten liefert, der größe ist der Quotient der entsprechenden Glieder einer divergenten Reihe.

Die Richtigkeit dieses Satzes wird auf ähnliche Weise wie die des vorigen dargethan.

§. 6. Ist die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots$ convergent; so co girt auch die Reihe $u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + 16u_{16} + \ldots$

Man kann nämlich folgende Gleichung und Ungleichheiten aufstellen:

$$u_1 + u_2 = u_1 + u_2$$
$$u_3 + u_4 > 2\,u_4$$
$$u_5 + u_6 + u_7 + u_8 > 4\,u_8$$
$$u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14} + u_{15} + u_{16} > 8\,u_{16}$$
u. s. w.

Daher hat man:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + \ldots > u_1 + u_2 + 2u_4 + 4u_8 + u_{16}$$

Nun ist aber die linke Seite dieser Ungleichheit gemäß der Annahme eine convergente Reih muß um so mehr die rechte Seite convergiren oder ihre Summe gleich einer endlichen Grö sein her ist auch

$$u_1 + 2(u_2 + 2u_4 + 4u_8 + 8u_{16} + \ldots)$$

eine endliche Größe oder die Reihe

$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + 16u_{16} + \ldots \text{ convergirt.}$$

ist z. B. die Reihe

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{12^3} + \frac{1}{14^3} + \frac{1}{16^3} + \ldots$$

Daher ist auch die aus ihr abgeleitete Reihe

$$\frac{1}{2^3} + \frac{2}{4^3} + \frac{4}{8^3} + \frac{8}{16^3} + \frac{16}{32^3} + \ldots \text{ convergent.}$$

(fallende) Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots$ ist convergent, wenn
e $u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + 16u_{16} + \ldots$ es ist.

die 1te Reihe eine fallende ist, so hat man

$$u_1 = u_1$$
$$u_2 + u_3 < 2u_2$$
$$u_4 + u_5 + u_6 + u_7 < 4u_4$$
$$u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14} + u_{15} < 8u_8$$
u. s. w.

lich ergibt sich:

$+u_3) + (u_4 + u_5 + u_6 + u_7) + \ldots < u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \ldots$

nun die rechte Seite dieser Ungleichheit eine convergente Reihe; so muß es um so mehr die
weil auf dieser Seite jedes Glied oder jede Abtheilung, vom 2ten Gliede an, kleiner ist, als
hende auf jener.

wird hiernach die (fallende) Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{\sqrt{3^3}} + \frac{1}{\sqrt{4^3}} + \frac{1}{\sqrt{5^3}} + \frac{1}{\sqrt{6^3}} + \frac{1}{\sqrt{7^3}} + \ldots$$

ein, wenn folgende Reihe:

$$1 + \frac{2}{\sqrt{2^3}} + \frac{4}{\sqrt{4^3}} + \frac{8}{\sqrt{8^3}} + \frac{16}{\sqrt{16^3}} + \frac{32}{\sqrt{32^3}} + \ldots \text{ oder}$$

die Reihe $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{16}} + \frac{1}{\sqrt{32}} + \ldots$

Diese letztere ist aber convergent, weil sie eine geometrische Reihe bildet, deren Exponent oder
niger als 1 beträgt.

Ist die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots$ divergent; so divergirt
reihe $u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + 16u_{16} + \ldots$

gesetzt die Reihe $u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + 16u_{16} + \ldots$ wäre convergent; so
§. 6 auch die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots$ convergent sein. Nun ist
mäß der Annahme divergent; also muß auch jene divergent sein.

) beweist man die Richtigkeit des Satzes:

ie Reihe $u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + 16u_{16} + \ldots$ divergent; so diver-
ie Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots$

Es ist z. B. die Reihe

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

divergent, weil die Reihe

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{8}{15} + \frac{16}{31} + \frac{32}{63} + \ldots$$ divergirt.

§. 8. Eine Reihe ist convergent, wenn, wenigstens von einer gewissen an, der absolute Werth jedes Gliedes durch den absoluten Werth des vorhergehenden dividirt, einen Quotienten liefert, der immer kleiner bleibt als eine Zahl, weniger als 1 beträgt.

Hat man z. B. die Reihe

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{3.5^3}, \frac{1}{5.5^5}, \frac{1}{7.5^7}, \frac{1}{9.5^9} \ldots$$

so ist u_n gleich $\frac{1}{(2n-1)\,5^{2n-1}}$ und $u_{n-1} = \frac{1}{(2n-3)\,5^{2n-3}}$

und folglich $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(2n-3)\,5^{2n-3}}{(2n-1)\,5^{2n-1}} = \frac{2n-3}{2n-1} \cdot \frac{1}{5^2}$

Der Quotient $\frac{2n-3}{2n-1} \cdot \frac{1}{5^2}$ nähert sich, je größer n wird, der Zahl $\frac{1}{5^2}$, kann aber Zahl, welche kleiner als 1 ist, niemals gleich werden.

Es wird nun behauptet, daß jene Reihe deshalb convergent ist.

Bezeichnet man die Zahl $\frac{1}{5^2}$ mit q und sind die Quotienten

$$\frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_2}, \frac{u_4}{u_3}, \frac{u_5}{u_4}, \frac{u_6}{u_5}, \frac{u_7}{u_6} \ldots$$

schon vom 2ten Gliede an alle kleiner als q; so folgt:

$$u_2 < qu_1,\ u_3 < qu_2,\ u_4 < qu_3,\ u_5 < qu_4 \text{ u. s. w.}$$

Es muß also jedes Glied jener Reihe, vom 2ten an gerechnet, kleiner als das entsprechende der Reihe:

$$u_1 + qu_1 + qu_2 + qu_3 + qu_4 + qu_5 + qu_6 + \ldots$$

und mithin gewiß kleiner sein, als das entsprechende Glied folgender Reihe:

$$u_1 + qu_1 + q^2u_1 + q^3u_1 + q^4u_1 + q^5u_1 + q^6u_1 + \ldots$$

Diese dritte Reihe ist aber convergent, weil q kleiner ist als 1; folglich muß auch die zweite und mithin um so mehr die erste Reihe convergiren.

Sind die Glieder der ersten Reihe abwechselnd positiv und negativ, so erleidet der Satz offenbar keine Aenderung.

Aus dem Beweise folgt, daß die Summe der n ersten Glieder der ersten Reihe von der Summe aller ihrer Glieder um weniger als $\frac{u_{n+1}}{1-q}$ verschieden ist. Nimmt man also für die Summe

Summe ihrer 4 ersten Glieder, so ist der begangene Fehler kleiner als

$$\frac{\frac{1}{9.5^9}}{1-\frac{1}{5^2}} \text{ oder als } \frac{1}{24.9.5^7}.$$

rägt der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ von einer gewissen Stelle an beständig mehr als eine Zahl q, die als 1; so muß jedes Glied von jener Stelle an größer sein als sein vorhergehendes und somit e divergiren.

der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ im 1ten Falle, wenn die Reihe convergirt, kleiner als 1, im 2ten n die Reihe divergirt, größer als 1 bleiben muß, selbst wenn n unendlich ist; so kann man ufstellen:

e Reihe ist convergent oder divergent, wenn $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ kleiner oder größer

st z. B. die Reihe

$$1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

denn der Quotient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1.2.3.4\ldots n(n+1)} : \frac{1}{1.2.3.4\ldots.n} \text{ oder } = \frac{1}{n+1};$$

$$\frac{1}{+1} = 0 \text{ und } 0 < 1.$$

Manchmal läßt sich nach folgendem Satze die Convergenz einer Reihe leichter ermitteln, n vorigen:

n in einer Reihe vom nten Gliede an die Größe $\sqrt[n]{u_n}$ weniger als eine trägt, die kleiner als 1 ist; so convergirt die Reihe.

ämlich die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$

daß $\sqrt[n]{u_n}$ weniger als q, $\sqrt[n+1]{u_{n+1}}$ weniger als q u. s. w. beträgt; so ergeben Ungleichheiten:

$$u_n < q^n, \quad u_{n+1} < q^{n+1}, \quad u_{n+2} < q^{n+2} \text{ u. s. w.}$$

h sind die Glieder der Reihe, vom nten Gliede an, kleiner als die Glieder der geometrischen

$$q^n + q^{n+1} + q^{n+2} + q^{n+3} + q^{n+4} + \ldots$$

se Progression aber fallend ist, indem gemäß der Annahme q weniger als 1 beträgt; so ie nach §. 2 convergent sein.

Ist $\sqrt[n]{u_n}$ größer als q und q größer als 1; so läßt sich auf ähnliche Weise darthun Reihe convergirt.

Hat die Größe $\sqrt[n]{u_n}$ eine bestimmte Grenze; so ist sie gleich der Grenze von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, bo cher im vorigen §. die Rede war.

§. 10. Multiplicirt man das allgemeine Glied u_n einer Reihe mit der P n^r, deren Exponent r mehr als 1 beträgt, und ist $\lim n^r u_n = 0$; so ist die convergent.

Gesetzt, der Werth von $n^r u_n$ sei gleich der Zahl z: so müssen sich gemäß der Annahme Ungleichheiten ergeben:

$(n+1)^r u_{n+1} < z$, $(n+2)^r u_{n+2} < z$, $(n+3)^r u_{n+3} < z$ u. s. w.

Daher hat man:

$$u_{n+1} < \frac{z}{(n+1)^r}, \quad u_{n+2} < \frac{z}{(n+2)^r}, \quad u_{n+3} < \frac{z}{(n+3)^r} \text{ u. s. w.}$$

Hieraus ergibt sich durch Addition:

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots < \frac{z}{n^r} + \frac{z}{(n+1)^r} + \frac{z}{(n+2)^r} + \frac{z}{(n+3)^r}$$

Die rechts vom Zeichen < stehende Reihe ist convergent; denn sie stellt, da n eine positive Zahl ist, folgende Reihe dar:

$$\frac{z}{1^r} + \frac{z}{2^r} + \frac{z}{3^r} + \frac{z}{4^r} + \ldots + \frac{z}{n^r} + \frac{z}{(n+1)^r} \text{ u. s. w.}$$

Diese Reihe aber ist nach §. 6 convergent, weil die Reihe

$$\frac{z}{1^r} + \frac{2z}{2^r} + \frac{4z}{4^r} + \frac{8z}{8^r} + \frac{16z}{16^r} + \ldots$$

eine fallende geometrische Progression bildet. Ist nun die Reihe rechts vom Zeichen < convergent Summe (S) also eine unendliche Größe; so muß um so mehr die Summe der Reihe links vom Zeichen eine endliche Größe sein und also diese Reihe convergiren.

Es ist z. B. die Reihe

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \frac{1}{6\sqrt{6}} + \ldots$$

convergent. Denn das allgemeine Glied ist $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ und dies gibt mit $n^{\frac{5}{4}}$ multiplicirt $\left(\frac{n^{\frac{5}{4}}}{n\sqrt{n}} = \frac{n^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{\frac{1}{n}}\right)$, dessen Grenze gleich o ist.

Wenn man das allgemeine Glied u_n einer Reihe n mal nimmt und das erhaltene Product nicht null zur Grenze hat; so ist die Reihe divergent.

Da nämlich $n u_n$ nicht o zur Grenze hat; so muß für einen bestimmten Werth von n jedes

derholt, größer als eine ganze Zahl z sein. Folglich ist auch u_n größer als $\frac{z}{n}$. Wie aber leitung dargethan wurde, ist jede Reihe schon divergent, deren allgemeines Glied $\frac{1}{n}$ ist; mit- ine Reihe, deren allgemeines Glied größer als $\frac{1}{n}$ ist, um so mehr divergiren. ist hiernach die Reihe

$$\frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} + \frac{1}{\log 5} + \frac{1}{\log 6} + \ldots$$

Denn

$u_n = \frac{1}{\log (n+1)}$, also $n u_n = \frac{n}{\log (n+1)}$ und $\lim \frac{n}{\log (n+1)}$ ist o.

---

11. Der §. 8 gibt über die Convergenz und Divergenz der Reihen Auskunft, wenn $\frac{1}{}$ mehr oder weniger als 1 beträgt. Gehen wir nun zu dem Falle über, wenn $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ gleich ist. Es kann alsdann eine Reihe divergent und convergent sein. ivergente Reihe ist z. B.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots$$

ist $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ gleich $\frac{n}{n+1}$ und also $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ gleich 1. Die Divergenz dieser Reihe wurde eitung dargethan.

convergente Reihe ist folgende:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$$

Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$, also $\lim \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$.

onvergenz dieser Reihe folgt aus §. 6, weil die Reihe

$$1 + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{4^2} + \frac{8}{8^2} + \frac{16}{16^2} + \ldots,$$

allende geometrische Progression bildet, convergirt.

ese zwei Beispiele darthun, läßt sich manchmal schon mittels der bisherigen Lehrsätze die Con- Divergenz der Reihen, wenn $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ gleich 1 ist, beurtheilen; aber dies ist durchaus der Fall, sondern man bedarf dazu noch besonderer Lehrsätze. Dieselben sind aber von der uotienten $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ abhängig, weßhalb wir diese zuerst näher angeben müssen.

Die beiden Reihen, von welchen zuletzt die Rede war, liefern für $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ einen Quotiten folgender Form:

$$\frac{n^m + a\,n^{m-1} + b\,n^{m-2} + c\,n^{m-3} + \ldots}{n^m + \alpha\,n^{m-1} + \beta\,n^{m-2} + \gamma\,n^{m-3} + \ldots}$$

Denn $\frac{n}{n-1}$ hat offenbar diese Form und $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$ ist gleich $\frac{n^2}{n^2+2n+1}$

Die Reihe $\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \ldots$ gibt den Quo

$$\frac{n^m}{(n+1)^m} \text{ oder } \frac{n^m + o.\,n^{m-1} + \ldots}{n^m + m\,n^{m-1} + \ldots}$$

und die Reihe $1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \ldots$ den Quotiente

$$\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} \text{ oder } \frac{n^2 - n + \frac{1}{4}}{n^2 + \frac{1}{2}n}.$$

Jeder Quotient von der angeführten Form hat offenbar die Einheit zur Grenze.

§. 12. Gesetzt die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$, welche wir mit I bezei liefere für $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ einen Quotienten, der die Form

$$\frac{n^m + a\,n^{m-1} + b\,n^{m-2} + c\,n^{m-3} + \ldots}{n^m + \alpha\,n^{m-1} + \beta\,n^{m-2} + \gamma\,n^{m-3} + \ldots}$$

habe; es lassen sich dann folgende 3 Sätze aufstellen:

1. Ist die Differenz $a - \alpha$ größer als o, d. h. positiv; so ist die Rei gend und sind die letzten Glieder unendlich groß.

Bezeichnet man $n^m + a\,n^{m-1} + b\,n^{m-2} c\,n^{m-3} + \ldots$ mit P und $\alpha\,n^{m-1} + \beta\,n^{m-2} + \gamma\,n^{m-3} + \ldots$ mit Π; so erhält man durch Subtracti Gleichung:

$$P - \Pi = (a-\alpha)\,n^{m-1} + (b-\beta)\,n^{m-2} + (c-\gamma)\,n^{m-3} + \ldots$$

Da $a - \alpha$ positiv ist; so muß, wenn n hinlänglich groß genommen wird, das Glied $(a - \alpha)\,n$ größer werden als alle übrigen Glieder auf der rechten Seite der Gleichung zusammen. auch $P - \Pi$ gleich einer positiven Größe, also auch P größer als Π und folglich, da sich P wie u_{n+1} zu u_n verhält, u_{n+1} größer als u_n, d. h. die Reihe ist steigend.

Der zweite Theil der Behauptung läßt sich mit Hülfe des ersten Theiles beweisen:

Potenzirt man jedes Glied der Reihe I mit der unbestimmten positiven ganzen Zahl r und di dann das 2te Glied durch 2, das 3te durch 3 u. s. w.; so erhält man die Reihe

$$\frac{u_1^r}{1} + \frac{u_2^r}{2} + \frac{u_3^r}{3} + \frac{u_4^r}{4} + \ldots + \frac{u_n^r}{n} + \ldots$$

welche wir die Reihe II nennen und der Kürze wegen durch

$$U_1 + U_2 + U_3 + {}_4 + \ldots + U_n + \ldots$$

darstellen.

rſuchen wir nun, unter welcher Bedingung die Reihe II ſteigend iſt:

$$= \frac{n u^r{}_{n+1}}{(n+1)\, u^r{}_n} = \frac{n\,(n^m + a\,n^{m-1} + b\,n^{m-2} + c\,n^{m-3} + \ldots)_r}{(n+1)\,(n^m + \alpha\,n^{m-1} + \beta\,n^m + \gamma\,n^{m-3} + \ldots)^r}$$

ichten wir im Zähler und Nenner dieſes Quotienten die angedeuteten Rechnungen:

$$a\,n^{m-1} + b\,n^{m-2} + \ldots)^r = [n^m + (a\,n^{m-1} + b\,n^{m-2} + \ldots)]^r =$$

$$= n^{mr} + r\,n^{m(r-1)}(a\,n^{m-1} + b\,n^{m-2} + \ldots) + \ldots =$$

$$= n^{mr} + ar\,n^{mr-1} + \ldots$$

ich iſt der Zähler gleich $n^{mr+1} + ar\,n^{mr} + \ldots$

o folgt:

$$m-1} + \beta\,n^{m-2} + \ldots)^r = n^{mr} + rn^{m(r-1)}(\alpha\,n^{m-1} + \beta\,n^{m-2} + \ldots) + \ldots$$

r iſt der Nenner gleich $n^{mr+1} + r\alpha\,n^{mr} + n^{mr} + \ldots$ oder gleich $n^{mr+1} + n^{mr} + \ldots$

ich hat man:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n^{mr+1} + ar\,n^{mr} + \ldots}{n^{mr+1} + (r\alpha + 1)\,n^{mr} + \ldots}$$

Reihe II iſt nun ſteigend, wenn die Differenz $ar - (r\alpha + 1)$ oder $r(a - \alpha) - 1$ Da aber $a - \alpha$ gemäß der Annahme poſitiv iſt; ſo iſt für r nur ein ſolcher Werth zu $r(a - \alpha)$ größer als 1 iſt.

ber die Reihe II ſteigend; ſo muß der Zähler des n ten Gliedes $\left(\frac{u_n{}^r}{n}\right)$, da der Nenner ichſt und alſo unendlich groß werden kann, auch unendlich groß ſein. Iſt aber $u_n{}^r$ unend- muß auch u_n einen unendlich großen Werth haben. Alſo ſind die letzten Glieder der Glei- idlich groß.

iſt die Differenz $a - \alpha$ kleiner als o, d. h. negativ; ſo iſt die Reihe I fal- ſind die letzten Glieder der Reihe unendlich klein.

$- \alpha$ negativ iſt; ſo muß die rechte Seite der Gleichung

$$\Pi = (a - \alpha)\,n^{m-1} + (b - \beta)\,n^{m-2} + (c - \gamma)\,n^{m-3} + \ldots$$

inglich groß genommen wird, negativ werden. Iſt aber $P - \Pi$ gleich einer negativen uß P kleiner als Π und folglich u_{n+1} kleiner als u_n d. h. die Reihe I fallend ſein.

Theil der Behauptung wird mit Hülfe des erſten Theiles dargethan:

ren wir jedes Glied der Reihe I wieder mit r, multipliciren dann das 2te Glied mit 2, 3 u. ſ. w.; ſo ergibt ſich die Reihe:

$$2u_2{}^r + 3u_3{}^r + 4u_4{}^r + \ldots + nu_n{}^r + (n+1)\,u^r{}_{n+1} + \ldots$$

e Reihe III nennen und kurz mit

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_n + U_{n+1} + \ldots$$

Suchen wir nun die Bedingung, unter welcher die Reihe III fallend iſt:

$$= \frac{(n+1)\,u^r{}_{n+1}}{n\,u^r{}_n} = \frac{(n+1)\,(n^m + an^{m-1} + bn^{m-2} + \ldots)^r}{n\,(n^m + \alpha\,n^{m-1} + \beta\,n^{m-2} + \ldots)^r}$$

ihler dieſes Quotienten iſt gleich

$$^{-1} + ra\,n^{mr} + n^{mr} + \ldots \text{ oder } n^{mr+1} + (ra + 1)\,n^{mr} + \ldots$$

er gleich $n^{mr+1} + \alpha r\,n^{mr} + \ldots$

Daher hat man:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n^{mr+1} + (ra+1)\,n^{mr} + \ldots}{n^{mr+1} + \alpha r\, n^{mr} + \ldots}$$

Die Reihe III ist nun fallend, wenn $ar + 1 - \alpha r$ oder $1 - r(\alpha - a)$ negat ist aber gemäß der Annahme $\alpha - a$ positiv ist, so ist der Werth von r so zu wählen, daß r α kleiner als 1 ist.

Ist die Reihe III aber fallend; so muß $n u^r_n$, wenn n hinreichend groß genommen wird endlich klein werden. Soll aber das Product $n u^r_n$ unendlich klein werden, trotzdem der einer immer wächst, so muß der andere Factor u^r_n und also auch u_n selbst unendlich klein sein. Also die letzten Glieder der Reihe I unendlich klein.

3. Ist die Differenz $a - \alpha$ gleich o; so steigt oder fällt die Reihe, je nach die 1te der nicht schwindenden Differenzen ($b - \beta$, $c - \gamma$ u. s. w.) positiv oder negativ ist und nähern sich in beiden Fällen die Glieder immer mehr einer festen Grenze.

Gesetzt, die erste nicht schwindende Differenz sei $c - \gamma$, so hat man:

$$P = c\,n^{m-3} + d\,n^{m-4} + e\,n^{m-5} + \ldots$$
$$\Pi = \gamma\,n^{m-3} + \delta\,n^{m-4} + \varepsilon\,n^{m-5} + \ldots$$
$$P - \Pi = (c - \gamma)\,n^{m-3} + (d - \delta)\,n^{m-4} + (e - \varepsilon)\,n^{m-5} + \ldots$$

Es läßt sich nun auf dieselbe Weise, wie unter 1 und 2 geschehen ist, darthun, daß $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ steigt oder fällt, wenn die Differenz positiv oder negativ ist.

Unterstellen wir zuerst $c - \gamma$ positiv und wenden wir den jetzt begründeten ersten Theil des Satzes auf folgende Reihe an:

$$\left(\frac{1}{0}\right)^r \frac{u}{1} + \left(\frac{2}{1}\right)^r u_2 + \left(\frac{3}{2}\right)^r u_3 + \left(\frac{4}{3}\right)^r u_4 + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{n}{n-1}\right)^r u_n + \left(\frac{n+1}{n}\right)^r u_{n+1} + \ldots$$

welche wir Reihe IV nennen und kurz mit

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_n + U_{n+1} + \ldots$$

bezeichnen. Man erhält dann:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n^2-1)^r\, u_{n+1}}{n^{2r}\, u_n} = \frac{(n^2-1)^r\,(n^m + an^{m-1} + bn^{m-2} + cn^{m-3} + \ldots)}{n^{2r}\,(n^m + \alpha n^{m-1} + \beta n^{m-2} + \gamma n^{m-3} + \ldots)}$$

Nun ist aber nach dem Binomen von Newton

$$(n^2-1)^r \text{ gleich } n^{2r} - rn^{2(r-1)} + \frac{r(r-1)}{1.2}\,n^{2(r-2)} - \ldots$$

und folglich der Zähler des letzten Quotienten

$$\text{gleich } n^{2r+m} + an^{2r+m-1} + (b - r)\,n^{2r+m-2} + \ldots$$

Der Nenner ist $n^{2r+m} + \alpha\, n^{2r+m-1} + \beta\, n^{2r+m-2} + \ldots$

Also ergibt sich:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n^{2r+m} + an^{2r+m-1} + (b-r)\,n^{2r+m-2} + \ldots}{n^{2r+m} + \alpha n^{2r+m-1} + \beta\, n^{2r+m-2}}$$

die Differenz $a - \alpha$ gemäß der Annahme gleich o ist, so hängt es von der Differenz $- \beta$ oder von $(b - \beta) - r$ ab, ob die Reihe IV steigt oder fällt. Man kann aber der einen solchen Werth geben, daß die Differenz $(b - \beta) - r$ negativ ist, also die Reihe IV d, möge $b - \beta$ gleich o oder nicht gleich o sein, welches Erstere oben unterstellt wurde. Es $\left(\frac{n}{n-1}\right)^r u_n$ größer als u_n; also ist jedes Glied der fallenden Reihe IV größer als das e der steigenden Reihe I. Hieraus folgt, daß die Glieder der Reihe I nicht unendlich groß nen, sondern sich einer bestimmten Grenze nähern müssen.

zweitens $c - \gamma$ negativ, also die Reihe I eine fallende; so nehmen wir folgende Reihe

$$\left(\frac{o}{1}\right) u_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^r u_2 + \left(\frac{2}{3}\right)^r u_3 + \left(\frac{3}{4}\right)^r u_4 + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{n-1}{n}\right)^r u_n + \left(\frac{n}{n+1}\right)^r u_{n+1} + \ldots$$

welche wir Reihe V nennen und kurz bezeichnen mit

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_n + U_{n+1} + \ldots$$

hat nun:

$$= \frac{n^{2r} u_{n+1}}{(n^2-1)^r u_n} = \frac{n^{2r}(n^m + an^{m-1} + bn^{m-2} + cn^{m-3} + \ldots)}{(n^2-1)^r (n^m + \alpha n^{m-1} + \beta n^{m-2} + \gamma n^{m-3} + \ldots)}$$

Zähler dieses Quotienten ist gleich $n^{2r+m} + an^{2r+1m-1} + bn^{2r+m-2} + \ldots$ nner gleich $n^{2r+m} + \alpha n^{2r+m-1} + (\beta - r) n^{2r+m-2} + \ldots$ Also ist ich $\frac{n^{2r+m} + an^{2r+m-1} + bn^{2r+m-2} + \ldots}{n^{2r+m} + \alpha n^{2r+m-1} + (\beta - r) n^{2r+m-2}}$.

emäß der Annahme $a - \alpha$ gleich o ist, so ist die Reihe V steigend oder fallend, je nachdem $b - (\beta - r) = (b - \beta) + r$ positiv oder negativ ist. Man kann aber über r so ß jene Differenz positiv wird und somit die Reihe V steigend ist. Da aber das allgemeine Glied u_n dieser steigenden Reihe kleiner als das allgemeine Glied u_n der fallenden Reihe I ist; e Glieder dieser letzten Reihe nicht unendlich klein werden, sondern müssen sich einer bestimmimmer mehr nähern.

Liefert das (n + 1)te Glied einer Reihe, durch das nte dividirt, einen n von der Form

$$\frac{n^m + an^{m-1} + bn^{m-2} + cn^{m-3} + \ldots}{n^m + \alpha n^{m-1} + \beta n^{m-2} + \gamma n^{m-3} + \ldots}$$

Differenz $\alpha - a$ größer als (+ 1), so ist die Reihe convergent.

dem vorigen §. kann von der Convergenz einer Reihe, welche einen Quotienten von der anrm liefert, nur in dem Falle die Rede sein, wenn die Differenz $a - \alpha$ negativ ist, weil spätesten Glieder der Reihe unendlich klein werden. Gesetzt nun folgende Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots \quad (I)$$

Quotienten, in welchem $a - \alpha$ negativ ist; es läßt sich dann mit Hülfe des §. 10 dar- e Reihe I convergirt, wenn die umgekehrte Differenz, nämlich $\alpha - a$ größer als (+ 1)

ist. Nach jenem §. ist die Reihe I convergent, wenn $\lim n^r u_n$ gleich o ist. Es ist aber $r u$ allgemeine Glied folgender Reihe:

$$u_1 + 2^r u_2 + 3^r u_3 + 4^r u_4 + \ldots + n^r u_n + (n+1)^r u_{n+1} + \ldots$$

Mithin ist die Reihe I convergent, wenn die Reihe II fallend ist und ihre letzten Gliede u klein werden. Suchen wir daher die Bedingung, wovon dies Letztere abhängig ist:

$$\frac{(n+1)^r u_{n+1}}{n^r u_n} = \frac{(n+1)^r (n^m + a n^{m-1} + b n^{m-2} + c n^{m-3} + \ldots)}{n^r (n^m + \alpha n^{m-1} + \beta n^{m-2} + \gamma n^{m-3} + \ldots}$$

Es ist aber $(n+1)^r = n^r + r n^{r-1} + \frac{r(r-1)}{1.2} n^{r-2} + \ldots$

Also ist der Zähler des Quotienten, wenn man nur die beiden ersten Glieder anfirt, $n^{m+r} + (a+r) n^{m+r-1} + \ldots$

Der Nenner ist $n^{m+r} + \alpha n^{m+r-1} + \beta n^{r+m-2} \ldots$

Folglich ist der Quotient:

$$\frac{(n+1)^r u_{n+1}}{n^r u_n} = \frac{n^{m+r} + (a+r) n^{m+r-1} + \ldots}{n^{m+r} + \alpha n^{m+r-1} + \beta n^{r+m-2} + \ldots}$$

Die Reihe ist nun fallend und ihre letzten Glieder werden unendlich klein, wenn a - r kleiner als o, d. h. negativ ist. Es ist alsdann α — a größer als r. Nun ist aber r röß (+ 1); also ist die Reihe I convergent, wenn α — a mehr, als (+ 1) beträgt.

§. 14. Wir wollen jetzt das Ergebniß der beiden letzten §§. auf einige Reihen anwend:

1. Reihe: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} + \ldots$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{n - \frac{1}{2} n^0}{n + \frac{1}{2} n^0}$$

Mithin ergibt sich: $a - \alpha = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$; $\alpha - a = (+1)$. D R also divergent.

2. Reihe: $\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \ldots + \frac{1}{n^m} + \frac{1}{(n+1)^m} + \ldots$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^m}{(n+1)^m} = \frac{n^m + o\, n^{m-1} + \ldots}{n^m + m\, n^{m-1} + \ldots}$$

Es ist also a — α gleich o — m gleich (— m) und mithin α — a = m.

Die zweite Reihe divergirt also, wenn m kleiner ist als 1 oder gleich o, dagegen cverg Reihe, wenn m größer ist als 1.

3. Reihe: $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1.3.}{2.4.} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1.3.5.}{2.4.6.} \cdot \frac{1}{7} + \ldots$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n-1)^2}{2n\,(2n+1)} = \frac{n^2 - n + \frac{1}{4}}{n^2 + \frac{1}{2} n}$$

(ist also a — α gleich $\left(-\frac{3}{2}\right)$ mithin α — a gleich $\frac{3}{2}$. Die 3. Reihe ist folg-
:gent.

---

§ 15. Ist in der unendlichen Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

änderliche Größe und bilden die von x unabhängigen Factoren $a_0, a_1, a_2 \ldots$ wieder für
e Reihe; so stellt jene Reihe eine Potenz-Reihe dar. Eine solche ist hiernach die Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

wollen uns nun die Aufgabe stellen, die Werthe von x zu bestimmen, für
ie erste Reihe, welche die allgemeine Form einer Potenz-Reihe hat,
rt.

suchen zu diesem Zwecke $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\text{m}\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} x = x \lim \frac{a_{n+1}}{u_n}.$$

ichnet man nun $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ mit A; so ist nach §. 8 die Bedingung der Convergenz an
gleichheit gebunden:

$$A\,x < 1 \text{ oder } x < \frac{1}{A}$$

$\frac{1}{A}$ nur den absoluten Werth von x bezeichnet; so convergirt also die Reihe für alle Werthe
che zwischen den Grenzen $\left(+\frac{1}{A}\right)$ und $\left(-\frac{1}{A}\right)$ liegen.

lle Werthe von x, welche absolut größer als $\frac{1}{A}$ sind, divergirt die Reihe.

t gleich $\frac{1}{A}$; so gibt das Resultat der Auflösung keine Auskunft. Es muß in diesem Falle
über die Convergenz oder Divergenz der Reihe entschieden werden.

Wenden wir jetzt das im vorigen §. erlangte Resultat auf einige Reihen an:

e Reihe $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + n x^{n-1} + \ldots$ gibt für $\frac{a_{n+1}}{a_n}$
$\frac{1+1}{n}$ oder $1 + \frac{1}{n}$. Da aber $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ gleich 1 ist; so ist A gleich 1. Die
girt also zwischen den Grenzen $x = 1$ und $x = (-1)$.

ie Reihe $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$ convergirt für alle Werthe

von x, welche zwischen (+ 1) und (— 1) liegen. Denn $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} : \frac{1}{n} =$

und folglich $\lim \frac{n}{n+1}$ oder $A = 1$.

Ist x gleich (+ 1); so geht die Reihe über in die divergirende:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Ist x gleich (— 1); so stellt sie dar die Reihe:

$$(-1) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Diese ist convergent, weil die Zeichen der Glieder wechseln und die letzten Glied klein werden.

3. Die Reihe $\frac{x}{1} + \frac{x}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots$

zwischen den Grenzen (+ ∞) und (— ∞), also für jeden positiven und negativen Wer

4. Die Reihe $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{-2n-1} + \ldots$ convergirt wi

Grenzen x = (+ 1) und x = (— 1), also wenn x kleiner als 1 ist.

Ist x gleich 1 oder (— 1); so convergirt die Reihe wegen des Zeichenwechsels ihrer Gl

5. Bestimmen wir endlich die Bedingungen der Convergenz und Divergenz der unendlichen

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} x^n + \ldots$$

welche von $(1 + x)^m$ herrührt, im Falle m keine positive ganze Zahl bedeutet:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots(n+1)} : \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} = \frac{1}{+}$$

$$-\frac{n-m}{n+1} \qquad \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \left(-\frac{n-m}{n+1}\right) = -1.$$

Es ist also A gleich 1; die Reihe convergirt also zwischen den Werthen x = (+ 1) und =

Ist x gleich (+ 1); so geht die Reihe über in

$$1 + m + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

Es ist dann der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ einerlei mit dem früheren Quotienten $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ des

13. Da aber, wie wir eben gesehen, der Quotient ein negatives Zeichen vor sich hat $\left(-\frac{n-}{n}\right.$

so müssen die Glieder der Reihe von einer gewissen Stelle an abwechselnd positiv und negat sein tritt dann ein, wenn n größer als m geworden ist. Wegen dieses Zeichenwechsels ist daß di

t, wenn sie eine fallende ist, deren späteste Glieder unendlich klein werden. Dies ist aber der
m a — α kleiner als o oder wenn — m — 1 negativ ist. Die Reihe ist also convergent,
m eine positive Zahl bezeichnet, die größer als 1 ist.
x gleich (— 1); so wird die Reihe folgende:

$$+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}-+\ldots$$

ist dann $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ oder $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ gleich $\frac{n-m}{n+1}$.
der Quotient kein negatives Zeichen vor sich hat; so hört der Zeichenwechsel der Glieder von
mmten Stelle an auf, nämlich wenn n größer als m geworden ist.
Reihe ist convergent, wenn die Differenz α — a, d. h. wenn 1 + m größer als (+ 1) ist
rgirt also für alle positiven Werthe von m.

---

17. Aus zwei convergenten Reihen erhält man durch Addition ihrer entsprechenden Glieder eine neue convergente Reihe.

d z. B. $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots$ (I)

$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \ldots + v_n + \ldots$ (II)

rgente Reihen; so ist die Reihe

$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots$ (III)

onvergent.

) §. 1 ist die dritte Reihe convergent, wenn ihre Summe einer endlichen Größe gleich ist.
nun $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n = S_n$,
und $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \ldots + v_n = S'_n$; so ist
$+ v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \ldots + (u_n + v_n) = S_n + S'_n$.
ist aber $\lim (S_n + S'_n)$ gleich $\lim S_n + \lim S'_n$ gleich $S + S'$, wenn S und S'
e der Reihen I und II bezeichnen. Hiernach ergibt sich die Gleichung:
$S + S_1 = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots$
ist also die endliche Größe (S + S') die Summe der unendlichen Reihe (III) und folglich
convergent.
ı kann hiernach aus den Potenz-Reihen

$a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ (III)

$b_o + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_n x^n + \ldots$ (IV)

eide für einen bestimmten Werth von x convergiren, folgende für denselben Werth von x con-
Reihe bilden:

$- b_o) + (a_1 + b_1) x + (a_2 + b_2) x^2 + \ldots + (a_n + b_n) x^n + \ldots$

äßt sich der angeführte Lehrsatz offenbar auch auf mehr als 2 Reihen anwenden. Convergiren
Reihen

$a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$

$b_o + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_n x^n + \ldots$

$c_o + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n + \ldots$

für irgend einen Werth von x und sind ihre Summen beziehungsweise S, S′ und S″; so ist die Reihe

$$a_0 + b_0 + c_0 + (a_1 + b_1 + c_1)\,x + \ldots + (a_n + b_n + c_n)\,x^n + \ldots$$

für denselben Werth von x convergent und ihre Summe gleich $S + S' + S''$.

Aus zwei convergenten Reihen kann man auch durch Subtraction der entsprechenden Glieder eine neue convergente Reihe bilden.

Es liefern z. B. die Reihen III und IV folgende Reihe:

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)\,x + (a_2 - b_2)\,x^2 + \ldots + (a_n - b_n)\,x^n - \ldots$$

welche für denselben Werth von x, wie die Reihen III und IV, convergirt.

Die Gründe sind denen des 1. Satzes ähnlich.

§. 18. Wenn zwei Reihen convergent sind; so bildet ihr geordnetes Product auch eine convergente Reihe, deren Summe (S″) dem Producte der Summen der beiden ersten Reihen gleich ist.

Multiplicirt man z. B. die Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \text{ (I) mit der Reihe}$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots \text{ (II); so erhält man}$$

$$\begin{aligned} &a_0 b_0 + a_1 b_0 x + a_2 b_0 x^2 + a_3 b_0 x^3 + \ldots \\ &\quad + a_0 b_1 x + a_1 b_1 x^2 + a_2 b_1 x^3 + \ldots \\ &\quad\quad + a_0 b_2 x^2 + a_1 b_2 x^3 + \ldots \\ &\quad\quad\quad + a_0 b^3 x^3 + \ldots \end{aligned}$$

die Reihe: $a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)\,x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)\,x^2 + (a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3)\,x^3 \ldots$ (III).

Convergiren nun die beiden ersten Reihen für einen bestimmten Werth von x; so convergirt die Reihe (III) für diesen Werth von x. Aus der Multiplication ergibt sich, daß S''_n nicht $S_n \cdot S'_n$ sein kann, sondern daß vielmehr folgende Ungleichheit stattfindet: $S''_n < S_n S'_n$. Das vollständige Product von $S_n S'_n$ muß gehen bis zu Gliedern mit $x^{2(n-1)}$, weil da n in jeder der beiden ersten Gliedern x^{n-1} enthält. Es kann hiernach $S_n \cdot S'_n$ aber ch viel als S''_{2n} betragen. Man hat also:

$$S''_n < S_n S'_n \text{ und } S''_{2n} > S_n S'_n.$$

Nun muß aber die Grenze von S''_n gleich SS′ sein. Denn wäre das nicht der Fall; so wäre

$$\lim S''_n < \lim S_n S'_n \text{ und } \lim S''_{2n} > \lim S_n S'_n,$$

was unmöglich ist, da $\lim S''_n$ und $\lim S''_{2n}$ einander gleich sind.

Es ist also die Grenze der Reihe III gleich SS′, ihre Summe also eine endliche Größe selbst folglich convergent.

Wird die convergente Reihe (I) mit einem nach demselben Buchstaben geordneten Polynom (P) multiplicirt; so bildet das geordnete Product ebenfalls eine convergente Reihe, deren Summe gleich PS ist.

Multiplicirt man die Reihe I z. B. mit dem Polynom $b_0 + b_1 x + b_2 x^2$; so wird sich durch die Rechnung und durch das Product $a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)\,x + b_2$

$+ a_0 b_2) x^2 + \ldots$ überzeugen können, daß $S''_n < S_n P$ hingegen $S''_{n+2} > S_n P$. sich also wieder auf ähnliche Weise wie oben darthun, daß lim S''_n gleich PS ist und Product eine convergente Reihe bildet.

19. Die vier Sätze der beiden letzten §§. werden um so mehr für solche Reihen gelten, deren um Theil negativ sind und deren absolute Werthe schon eine convergente Reihe bilden. Werden Reihen miteinander multiplicirt, welche nur durch die Verschiedenheit der Zeichen ihrer Glieder n; so läßt sich wohl der Fall denken, daß ihr Product eine divergente Reihe darstellt.

II.

Schulnachrichten.

A. Lehrverfassung.

Oberprima.

Ordinarius: Oberlehrer Dr. J. Klein.

1. **Religionslehre**: 2 St. a. Katholische: Die Lehre von der Erlösung und Heiligung Menschen. Apologetik. (Fortsetzung.) Repetitionen aus der Kirchengeschichte. Nach Martin.
Dr. van Ede

b. Evangelische (Cötus I.): 2. St. Fortsetzung der Glaubenslehre. Der dritte Artikel. neben: Der Epheserbrief im Original gelesen; Kirchengeschichte bis auf Karl den Großen.
Dr. von Kap

2. **Deutsch**: 3 St. Geschichte der deutschen Literatur seit Opitz (nach dem Leitfaden von Lectüre nach Deycks' Auswahl im Anschluß an die Literaturgeschichte. Im Sommer Erklärung der genie von Göthe. Freie Vorträge über Themata aus dem Gebiete der Privatlectüre. Die Elemente Psychologie. Aufsätze. Dr. Ital

Themata zu den Aufsätzen: 1. Ueber den geistigen Aufschwung, welcher große Thaten der Völker hervorpflegt. — 2. Solons Ausspruch: γηράσκω αἰεὶ πολλὰ διδασκόμενος in seiner allgemeinen Bedeutung — 3. Uebung des Gedächtnisses und ihre Vortheile für die studirende Jugend. — 4. Der Aufstand der gioni Pannonien (nach Tac. ann. I. 16—31.) — 5. In welchen Beziehungen ist die Erkenntniß des Wesens und der Dichtkunst durch Lessing's Laokoon gefördert worden? — 6. Klopstock und Wieland. (Klassenarbeit.) — Der rakter der klassischen Kunstpoesie, nachgewiesen an Goethe's Iphigenie. — 8. Im Leben der Völker sind äußere oft die Quelle nationaler Erhebung und Größe. (Abiturienten-Aufsatz.)

3. **Latein**: a. 6 St. Tacit. Ann. I. Cic. de Orat. I. Privatim Liv. XXIII. Ungeübte Lateinsprechen. Das Wichtigste aus der Stilistik. Extemporalien. Scripta. Aufsätze. Dr. Klein

b. 2 St. Horat. Carm. II. und III. mit Auswahl. Sat. I. 4. Memoriren einzelner Oden. Uebungen im Lateinsprechen. Desselben

Themata zu den Aufsätzen: 1. Quam verum sit illud Aristotelis, οὐ παντὸς ἀνδρὸς φέρειν εὐτυχίαν, natur et exemplis quibusdam firmetur. — 2. Quod Pyrrhus dixisse fertur, Romam hydrae Lernaeae non dissimilem, altero Punico bello maxime esse comprobatum. — 3. De carminibus Horatianis I, 4 et IV. 4. Freigewähltes Thema. — 5. Nimiam fiduciam calamitati esse solere et rationibus et exemplis demonstratu

nobilis sit aura popularis, exemplis demonstratur. (Klassenarbeit.) — 7. Marius reipublicae Romanae
a et virtute utilissimus, ambitione et saevitia perniciosissimus. — 8. Comparantur inter se vitae De-
et Ciceronis. — 9. Ter respublica Romana a maximis periculis vindicata est: Fortitudine Camilli, con-
eloquentia Ciceronis. (Abiturienten-Aufsatz.)

Griechisch: a. 4 St. Thucydid. II. III. mit Auswahl. Demosthen. Olynth. I. III. Ueber-
n Theil lateinisch. Wiederholungen aus der Syntax (nach Buttmann). Extemporalien. Scripta.
Der Director.

2 St. Hom. Il. VIII. IX. X. XI. XVI. Dr. Klein.

Französisch: 2 St. Lectüre nach der Chrestomathie von Baumgarten für Prima. Athalie
ie. Wiederholung der schwierigern Theile der Syntax nach Knebel. Extemporalien. Scripta.
Derselbe.

Hebräisch: 2 St. Das Wichtigste aus der Syntax. Einübung der unregelmäßigen Verba.
ichte Joseph's gelesen und erklärt. Später ausgewählte Psalmen. Dr. van Endert.

Geschichte und Geographie: 3 St. Geschichte der neuern Zeit (nach Pütz). Wiederholung der
des Alterthums, des Mittelalters und des brandenburg-preußischen Staates.
Dr. Spengler.

Mathematik: 4 St. a. Permutationen, Variationen und Combinationen. Der binomische
b. Der dritte Abschnitt der Stereometrie (von Boyman). Wiederholung der Geometrie und
sonders der Stereometrie und Trigonometrie.
Schmidt.

Physik: 2 St. Gleichgewicht und Bewegung flüssiger und luftförmiger Körper. Magnetismus
cität.
Derselbe.

ungsaufgaben der Abiturienten: 1. Religionslehre. a. Katholische: Die Beziehungen des Kreuzesopfers zum
opfer und zu den Opfern der Juden und Heiden. b. Evangelische: Ueber Ursprung, Wesen und Folgen der
2. Deutscher Aufsatz: Im Leben der Völker sind äußere Gefahren oft die Quelle nationaler Erhebung und
teinischer Aufsatz: Ter respublica Romana a maximis periculis vindicata est: Fortitudine Camilli, con-
eloquentia Ciceronis. — Lateinisches Scriptum: Ein Dictat über Pericles. — 5. Griechisches Scriptum:
iber den Kampf bei Thermopylae. — 6. Französisches Scriptum: Ein Dictat über Chlodwig. — 7. He-
sis VII, 1—4. — 8. Mathematik: a. Von einem Dreiecke sind gegeben zwei Seiten und die Mitteltrans-
itten Seite. Dasselbe zu construiren. b. Der Inhalt eines senkrechten Cylinders ist 40 Kbf., sein Mantel
groß ist der Radius der Grundfläche und wie groß die Höhe? c. Eine Gemeinde macht eine Anleihe von
und will diese Summe in 20 Jahren durch gleiche jährliche Raten amortisiren. Wie viel beträgt jede Rate,
sen zu 4% gerechnet werden? d. Von einem Dreiecke sind gegeben die Summe zweier Seiten (a + b),
e c und der Unterschied (A — B) der ihr anliegenden Winkel. Das Dreieck ist trigonometrisch aufzulösen.

Unterprima.

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Spengler.

ligionslehre: 2. St. a. Katholische: Die Lehre von Gottes Dasein, Eigenschaften,
hkeit und von der Schöpfung. Die wichtigsten Momente der Apologetik. Kirchengeschichte.
nach Martin.)
Dr. van Endert.
angelische. (Cötus I.) Siehe Oberprima.

ulsch: 3 St. Literaturgeschichte bis Opitz nach Pütz' Leitfaden. Lectüre und Erklärung der

einschlägigen Sprachproben aus Deycks' Auswahl und der Hauptttheile des Nibelungenliedes. I
mer Erklärung des Wallenstein von Schiller. Freie Vorträge im Anschluß an die Lectüre. Di
lehren der Logik mit specieller Beziehung auf die Dispositionslehre. Aufsätze. Dr. Ca

Themata zu den Aufsätzen: 1. Ueber den Culturzustand der alten Deutschen. — 2. Gehorsam, di
dingung jeder gesellschaftlichen Ordnung. — 3. Das Ludwigslied, verglichen mit dem Hildebrandsliede. — 4. I
Gehalt der Schiller'schen Balladen. — 5. Catilina's Charakter und politische Zwecke, dargestellt nach Sallust. - 6
die Verhältnisse, welche die Blüthe der mittelhochdeutschen Literatur herbeiführten. (Klassenarbeit.) — 7. Swe an
güete wendet sîn gemüete, dem volget saelde unde êre. — 8. Wallenstein's Schuld und Untergang. —
hild im ersten und zweiten Theile des Nibelungenliedes. — 10. Die höfische Liederdichtung und Walther von
weide. (Klassenarbeit.)

3. Latein: a. 6 St. Sallust. coniur. Cat. — Liv. XXI. (zum Theil). — C
disp. V. Privatim: Abschnitte aus Liv. — Uebungen im Lateinsprechen, angeknüpft an d
Wiederholungen aus der Syntax. Das Wichtigste aus der Stilistik. Wöchentlich ein Scriptur u
Extemporale. Alle 4 Wochen ein Aufsatz. Dr. Spezi

b. 2 St. Horat. carm. I. und II. mit Auswahl. Memoriren einzelner Oden. Uebung
Lateinsprechen. Der

Themata zu den Aufsätzen: Quattuor res, quas Cicero dicit inesse oportere in summo imperato
tiam rei militaris, virtutem, auctoritatem, felicitatem summos fuisse in Julio Caesare. — 2. Ciceronem con
aperta conjuratione Catilinaria, qui pater patriae appellaretur, non minus dignum fuisse quam Triu
3. Quod Sallustius dixit: rem publicam Romanam egregia virtute paucorum virorum potissimum auctam e
plis comprobetur. — 4. Populi Romani virtutes in rebus adversis maxime enituisse, demonstretur. — 5.
Socrates apud Xenophontem de amicitia et de amicis eligendis praescripserit. — 6. Romani magnis spe
victi vicerunt. (Klassenarbeit.) — 7. Quam verum sit illud Horatianum. „Valet ima summis Mutare et igne
tenuat deus, Obscura promens —" exemplis comprobetur. — 8. Quid post cladem Cannensem labe
rem Romanam sustinuerit ostendatur. — 9. Haud pauca inveniuntur clarorum et Graecorum et Ima
exempla, qui ingratam patriam sunt experti. — 10. Socrates accusatus quibus argumentis sese defe
11. Marius patriae suae summa et salus et pestis. (Klassenarbeit).

4. Griechisch: a. 4 St. Xenoph. memor. I. II. IV. mit Auswahl. Plat. apol. Vers
zum Theil lateinisch. Wiederholung der Casuslehre, der Tempora und Modi. Participia (nach Attm
Extemporalien. Scripta. Desel

b. 2 St. Homer. Il. I. II. III. V. VI. Der Dicto

5. Französisch: 2 St. Lectüre nach der Chrestomathie von Baumgarten für Prima. W
holung einzelner Abschnitte der Syntax (nach Knebel). Extemporalien. Scripta. Dr. Klei

6. Hebräisch: 2 St. Siehe Oberprima.

7. Geschichte und Geographie: 3 St. Geschichte des Mittelalters (nach Pütz). Wiederh
der alten Geschichte. Dr. Spigle

8. Mathematik: 4 St. a. Auflösung der Gleichungen vom 2. Grade mit mehreren Unbekan
Diophantische Gleichungen. Die arithmetischen und geometrischen Progressionen. Zinseszins- u. Re
Rechnung. b. Trigonometrie. c. Der 1. und 2. Abschnitt der Stereometrie von Boyman.
Schmid

9. Physik: 2 St. Siehe Oberprima. Desel

Obersecunda.

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Krauß.

eligionslehre: 2 St. a. Katholische: Die Lehre von der Kirche. Kirchengeschichte. Nach Dr. van Endert.

vangelische: 2 St. Siehe Oberprima.

eutsch: 2 St. Dispositionslehre. Die Gattungen und Arten der Dichtkunst. Lectüre aus n Sommer Goethe's Hermann und Dorothea. Declamation und Versuche im freien Vorsätze, worunter auch metrische Uebungen. Dr. Krauß.

ateín: a. 8 St. Cic. pro Archia. Livius V. VII. Privatim Cic. in Catil. 3 und Cato iederholungen aus der Syntax der Tempora und Modi. Zweiter Abschnitt aus Meiring's Mündliche Uebersetzungen aus Süpfle. Extemporalien und Scripta. Gegen Ende des e kleine Aufsätze. Derselbe.

St. Virg. Aen. VII, Eclog. I., Georg. I., Aen. IX. mit Auswahl. Der Director.

riechisch: a. 4 St. Xenoph. Hellen. I. II. Herod. VI. VII. mit Auswahl. Wiederholuslehre. Tempora und Modi (nach Buttmann's Grammatik). Mündliche Uebersetzungen Extemporalien. Scripta. Dr. Stahl.

St. Homer. Odyss. V. VI. VII. IX. XVI. Dr. Klein.

anzösisch: 2 St. Lectüre aus Baumgarten's Chrestomathie. 5. 6. und 7. Abschnitt aus nstruction, emploi des temps et des modes, syntaxe de l'article, de l'adjectif et de Extemporalien und Scripta. B. Klein.

räisch: 2 St. Das Wichtigste aus der Formenlehre. Einübung des regelmäßigen Vers Nothwendigste über das unregelmäßige Verbum. Analyse und Uebersetzung von Uebungsosen's Leitfaden. Dr. van Endert.

chichte und Geographie: 3 St. Römische Geschichte (nach Pütz). Geographie Europa's. Dr. Stahl.

thematik: 4 St. a. Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel. Auflösung der Glei- 1. Grade mit mehreren Unbekannten und der Gleichungen vom 2. Grade mit einer Unie arithmetischen und geometrischen Progressionen. Die Rechnung mit Potenzen und Wurzel- Logarithmen. b. Ausmessung des Kreises. Auflösung geometrischer Aufgaben. c. Die Schmidt.

sik: 1 St. Die Lehre von der Wärme. Derselbe.

Untersecunda.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Besse.

gionslehre: 2 St. a. Katholische: Begriff der Religion und Offenbarung. Offen- und Offenbarungsurkunden. Beweis für die Authenticität und Unverfälschtheit der Bücher Testamentes. Glaubwürdigkeit ihrer Verfasser. (Nach Martin.) Dr. van Endert.

ngelische: Siehe Oberprima.

2. **Deutsch**: 2 St. Das Wichtigste aus der deutschen Metrik. Lehre von den Tro guren. Gattungen der Prosa. Lectüre und Declamation nach Deycks. Extemporalien. Ib freien Vortrage. Aufsätze. Dr

3. **Latein**: a. 8 St. Cic. Catil. I. II. pro leg. Manil. Privatim: Caes. d. b. G. II Wiederholung der Casuslehre. Erweiterung der Syntax der Tempora und Modi (nach Meir g. liche Uebersetzungen aus Süpfle. Extemporalien. Scripta. Tr

b. 2 St. Virg. Aen. I. II. Tr

4. **Griechisch**: a. 4 St. Xenoph. Anab. I. II. Wiederholung einzelner Abschnitte r lehre. Syntax des Nomens, Pronomens und der Casus (nach Halm.) Präpositionen (nach B Mündliche Uebersetzungen aus Halm. Scripta. Tr

b. 2 St. Homer Odyss. I. II. V. Dr K

5. **Französisch**: 2 St. Lectüre aus Baumgarten's Chrestomathie. Repetition der u eg Verba. 3., 4. und 5. Abschnitt nach Plötz II. (Hülfsverba, Formenlehre des Sula jectivs, Adverbs, Wortstellung). Extemporalien und Scripta. L K

6. **Geschichte** und **Geographie**: 3 St. Geschichte der orientalischen Völker und der Grie Pütz). Geographie der außereuropäischen Erdtheile. Dr. W

7. **Mathematik**: 4 St. a. Wiederholung des algebraischen Pensums der Tertia. Auf Gleichungen vom 1. Grade mit einer und mehreren Unbekannten. Die Proportionen. b. Ja Aehnlichkeit der gradlinigen Figuren. Auflösung einfacher geometrischer Aufgaben.

Schmidt und Dr. Be

8. **Physik**: 1 St. Allgemeine Eigenschaften der Körper. Wirkungen der Molekular kr mische Erscheinungen. (Nach Boyman.) ch

Tertia.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Worbs.

1. **Religionslehre**: 2 St. a. Katholische: Lehre von der Gnade und den Cade Hymnen erklärt und memorirt. (Nach Deharbe.) Dr. van En

b. Evangelische. Siehe Quarta.

2. **Deutsch**: 2 St. Die Lehre vom zusammengesetzten Satze. Interpunktionsleh im freien Vortrage. Lectüre und Declamation nach dem Lesebuche von Pütz. Einzelnes a de nymik. Aufsätze. Dr W

3. **Latein**: a. 8 St. Wiederholung der Casus- und Tempuslehre. Beendigung der Syn Siberti. Extemporalien. Scripta. Mündliche Uebersetzung aus Spieß. Caesar de llo Liber I und IV. erf

b. 2 St. Ovid. Metam. I. II. (mit Auswahl). Das Nöthigste aus der Prosodi und Bis Pfingsten Dr. Wahlenberg und Schiffer; von da ab r.

4. **Griechisch**: 6 St. Wiederholung des Pensums der Quarta und Beendigung der Formenle Buttmann. Vorläufige Kenntniß der Präpositionen. Mündliche und schriftliche Uebersetzun Dominicus. Extemporalien und Scripta. Dr Wo

ranzösisch: 2 St. Die unregelmäßigen Verba. Hülfsverba. Lectüre und mündliche Ueber- h Plötz II). Extemporalien und Scripta. Dr. Wahlenberg.

eschichte und Geographie: 3 St. Deutsche Geschichte bis zum westphälischen Frieden. Die Begebenheiten aus der brandenburgisch-preußischen Geschichte (nach Pütz). Geographie Deutsch- besonderer Berücksichtigung Preußens. Dr. Stahl.

Mathematik: 3 St. a. Die 4 Rechnungsarten mit entgegengesetzten Zahlen und Buchstaben- echnung mit Summen, Differenzen, Producten und Quotienten. b. Die Lehre von den Vier- om Kreise (nach Boyman). Conrads.

Naturkunde: 2 St. Mineralogie und Geognosie. Gesammtübersicht aller drei Naturreiche s). Derselbe.

Quarta.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Wahlenberg.

eligionslehre: 2 St. a. Katholische: Die Glaubenslehre im Anschlusse an die Artikel des Symbolums. Erklärung von zwölf Hymnen. (Nach Deharbe). Dr. van Endert.
angelische: (Cötus II.) 2 St. Biblische Geschichten des N. Testamentes nach Zahn. Erklä- ngeliums Matthäi. Das erste Hauptstück des Katechismus. Kirchenlieder. Dr. v. Knapp.

eutsch: 2 St. Lectüre und Declamation nach dem Lesebuche von Pütz. Die Lehre vom ein- Uebungen im freien Vortrage und in der Ortographie. Aufsätze. Dr. Wahlenberg.

ateín: 10 St. Corn. Nepos 8 vitae. Wiederholungen aus der Formen- und Wortbildungs- Syntax des Nomens und der Tempora nach Siberti. (Cap. 82—95). Mündliche Ueber- Spieß. Memoriren von Vocabeln. Extemporalien und Scripta. Derselbe.

iechisch: 6 St. Die Formenlehre bis zu den Verbis auf μι (nach Buttmann). Ueber- ntsprechenden Stücke aus dem Elementarbuche von Dominicus. Memoriren von Vocabeln. n. Scripta. Dr. Kraus und Schiffer.

anzösisch: 2 St. Wiederholung und Beendigung der Formenlehre nach Plötz I, nebst ent- ündlichen Uebungen. Extemporalien und Scripta. Dr. Wahlenberg.

schichte und Geographie: 3 St. Die wichtigsten Thatsachen der alten Geschichte (nach Pütz). m Anschlusse an die alte Geschichte. Dr. Besse.

thematik: 3 St. a. Wiederholung der Decimalbrüche. Rabatt-, Termin-, Gesellschafts- gs-Rechnung (nach Schellen). b. Von den Linien, Winkeln, Parallelen und von den Drei- Boyman). Conrads.

chnen: 2 St. Leichtere und ausgeführte Ornamente. Kopfstudien. Versuche an Gyps- Zeichenlehrer Dreesen.

Quinta.

Ordinarius: Commissarischer Lehrer Dr. Vogt.

igionslehre: a. Katholische: 3 St. Die Lehre von den Geboten, der Sünde und der Deharbe). Biblische Geschichte des N. Testamentes (nach Schumacher). Conrads.
angelische. 2 St. Siehe Quarta.

2. **Deutsch**: 2 St. Lectüre und Declamation nach Bone. Beendigung der Formenlehre. graphie. Das Wichtigste aus der Lehre vom einfachen Satze. Uebungen im Nacherzähle ralien. Reinaufgaben. I.

3 **Latein**: 10 St. Die Formenlehre wiederholt und bis zu Ende fortgeführt nach Ser setzungen nach Hottenrott. Vocabellernen. Extemporalien. Reinaufgaben. Dr. Vogt und Ch

4. **Französisch**. 3 St. Regelmäßige Formenlehre. Lese- und Uebersetzungsübungen (ac Scripta.

5. **Geographie**: 2 St. Wiederholung des Pensums der Sexta. Geographie Europa' derer Berücksichtigung Deutschlands (nach Daniel). Dr S

6. **Rechnen**: 3 St. Wiederholung der Rechnung mit gewöhnlichen Brüchen. Einf sammengesetzte Regel-de-Tri. Allgemeine Rechnungen mit Procenten. Gewinn- und Verlus Procenten. Zinsrechnung. Decimalbrüche. Uebungen im Kopfrechnen (nach Schellen). Co

7. **Naturgeschichte**: 2 St. Naturgeschichte der Reptilien und Fische. Im Somm Erklärung des Linné'schen Systems und der wichtigsten natürlichen Familien (nach Leunis).

Conrads und Dr. Rbe

8. **Zeichnen**: 2 St. Die ersten Elemente der Perspective. Begriff des Augen- nd punktes, nach Holzmodellen eingeübt. Copiren leichter Gegenstände nach Vorlagen.

Zeichenlehrer Dr

9. **Schreiben**: 3 St. Schreiblehrer Baum un D

10. **Gesang**: 1 St. Kenntniß der verschiedenen Dur- und Moll-Tonarten. Einüb 2-stimmiger Lieder. Kirchengesang. Gesanglehrer Ki

Sexta.

Ordinarius: Gymnasiallehrer B. Klein.

1. **Religionslehre**: a. Katholische: 3 St. Die Lehre von den hh. Sacramenten des Altars und vom Gebete (nach Deharbe). Biblische Geschichte des alten Testamentes (nach Schu Conr

b. Evangelische: 2 St. Siehe Quarta.

2. **Deutsch**: 2 St. Lesen und Declamiren (nach Bone). Uebungen in der Ortographie nation, Comparation, Conjugation im Anschlusse an das Lateinische. Mündliche und schriftliche im Nacherzählen. Reinaufgaben. L. K

3. **Latein**: 10 St. Die regelmäßige Formenlehre (nach Siberti). Entsprechende Übung Hottenrott für Sexta. Memoriren von Vocabeln. Reinaufgaben. B. Klein und Dr Bel

4. **Geographie**: 2. St. Geographische Vorbegriffe. Uebersicht der fünf Erdtheile (nach Dr. Vogt und Schi

5. **Rechnen**: 4 St. Die 4 Rechnungsarten mit unbenannten und benannten, ganz und chenen Zahlen. Uebungen im Kopfrechnen (nach Schellen). Dr. Rben

6. **Naturkunde**: 2 St. Einleitendes. Naturgeschichte der Säugethiere und Vögel. Besch der wichtigsten Ordnungs- und Art-Repräsentanten (nach Leunis). Dr Bel

Zeichnen: 2 St. Die ersten Uebungen im freien Handzeichnen ohne Vorlagen. Leichte Ver- nach Vorlagen.
Zeichenlehrer Dreesen.
Schreiben: 3 St.
Schreiblehrer Baum und Dienz.
Gesang: 2 St. Kenntniß der Noten, des Tactes, der Intervalle. Uebungen im Treffen der Einübung einstimmiger Lieder, in welchen das Gelernte zur Anwendung kommt. Kirchengesang.
Gesanglehrer Kipper.

: **Turnübungen** leitete der commissarische Lehrer Dr. Vogt in 4 Abtheilungen. (I. Prima nda. II. Tertia und Quarta. III. Quinta. IV. Sexta. Zusammen 201 Schüler.)
: **Gesangübungen** des Kirchenchores und des aus allen Klassen mit Ausnahme der Sexta aus- engeren Chores wurden in 3 wöchentlichen Stunden unter Leitung des Gesanglehrers Kipper Außerdem wurde Text und Melodie einer Anzahl von Volksliedern eingeübt.
nbinirter Zeichenkursus (in Prima 11, in Secunda 13, in Tertia 27, zusammen 51 Schüler). te Ornamente, Landschaften und Theile des menschlichen Körpers nach Vorlegeblättern. Copiren menten und Gypsmodellen.
egetische Belehrungen ertheilte der Director nach Vorschrift der Verfügung vom 21. Mai 1846 en Gelegenheiten, namentlich am Schlusse des Schuljahres.

B. Verordnungen der Behörden.

Verfügung des Herrn Ministers der geistlichen ꝛc. Angelegenheiten vom 9. October 1866, be- Betheiligung der künftigen Theologen am hebräischen Unterrichte während der Gymna- unter Hinweisung auf die Nachtheile, welche Unkenntniß des Hebräischen, beziehentlich der es Zeugnisses der Reife in dieser Disciplin, für dieselben mit sich führt.
Verfügung derselben hohen Behörde vom 27. November 1866, durch welche bestimmt wird, bei den zur Entlassung berechtigten höheren Unterrichtsanstalten die Leistungen der Schüler im owohl in den Semester-Censuren, als in den Abiturienten-Zeugnissen Beurtheilung finden sollen.
Verfügung des Königlichen Provinzial-Schul-Collegiums vom 7. März 1867, durch welche das der Schülerfrequenz für die untern Klassen auf 50, für die mittlern auf 40 und für uf 30 festgesetzt wird.

C. Chronik.

as Schuljahr wurde am 5. October mit einem feierlichen Gottesdienste eröffnet, nachdem am ie nöthigen Prüfungen vorgenommen waren.
n 7. November wurde das herkömmliche Seelenamt pro fundatoribus gehalten.
n 22. März fand in der Aula des Gymnasiums die öffentliche Feier des Allerhöchsten Geburts- ier Majestät des Königs Statt, bei welcher Gelegenheit der Oberlehrer Schmidt hielt.

4. Am 14. April (Palmsonntag) gingen Schüler und Lehrer gemeinschaftlich zur st Communion.

5. Sonntag den 19. Mai wurden 21 Schüler aus verschiedenen Klassen, nachdem sie läge hindurch von dem Religionslehrer Dr. van Endert vorbereitet waren, feierlich zur ersten heil munion geführt.

6. Montag den 17. Juni wurde 70 Schülern der Anstalt in der hiesigen Minoritenkir den Herrn Erzbischof Paulus Melchers das Sacrament der Firmung gespendet.

7. Im Lehrerpersonale traten seit dem Schlusse des vorigen Schuljahres folgende Veränderung

Durch Verfügung des Königlichen Provinzial-Schul-Collegiums vom 12. November 186 dem bisherigen commissarischen Lehrer Dr. P. Besse aus Köln die 5. ordentliche Lehrerstelle ert

Durch Verfügung derselben Behörde vom 10. April 1867 wurde der commissarische B. Klein aus Rodenkirchen ebenfalls definitiv angestellt und ihm die 6. ordentliche Lehrerstelle ver

Der Schreiblehrer P. Baum, welcher seit Gründung der Anstalt an derselben thätig war mit Ende März d. J. aus. Die dadurch erledigte Schreiblehrerstelle wurde durch Verfügung des lichen Provinzial-Schul-Collegiums dem Schreiblehrer und Maler D. Dienz aus Coblenz übtra

Der Probekandidat L. Schwörbel schied am Schlusse des vorigen Schuljahres aus. Der kanditat Dr. C. Rebender beendigte mit dem Schlusse des Wintersemesters sein Probejahr; wurden ihm mit Genehmigung des Königlichen Provinzial-Schul-Collegiums zu seiner Vervo während des Sommersemesters noch einige Lectionen übertragen.

Zur Abhaltung des vorschriftsmäßigen Probejahres traten ein die Kandidaten des höhern Sch Dr. Caspar Velten aus Bonn und Gottfried Schiffer aus Köln.

D. Zur Statistik.

1. Alphabetisches Verzeichniß der Schüler des Gymnasiums im siebenten Schuljahre

* bezeichnet den Abgang im Laufe des Schuljahres.

Oberprima. (21)
Darius, Wilhelm.
Delrée, Felix.
Doetsch, Caspar.
Gaul, Franz.
Heimsoeth, Franz.
Hoederath, Peter.
Krämer, Eduard.
Lückerath, Wilhelm.
Mengelberg, Edmund.
Meurer, Carl.
Meurers, Max.
Mohr, Paul.
Mühlen, Joseph.
*Peiß, Baptist.
Pollhammer, Heinrich.
Ritzenhoff, Ernst.
Schmitz, Alphons.
Schwarz, Franz.
Stoff, Leopold.
Wackerzapp, Michael.
Wassen, Joseph.

Unterprima (29)
Andries, Joseph.
Braubach, Everhard.
Braun, Joseph.
Brüggemann, Friedrich.
Caspers, Joseph.
Commes, Carl.
Fischer, Heinrich.
*Hammenstede, Johann.
*Harst, Christian.
Haupt, Johann.
Hendrichs, Max.
Hillenkamp, Carl.
Jansen, Joseph.
*Küpper, Joseph.
Kux, Johann.
Lettow, Paul.
Lückerath, Hubert.
*Merges, Robert.
Mertznich, Matthias.
Müller, Wilhelm.
Raven, Huber
Rolshoven, Pil.
Schaurte, Chri
Schmitz, Jac
Schopen, Car
Schreinert, Gstav.
Schüthuth, Pet.
Wingen, Anto
Wirtz, Joseph

Obersecund. (2
*Baumeister, Heinr
Bigge, Wilhe
Boese, Eduar

, Auguſtin.
Ludwig.
Auguſt.
, Carl.
ohann.
drich.
, Joſeph.
Auguſt.
wig.
arl.
arl.
Conrad.
edrich.
Xaver.
Ferdinand.
ger, Carl.
hard.
uſt.
duard.
Heinrich.
url.
Balduin.
l.
r.
Franz.

unda. (49)

iedrich.
inz.
Jacob.
onrad.
car.
rwin.
oh.
elm.
drich.
einrich.
old.
arl.
Matthias.
erdinand.
ob.

Gronewald, Michael.
*Gülcher, Alfred.
*Hergersberg, Friedrich.
Hilgers, Peter.
Hoff, Egbert.
Klein, Joſeph.
*Klein, Xaver.
Kochs, Wilhelm.
Koellen, Joſeph.
*Krabler, Aloys.
Krantz, Michael.
Lettow, Ernſt.
Leyendecker, Carl.
Matzerath, Walther.
Maus, Heinrich.
Müllers, Peter.
Präemaſſing, Johann.
Quadflieg, Joſeph.
*Quadt, Joſeph.
Rheindorff, Friedrich.
Richter, Julius.
Schneiders, Friedrich.
Schnitzler, Jacob.
Schumacher, Adam.
Speier, Ludwig.
Spelthahn, Johann.
Statz, Jacob.
Sticker, Joſeph.
Stockebrand, Johann.
Unkel, Theodor.
*Wallé, Johann.
Willms, Carl.
Wolff, Carl.
Wolff, Wilhelm.

Tertia. (55)

Adenauer, Hermann.
Bachem, Emil.
Beſſel, Carl.
Birkhäuſer, Joſeph.
Birkhäuſer, Ferdinand.
Breuer, Joſeph.
Brüggemann, Carl.
Burkhardt, Alfred.
Claiſen, Wilhelm.
Cloſſet, Emil.
Compes, Joſeph.
Dünnwald, Franz.
Eckertz, Heinrich.
Erlenwein, Auguſt.
Eſch, Paul.
Eſſer, Peter.
Fluthgraf, Carl.
Freusberg, Theodor.
Frank, Alphons.
Frank, Robert.
Fühling, Emil.
Gronewald, Franz.
Grosman, Gottfried.
Grosman, Philipp.
Hahn, Roland.
Heimſoeth, Marcus.
Hemmelding, Johann.
*Hoßdorf, Chriſtian.
Heidemann, Carl.
Heukeshoven, Johann.
*Keller, Carl.
v. Knapp, Heinrich.
Kramer, Eduard.
Kremer, Chriſtian.
Kühlwetter, Eduard.
Küppers, Joſeph.
Leuffen, Otto.
*Moers, Joſeph.
Mülhens, Julius.
*Niedeggen, Gottfried.
Pilgram, Johann.
Reiß, Joſeph.
Reuleaux, Lorenz.
Schievenbuſch, Everhard.
Schippers, Walther.
Schlöſſer, Ernſt.
Schmitz, Joſeph.
Sorgenfrey, Clemens.
Schnitzler, Joſeph.
Staffel, Franz.
Trimborn, Joſeph.
*Wieklow, Max.
Wolter, Peter.
*Woringen, Severin.
Worms, Victor.

Quarta. (37)

Barth, Gottfried.
*Bender, Theodor.
Boeſe, Auguſt.
Braubach, Wilhelm.
Brodeſſer, Theodor.
Decker, Franz.
Dreeſen, Engelbert.
Dubelman, Peter.
*Elven, Carl.
Eſſingh, Theodor.
Flohr, Albert.
Groß, Joſeph.
Hanſen, Heinrich.
Hewel, Wilhelm.
Hill, Arthur.
Höcker, Heinrich.
Hoffmann, Wilhelm.
Keller, Albert.
Leyendecker, Ernſt.
Lohr, Theodor.
Mauer, Heinrich.
Mertens, Carl.
Meſtrum, Leopold.
Meurers, Friedrich.
Norrenberg, Franz.
Patron, Heinrich.
Schenk, Max.
Schnitzler, Heinrich.
Seidenfeld, Peter.
Trimborn, Carl.
Vohl, Heinrich.
Vohl, Carl.

Wollé, Jacob.
Wendeler, Franz.
Wildenburg, August.
*Wildenburg, Wilhelm.
Winzen, Wilhelm.

Quinta. (55)

Ahlersmeier, Hermann.
Bachem, Max.
Bauer, Hubert.
Bergstein, Joseph.
Bessel, Wilhelm.
Blatzheim, Michael.
Böcker, Johann.
Burkardt, Julius.
v. Canstein, Rudolph.
Claes, Ferdinand.
Compes, Paul.
*Cotta, Richard.
Ennen, Hubert.
Faßbender, Peter.
Firmenich, Reinhold.
Frings, Adolf.
Fröhlich, Joseph.
von Gal, Georg.
Geuer, Anton.
Graß, Joseph.
Hoffmann, Joseph.
Hölzer, Carl.
Horatz, Paul.
Hummelsheim, Friedrich.
Iven, Anton.
Kesting, Anton.
v. Knapp, Hermann.
Krosch, Christian.
Lützen, Joseph.
Mahlberg, Heinrich.
Mertens, Heinrich.
Nolden, Ludwig.
*Pfennings, Robert.
Primassin, Wilhelm.
*Rasquin, Wilhelm.
Richter, Emil.
Sabath, August.
Schippers, Rudolf.
Siebers, Anton.
Simon, Salomon.
Simon, Saly.
Spengler, Edwin.
Staudt, Georg.
Sticker, Franz.
Thönissen, Ferdinand.
Velder, Carl.
Vohl, Hermann.
van Werden, Heinrich.
Werres, Felix.
Wilden, Peter.
Willick, Franz.
Wißdorf, Theodor.
Wolff, Julius.
Wülffrath, Joseph.
Zaun, Emil.

Sexta. (50)

Bauer, Clemens.
Bayer, Anton.
Becker, Joseph.
Behler, Joseph.
Braubach, Michael.
Daniels, Georg.
Esser, Joseph.
Fluthgraf, Aloys.
Fremerey, Alfred.
Fuchs, Gustav.
von Gal, Joseph.
Geissel, Edgar.
Geuer, Joseph.
Hammenstede, Gregor.
Hergersberg, Max.
Hoff, Karl.
Jonen, Joseph.
Jüssen, Peter.
Kahlenborn, Conrad.
Kayser, Adolf.
Kochs, Joseph.
Kühlwetter, Eugen.
Küppers, Joha[illegible]
Kurth, Heribert
Lemm, Peter.
Leonhardt, Her[illegible]
Loosen, Georg.
Lürig, Eduard.
Lürig, Karl.
Lutter, Michael
Meurers, Ferd[illegible]
Meuser, Paul.
Nacken, Oscar.
Offermann, H[illegible]
Ophoff, Bernh[illegible]
Porten, Everh[illegible]
Reuland, Joha[illegible]
Stadler, Max.
Richrath, Fran[illegible]
Riem, Johann
Rohmann, M[illegible]
Schlösser, Hu[illegible]
Schnickel, Jos[illegible]
Seidenfeld, He[illegible]
Thönissen, Ed[illegible]
Thönissen, Eu[illegible]
Trimborn, Co[illegible]
Trimborn, M.
Wagner, Karl.
Worms, Otto

Demnach besuchten das Gymnasium im Laufe des Schuljahres überhaupt 32 [illegible] Darunter befanden sich der Konfession nach 300 Katholiken, 19 Evangelische und 5 Israeliten [illegible] Köln oder dessen nächster Umgebung bei den Ihrigen wohnhaft waren aus den obern Klassen 79 [illegible] den mittlern 82, aus den untern 97, zusammen 258. Auswärtige Schüler waren 66. [illegible] aus der Gesammtzahl aus 27, blieben also bis zum Schlusse des Schuljahres 297.

2. Auf Grund der schriftlichen und mündlichen Abiturienten-Prüfung, welche [illegible] 9. und 10. August unter dem Vorsitze des Herrn Geheimen Regierungs- und Provinzialschulrath Lucas als Königlichen Kommissarius abgehalten wurde, erhielten sämmtliche Oberprimaner [illegible] der Reife.

1. Wilhelm Darius aus Erkelenz, 21 Jahre alt, katholisch, studirt Theologie in Bonn.
2. Felix Delrée aus Köln, 19 J., katholisch, Jurisprudenz in Bonn.
3. Caspar Doetsch aus Coblenz, 21 J., katholisch, Jurisprudenz und Cameralia [illegible]
4. Franz Gaul aus Schleiden, 21 J., katholisch, Cameralia in Bonn.

Franz Heimsoeth aus Köln, 20 J., katholisch, Medicin in Bonn.
Peter Hoederath aus Overath, 17 J., katholisch, Theologie in Bonn.
Eduard Krämer aus Düsseldorf, 21 J., evangelisch, Medicin in Berlin.
Wilhelm Lückerath aus Brauweiler, 18 J., kath., Theologie u. Mathematik in Münster.
Edmund Mengelberg aus Linz a. Rh., 17 J., katholisch, Jurisprudenz und Cameralia in Bonn.
Carl Meurer aus Mayen, 21 J., katholisch, Theologie in Bonn.
Max Meurers aus Köln, 19 J., katholisch, Jurisprudenz in Bonn.
Paul Mohr aus Köln, 18 J., katholisch, Medicin in Bonn.
Joseph Mühlen aus M.-Gladbach, 18 J., katholisch, Theologie und Philologie in Bonn.
Heinrich Pollhammer aus Langenberg, 20 J., kath., Theologie und Philologie in Bonn.
Ernst Ritzenhoff aus Köln, 18 J., katholisch, Theologie in Bonn.
Alphons Schmitz aus Aachen, 18 J., katholisch, Medicin in Greifswalde.
Franz Schwarz aus Köln, 21 J., katholisch, Theologie in Münster.
Leopold Stoff aus Bonn, 21 J., katholisch, Theologie in Bonn.
Michael Wackerzapp aus Immerath, 18 J., katholisch, Theologie und Philologie in Bonn.
Joseph Wassen aus Kaldenkirchen, 20 J., katholisch, Theologie in Münster.

Abiturienten Delrée, Gaul, Mühlen und Wackerzapp wurde die mündliche Prüfung

3. Uebersichtstabelle über die Beschäftigung der Lehrer und die Vertheilung des Un

† bezeichnet den im Laufe des Schuljahres neu Eingetretenen. Die in Klammern eingeschlossenen Unterrichtsgegenstände hat der t
von einem andern übernommen.

Lehrer.	I. A. Ordin.: Dr. Klein.	I. B. Ordin.: Dr. Spengler.	II. A. Ordin.: Dr. Krauß.	II. B. Ordin.: Dr. Besse.	III. Ordin.: Dr. Worbs.	IV. Ordin.: Dr. Wahlenberg.	V. Ordin. Dr. Vog
1. Prof. H. Bigge, Director.	4 Griech.	2 Homer.	2 Virgil.				
2. Dr. J. J. Klein, erster Oberlehrer.	8 Latein. 2 Homer. 2 Französ.	2 Französ.	2 Homer.				
3. Dr. Chr. G. Spengler, zweiter Oberlehrer.	3 Geschichte.	8 Latein. 4 Griech. 3 Geschichte.					
4. Dr. J. H. van Endert, katholischer Religionslehrer.	2 Religion. 2 Hebräisch.	2 Religion.	2 Religion. 2 Hebräisch.	2 Religion.	2 Religion.	2 Religion.	
5. Dr. J. Krauß, dritter Oberlehrer.			8 Latein. 2 Deutsch.	2 Homer.		6 Griech.	
6. J. P. Schmidt, vierter Oberlehrer.	4 Math. 2 Physik.	4 Math.	4 Math. 1 Physik.	4 Math. 1 Physik.			
7. Dr. Fr. W. Wahlenberg, erster ordentlicher Gymnasiallehrer.					2 Französ. 2 Ovid.	10 Latein. 2 Deutsch. 2 Französ.	
8. P. A. Conrads, zweiter ordentlicher Gymnasiallehrer.					3 Math. 2 Naturk.	3 Math.	3 Religi 3 Rechn. 2 Natu
9. Dr. H. Worbs, dritter ordentl. Gymnasiallehrer.				3 Geschichte.	8 Latein. 6 Griech. 2 Deutsch.		
10. Dr. J. M. Stahl, vierter ordentlicher Gymnasiallehrer.	3 Deutsch.	3 Deutsch.	4 Griech. 3 Geschichte.		3 Geschichte.		2 Geo.
11. Dr. P. Besse, fünfter ordentlicher Gymnasiallehrer.				10 Latein. 4 Griech. 2 Deutsch.		3 Geschichte.	
12. B. Klein, sechster ordentlicher Gymnasiallehrer.			2 Französ.	2 Französ.			3 Franz.
13. Dr. E. Vogt, commissarischer Lehrer.					[2 Ovid.]		10 Late. 2 Deut.
14. Dr. F. C. von Knapp, evangelischer Religionslehrer.	I. Cötus 2 Religion.				II. Cötus 2 Religi		
15. Dr. C. Rebender, Probecand.							[2 Nat
16. †Dr. C. Velten, Probecandidat.				[2 Math.]			
17. †G. Schiffer, Probecandidat.					[2 Ovid.]	[2 Griech.]	[2 Late.]
18. Fr. Dreesen, Zeichenlehrer.	2 combinirte Zeichenstunden.					2 Zeichnen.	2 Zeichn.
19. P. Baum, Schreiblehrer.							3 Schr.
20. H. Kipper, Gesanglehrer.	3 Stunden Uebungen des Chores.						1 Gesa.
21. †D. Dienz, Schreiblehrer.							[3 Schr.

E. Lehrmittel.

r Erweiterung der Lehrer- und Schüler-Bibliothek, des physikalischen und natur-chen Apparates, der Sammlung von Zeichen-Vorlagen, Modellen und Musi-urden die etatsmäßigen Mittel verwendet. An Geschenken erhielt die Anstalt:

die naturhistorische Sammlung: Einen Stachelfisch und einige Gliederthiere von Herrn Krott; einen us der Mühlsteinlava bei Niedermendig von dem Grubenbesitzer Herrn Xaver von Brewer; einen Buntspecht extaner Schnickel; eine wilde Katze von dem Quintaner Richter.

die Musikalien-Sammlung: P. Stein, Gesänge für die untern und mittlern Klassen der Gymnasien-, höhern Bürgerschulen, von der Verlagsbuchhandlung de Haan.

die Gymnasial-Bibliothek: C. Boeckler, Geschichtliche Mittheilungen über Stadt und Propstei Belecke, erfasser. Lattmann, zur Methodik des grammatischen Unterrichtes im Lateinischen und Deutschen, durch dlung Vandenhoeck et Ruprecht. Dr. Wohlrab, Aufgabensammlung zur Einübung der griechischen Formen-yntax, durch die Teubner'sche Buchhandlung. Dr. Stein, Geschichtstabellen, durch die Theising'sche ng. Dr. Féaux, Sammlung von Rechnungsaufgaben, durch die Baedecker'sche Buchhandlung in Essen. iische Tafel von Deutschland seit Bildung des norddeutschen Bundes, durch Kanitz in Gera. Dr. Schumann, r Arithmetik und Algebra durch die Weidmann'sche Buchhandlung. Ennen, Quellen zur Geschichte der 3. Bd., und Weyden, Geschichte der Juden in Köln, durch die DuMont-Schauberg'sche Verlagsbuchhand- und Eschweiler, Lehrbuch der Geometrie, 3. Theil, durch dieselbe. Benguerel, Geschichte Attila's von für die Schule bearbeitet, durch den Herausgeber.

em ich für diese Gaben im Namen der Anstalt öffentlich meinen Dank ausspreche, empfehle zugleich dem fernern Wohlwollen ihrer Gönner.

schafft wurden für die Schüler-Bibliothek: H. Smidt, Theodor Körner, ein Dichter- und Heldenleben. Fr. Columbus, Cortez und Pizarro. Alexander von Humboldt, Reisen in die Aequinoctialgegenden. Werner Hahn, m von Ziethen. Jäger, die Wunder der unsichtbaren Welt. Stacke, Erzählungen aus der alten Geschichte. lexicon des klassischen Alterthums. Hiltl, der böhmische Krieg. Andersen's Märchen, übersetzt von Reuscher. eben, zur Diätetik der Seele. E. Geibel, Juniuslieder. Gedichte. J. Hub, Deutschlands Balladen- und Ro-r. v. Putlitz, was sich die Welt erzählt. Dr. Neuhaus, die Sagen von den Göttern und Helden der Grie-imer. Nuß, in der freien Natur. Nuß, meine Freunde. Walther von der Vogelweide, herausgegeben von Simrock, altdeutsches Lesebuch, (angeschafft aus einem Geldgeschenke von 3 Thalern des Herrn Dr. med. . Gruppe, vaterländische Gedichte. Trant, Geschichte des Mittelalters. Martin, mittelhochdeutsche Gram-Wörterbuch.

F. Schlußfeierlichkeiten.

chlußgottesdienst mit Te Deum: Sonntag den 25. August.

Oeffentliche Prüfungen in der Aula des Gymnasiums.

Montag, den 26. August, Morgens:

Sexta von 9—10. Latein B. Klein. — Religion Conrads.

Quinta von 10—11. Deutsch Dr. Vogt. — Geographie Dr. Stahl.

Quarta von 11—12. Französisch Dr. Wahlenberg. — Mathematik Conrads.

emselben Tage Nachmittags:

Tertia von 3—4. Griechisch Dr. Worbs. — Brandenburgisch-preußische Geschichte Dr. Stahl.

Untersecunda von 4—5. Latein Dr. Besse. — Religion Dr. van Endert.

Dinstag, den 27. August, Morgens:
Obersecunda von 9—10. Deutsch Dr. Krauß. — Mathematik: Schmit.
Unterprima von 10—11. Griechisch Dr. Spengler. — Französisch Dr.

3) Schlußactus und Entlassung der Abiturienten. Dinstag den 27. August, Nachmitta

1. Gesang: Ave verum, von Mozart.
2. Declamation des Sextaners: Joseph von Gal, Siegfrieds Schwert, von
„ „ „ Joseph Becker, Der Trompeter an der Kaja
Julius Mosen.
„ „ Quintaners: Franz Willick, Das Horn von Buren, v
Kopisch.
„ „ „ Wilhelm Bessel, Der getreue Eckart, von
„ „ Quartaners: Heinrich Hansen, Heinrich der Vogelste
v. Mühler.
„ „ „ Albert Flohr: Die Belagerung von Otte
v. Vincke.
3. Gesang: Mailied, von F. Mendelssohn-Bartholdy.
4. Declamation des Tertianers: Karl Bessel, Bertran de Born, von Uhland
„ des Untersecundaners: Joseph Köllen, das Gewitter, von Anf.
„ des Obersecundaners: Peter Wery, Aus der Glocke, von Scher.
5. Gesang: Sonntags am Rheine, von H. Kipper.
6. Lateinische Rede des Abiturienten Michael Wackerzapp: Graecorum historia
manis documento est, quomodo patriae sua
luti optime consulere possint.
Deutsche Rede des Unterprimaners Anton Wingen: Ueber den sittlichen Geh
Schiller'schen Dichtung.
7. Gesang: Chor und Solo aus Joseph in Aegypten, von Méhul.
8. Schlußworte des Directors. — Entlassung der Abiturienten.
9. Gesang: Abschiedslied, von Graeff.

G. Besondere Mittheilungen.

1) Das nächste Schuljahr beginnt Freitag den 4. October. Die nöthigen Prüfungen fin
woch den 2. und Donnerstag den 3. October Statt.

2) Anmeldungen müssen spätestens vor dem 2. October bei dem Unterzeichneten erfolgen und zw
Eltern oder durch deren Stellvertreter in Person oder schriftlich, unter Vorlegung des Abgangszeugnisses, resp. eines
Führung und Leistungen des betreffenden Schülers während des letzten Jahres genügend sich aussprechenden Unter
zeugnisses und des Geburtsscheines. Die Prüfung der neu angemeldeten Schüler beginnt Mittwoch den 1. O
Nachmittags 2 Uhr.

mache dabei besonders auf folgende für die Aufnahme in Sexta geltenden Bestimmungen aufmerksam:
Die Aufnahme in die unterste Gymnasialklasse darf nicht vor dem vollendeten neunten Lebensjahre erfolgen.
Gefordert wird als Bedingung der Aufnahme: Geläufigkeit nicht allein im mechanischen, sondern auch im
gisch richtigen Lesen in deutscher und lateinischer Druckschrift; Kenntniß der Redetheile und des einfachen
Satzes; Fertigkeit im orthographischen Schreiben; einige Fertigkeit, etwas Dictirtes leserlich und reinlich nach-
schreiben; praktische Geläufigkeit in den vier Species mit unbenannten Zahlen und in den Elementen der
Brüche; Bekanntschaft mit den Geschichten des Alten Testamentes und mit dem Leben Jesu.
uswärtige Schüler müssen so untergebracht werden, daß sie unter der nöthigen Aufsicht stehen. Wirthshäuser
llgemeinen nicht als geeignet befunden werden. Auch ist aus mehrfachen Gründen zu wünschen, daß die
t allzu weit von dem Gymnasium entfernt wohnen.
s wird der dringende Wunsch ausgesprochen, daß die allenfalls beabsichtigten Abmeldungen so bald wie
n Falls aber noch vor dem 1. October d. J. durch die Eltern oder deren Stellvertreter erfolgen mögen.

, den 15. August 1867.

H. Bigge.

e wichtigsten elementaren Methoden

mmung von grössten und kleinsten Werten von Functionen

von

Professor Hans Schöller.

ZWEITER THEIL.

III.

e Methode kleinster Summen und grösster Producte

(Heilermann'sche Methode).

beiden Sätze, worauf diese Methode begründet ist, wurden von Heiler-
rst in einer Abhandlung, welche dem Jahresberichte der Provinzial-
hule zu Koblenz vom Jahre 1862 beigegeben ist, entwickelt und
vendung auf verschiedene Probleme dargethan. Später (1871) hat
n dem Werke: Eine elementare Methode zur Bestimmung von grössten
sten Werten, seine Methode erweitert und vervollkommnet. Ein
riss dieser Methode findet sich in Zons, Lehrbuch der Geometrie,
nd Fahle, Mathematische Extemporalien.
Heilermann'sche Methode zeichnet sich, wenn ihre Anwendung auch
hränkt ist, durch die Kürze und Einfachheit aus, mit der sie zum
führt.

r Satz. Das Product mehrerer veränderlicher Grössen ist bei ge-
mme ein Maximum, wenn die Factoren gleich sind.

is für zwei Factoren.

$+y=a$; man setze $x=\frac{a}{2}+v$, daher $y=\frac{a}{2}-v$, so ist:

$$u=xy=\left(\frac{a}{2}\right)^2-v^2.$$

druck wächst mit abnehmendem v, ist daher ein Maximum, wenn
; dann ist aber $x=y=\frac{a}{2}$.

is für drei Factoren.

$+y+z=a$. Man nehme z einstweilen constant, so wird $u=xyz$
m, wenn xy zu einem solchen gemacht wird. Für diese Annahme
$=a-z$ und xy wird ein Maximum, wenn $x=y=\frac{a-z}{2}$ ist.

Setzen wir nun:

$x = y = \frac{a}{3} + v$, so wird $\frac{a-z}{2} = \frac{a}{3} + v$, daher $z = \frac{a}{3} - 2v$

$$u = xyz = \left(\frac{a}{3} + v\right)\left(\frac{a}{3} - 2v\right) = \left(\frac{a}{3}\right)^3 - av^2 - 2v^3$$

u wird demnach ein Maximum, wenn $v = 0$ wird, also wenn $x = y$

Beweis für vier Factoren.

Sei $x + y + z + t = a$. Sei zunächst t constant, so ist $x + y +$
Soll $u = xyzt$ ein Maximum werden, so muss, da t constant, xyz ei
sein, was der Fall ist, wenn $x = y = z = \frac{a-t}{3}$ ist.

Setzen wir nun $x = y = z = \frac{a}{4} + v$, so muss, da $\frac{a-t}{3} = \frac{a}{4} -$

$$t = \frac{a}{4} - 3v \text{ sein und}$$

$$u = xyzt = \left(\frac{a}{4} + v\right)^3\left(\frac{a}{4} - 3v\right) = \left(\frac{a}{4}\right)^4 - \frac{3a^2v^2}{8} - 2av^3 -$$

u ist also ein Maximum, wenn $v = 0$ ist, also, wenn $x = y = z = t$

Beweis durch höhere Induction.

Nehmen wir an, es sei der Nachweis geliefert, dass das
r Factoren $x_1, x_2, x_3 \ldots x_r$, wobei die Summe dieser r Factor
ist, dann ein Maximum ist, wenn alle Factoren gleich sind.

Es komme nun noch ein Factor x_{r+1} hinzu, so dass also

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = a - x_{r+1}.$$

Soll $u = x_1 x_2 x_3 \ldots x_r . x_{r+1}$ ein Maximum sein, so muss:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_r = \frac{a - x_{r+1}}{r} \text{ sein.}$$

Man setze nun:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_r = \frac{a}{r+1} + v; \text{ dann ist:}$$

$$x_{r+1} = \frac{a}{r+1} - rv, \text{ daher: } u = \left(\frac{a}{r+1} + v\right)^r \left(\frac{a}{r+1} - v\right)$$

Mit Anwendung des binomischen Satzes ergibt sich:

$$u = \left(\frac{a}{r+1}\right)^{r+1} - \left[r\binom{r}{1} - \binom{r}{2}\right]\left(\frac{a}{r+1}\right)^{r-1} v^2 - \left[r\binom{r}{2} - \binom{r}{3}\right]\left(\frac{a}{r+1}\right)$$

$$- \ldots - \left[r\binom{r}{r-1} - \binom{r}{r}\right]\left(\frac{a}{r+1}\right) v^r - r v^{r+1}.$$

ber:

$$\binom{r}{k+1} = \binom{r}{k}\left(r - \frac{r-k}{k+1}\right) = \binom{r}{k}\frac{(r+1)k}{k+1} = \binom{r+1}{k+1}k,$$

ıan auch schreiben:

$$\left(\frac{a}{r+1}\right)^{r+1} - \binom{r+1}{2}\left(\frac{a}{r+1}\right)^{r-1}\cdot v^2 - 2\binom{r+1}{3}\left(\frac{a}{r+1}\right)^{r-2}\cdot v^3 -$$

$$1)\left(\frac{a}{r+1}\right)^{r-3} v^4 - \ldots - (r-1)\binom{r+1}{r}\left(\frac{a}{r+1}\right) v^r - r v^{r+1}.$$

also ein Maximum, wenn $v = 0$ ist, daher, wenn:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_r = x_{r+1} = \frac{a}{r+1}.$$

st demnach allgemein giltig.

ter Satz. Die Summe beliebig vieler Summanden, deren Product t, ist ein Minimum, wenn alle Summanden gleich sind.

is für zwei Summanden.

$= a$. Setzen wir nun $x = \sqrt{a} + v$, so ist:

$$y = \frac{a}{\sqrt{a}+v} = \sqrt{a} - \frac{v\sqrt{a}}{\sqrt{a}+v}, \text{ daher:}$$

$$u = x + y = 2\sqrt{a} + \frac{v^2}{\sqrt{a}+v}.$$

in Minimum, wenn $v = 0$ ist, demnach ist $x = y$.

s für drei Summanden.

$z = a$ oder $xy = \frac{a}{z}$. Soll $u = x + y + z$ bei einstweilen constantem

ıum sein, so muss nach dem bewiesenen Satze $x = y = \sqrt{\frac{a}{z}}$ sein.

nun $x = y = \sqrt[3]{a} + v$, so muss:

$$(\sqrt[3]{a}+v)^2 = \frac{a}{z} \text{ oder } z = \frac{a}{(\sqrt[3]{a}+v)^2} \text{ sein.}$$

ferner $z = \sqrt[3]{a} + m$, so folgt:

$$\frac{\sqrt[3]{a^2} + v^2\sqrt[3]{a}}{(\sqrt[3]{a}+v)^2}, \text{ daher: } z = \sqrt[3]{a} - \frac{2v\sqrt[3]{a^2} + v^2\sqrt[3]{a}}{(\sqrt[3]{a}+v)^2}, \text{ mithin:}$$

$$-z = 3\sqrt[3]{a} + 2v - \frac{2v\sqrt[3]{a^2} + v^2\sqrt[3]{a}}{(\sqrt[3]{a}+v)^2} = 3\sqrt[3]{a} + v^2\frac{3\sqrt[3]{a}+2v}{(\sqrt[3]{a}+v)^2}.$$

in Minimum für $v = 0$, daher $x = y = z$.

s für vier Summanden.

$t = a$. Soll $x + y + z + t = u$ ein Minimum sein, so muss bei t $x + y + z$ ein Minimum sein, was nach dem Vorigen der Fall

ist, wenn $x=y=z=\sqrt[3]{\frac{a}{t}}$ ist. Setzen wir nun $x=y=z=\sqrt[4]{a}+v$

$(\sqrt[4]{a}+v)^3=\frac{a}{t}$ sein, woraus $t=\frac{a}{(\sqrt[4]{a}+v)^3}=\sqrt[4]{a}-\frac{3v\sqrt[4]{a^3}+3v^2\sqrt[4]{a}}{(\sqrt[4]{a}+}$

daher: $u=4\sqrt[4]{a}+3v-\frac{3v\sqrt[4]{a^3}+3v^2\sqrt[4]{a^2}+v^3\sqrt[4]{a}}{(\sqrt[4]{a}+v)^3}=$

$$=4\sqrt[4]{a}+v^2\frac{6\sqrt[4]{a^2}+8v\sqrt[4]{a}+3v^2}{(\sqrt[4]{a}+v)^3}.$$

Für $v=0$ ist u ein Minimum, daher $x=y=z=t$.

Beweis durch höhere Induction.

Nehmen wir an, der Satz sei für r Summanden bewiesen, also

$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_r$ ein Minimum,

wenn $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_r$ ist.

Sei $x_1x_2x_3\ldots x_rx_{r+1}=a$, daher $x_1x_2x_3\ldots x_r=\frac{a}{x_{r+1}}$, s

constantem x_{r+1} $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_r$ ein Minimum sein, was ei

$$x_1=x_2=x_3=\ldots=x_r=\sqrt[r]{\frac{a}{x_{r+1}}}\text{ ist.}$$

Setzen wir nun $x_1=x_2=x_3=\ldots=r_r=\sqrt[r+1]{a}+v$, so muss

$(\sqrt[r+1]{a}+v)^r=\frac{a}{x_{r+1}}$ sein, woraus $x_{r+1}=\frac{a}{(\sqrt[r+1]{a}+v)^r}$ ode

$$x_{r+1}=\sqrt[r+1]{a}-\frac{\binom{r}{1}\sqrt[r+1]{a^r}.v+\binom{r}{2}\sqrt[r+1]{a^{r-1}}.v^2+\ldots+\binom{r}{r}\sqrt[r]{a}}{(\sqrt[r+1]{a}+v)^r}$$

mithin:

$$u=x_1+x_2+x_3+\ldots+x_r+x_{r+1}=(r+1)\sqrt[r+1]{a}+r.v-$$

$$-\frac{\binom{r}{1}\sqrt[r+1]{a^r}v+\ldots\ldots+\binom{r}{r}\sqrt[r+1]{a}.v^r}{(\sqrt[r+1]{a}+v)^r}$$

$$u=(r+1)\sqrt[r+1]{a}+\frac{1}{(\sqrt[r+1]{a}+v)^r}\Big\{\Big[r\binom{r}{1}-\binom{r}{2}\Big]\sqrt[r+1]{a^{r-1}}.v^2+$$

$$+\Big[r\binom{r}{2}-\binom{r}{3}\Big]\sqrt[r+1]{a^{r-2}}.v^3+\ldots+r\sqrt[r+1]{a}.v^r\Big\}=$$

$$=(r+1)\sqrt[r+1]{a}+\frac{v^2}{(\sqrt[r+1]{a}+v)^r}\Big[\binom{r+1}{2}\sqrt[r+1]{a^{r-1}}+2\binom{r+1}{3}\sqrt[r+1]{a^{r-}}.v$$

$$+\ldots+r\sqrt[r+1]{a}.v^{r-2}\Big].$$

ein Minimum für $v = 0$, mithin muss:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_r = x_{r+1} \text{ sein,}$$

st daher allgemein giltig.*

Beispiele.

ein gegebenes Quadrat a^2 ein anderes von kleinstem Inhalt so nen, dass dessen Eckpunkte in die Seiten des erstern fallen.

e Seite des gesuchten Quadrates y, sind ferner die Stücke, in welche ıkte desselben je eine Seite des gegebenen theilen, x und $a - x$, so alt des ersteren:

$$u = y^2 = x^2 + (a-x)^2 = a^2 - 2x(a-x).$$

ein Minimum werden, so muss $v = x(a-x)$ ein Maximum sein. nme der beiden Factoren constant ist, so ist dieses der Fall, wenn

n welchem Punkte der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes Perpendikel auf die Katheten fällen, damit das von ihnen und eln des rechten Winkels begrenzte Rechteck am grössten wird?

und b die Katheten des gegebenen Dreieckes, x und y die erakrechten und z und $c-z$ die Stücke der Hypotenuse, so ist $u = xy$; $= \frac{b}{c}(c-z)$, daher auch

$$u = \frac{ab}{c^2} z(c-z)$$

her auch u, ist ein Maximum, wenn $z = c - z$, daher $z = \frac{c}{2}$, $\frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$.

er den Seiten eines Rechteckes, dessen Umfang $2s$ ist, werden gleichseitige Dreiecke construiert. Wie gross sind die Seiten, esammtfläche ein Maximum oder Minimum werden soll?

und y die Seiten des Rechteckes, so ist $x + y = s$ und die erwähnte ne $u = xy + \frac{1}{2}\sqrt{3}(x^2 + y^2)$ oder da $x^2 + y^2 = s^2 - 2xy$ ist:

$$u = \tfrac{1}{2} s^2 \sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1)xy.$$

ein Maximum werden, so muss $xy = 0$ sein, was eintritt, wenn $= 0$ und $y = s$ oder $y = 0$ und $x = s$ ist. In diesem Falle schrumpft

erwähnten Schrift Heilermann's sind im Anschluss an diese beiden Theoreme allgemeinerer Natur bewiesen.

das Rechteck in eine Gerade zusammen. Dagegen wird u ein Mir
xy ein Maximum wird, d. i. wenn $x = y = \frac{s}{2}$ ist. Dann ist $u =$

4. Welches von allen Dreiecken, welche denselben Umfang l
den grössten Flächeninhalt?

Sind die Seiten des gesuchten Dreieckes x y und z, ist ferner $x +$
so ist der Flächeninhalt desselben ausgedrückt durch:

$$u = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)} = \sqrt{s(s-x)(s-y)(x+y-s}$$

Es muss also $v = (s-x)(s-y)(x+y-s)$ ein Maximum werd
Summe der Factoren constant ist, so muss für das Maximum: $x+$
$= s-x = s-y$ sein, woraus $2x+y = 2s$ und $2y+x = 2s$ u
$x = y = \frac{2}{3}s = z$ folgt, d. h. das gesuchte Dreieck ist das gleichsi

5. Von einem ausserhalb eines Kreises, dessen Mittelpunk
legenen Punkte B werden an denselben Tangenten gelegt; wie r
der Radius des Kreises sein, damit das von den Tangenten u
rührungssehne begrenzte Dreieck möglichst gross wird?

Seien die Berührungspunkte A und E, ferner D der Durchsn
der Berührungssehne AE mit der Linie $BC = a$ und $AC = x$, so ist

$$u = AD \cdot BD, \quad AD = \sqrt{CD \cdot BD}.$$

Ferner ist $x^2 = a \cdot CD$, woraus $CD = \frac{x^2}{a}$ und $BD = a - \frac{x^2}{a}$, demnch

$$u = \sqrt{\frac{x^2(a^2-x^2)^3}{a^4}}.$$

Es muss daher $x^2(a^2-x^2)^3$, mithin auch

$$(a^2-x^2)(a^2-x^2)(a^2-x^2) \cdot 3x^2$$

ein Maximum werden.

Die Summe der vier Factoren ist constant, daher für das Maxi

$$a^2 - x^2 = 3x^2 \text{ oder } x = \frac{a}{2}.$$

Für diesen Wert ist $u = \frac{3a^2}{16}\sqrt{3}$.

6. Ein längs einer geraden Linie bewegter Stab von der Lyc
aus der constanten Entfernung d angesehen; in welcher Lage rsc
dem beobachtenden Auge unter dem grössten Gesichtswinkel?

Man fälle vom Punkte A, wo sich das Auge befindet, di Se
$AB = d$ auf die gegebene Gerade. Die Entfernung des unteren End
des Stabes D von B sei x, der $\sphericalangle DAB = \alpha$ und der Gesichtswi
Stabes $\sphericalangle CAD = \varphi$.

ist tang $\alpha = \frac{x}{d}$; tang $(\varphi + \alpha) = \frac{s+x}{d}$, woraus:

$$\text{tang } \varphi = \frac{ds}{d^2 + x(s+x)} \text{ folgt.}$$

$x) = -[-x(s+x)]$ gesetzt werden kann, so muss, falls tang φ um wird, auch $-x(s+x)$ ein Maximum werden, was für $x = \frac{s}{2}$ Es muss also das von A gefällte Perpendikel den Stab CD halbieren.

nem gegebenen Dreieck ist ein Rechteck eingeschrieben; in das bgeschnittene Dreieck ist ein zweites Rechteck eingeschrieben, dessen il kleiner ist, als die des ersten. Wie gross muss letztere sein, Summe der Inhalte beider Rechtecke ein Maximum ist?

ie Fig. 22) AB = a, CD = h, GH = x, EF = y, EJ = z, daher GL = nz, olgende Gleichungen:

halt $u = nxz + yz$, $x = \frac{a(h-nz)}{h}$, $y = \frac{a[h-(n+1)z]}{h}$, daher

$+1)h-(n^2+n+1)z]$.

ein Maximum werden, so muss auch

$$(n^2+n+1)\,z\,[(n+1)h-(n^2+n+1)z]$$

m werden. Das findet statt für $2z(n^2+n+1) = (n+1)h$, woraus

$$z = \frac{n+1}{2(n^2+n+1)}h.$$

sen Wert ist:

$$x = \frac{n^2+n+2}{2(n^2+n+1)} \cdot a, \qquad y = \frac{n^2+1}{2(n^2+n+1)} \cdot a$$

$$\text{und } u = \frac{(n^2+1)(n+1)(2n+1)}{2(n^2+n+1)^2} \cdot \frac{ah}{2}.$$

st $z = GL = CN = \frac{1}{3}h$ und $u = \frac{ah}{3} = \frac{2}{3} \cdot \triangle ABC$.

ler Peripherie eines Kreises vom Radius r ist ein Punkt A ge- ll parallel zur Tangente dieses Punktes eine Sehne BD so ge- n, dass das $\triangle$ ABD ein Maximum wird.

ehe von A aus den Durchmesser $AE \perp BD$, welcher BD in C an setze nun $BC = CD = y$ und $CA = x$, so muss:

$= xy$ oder, da $y = \sqrt{x(2r-x)}$, $u = \sqrt{x^3(2r-x)}$.

s daher $x^3(2r-x)$ oder auch $(6r-3x)\,x\,.\,x\,.\,x$ ein Maximum r $x = \frac{3}{2}r$ und $u = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$.

9. *Auf den Seiten eines Dreieckes BC, CA und AB be Punkte A_1, B_1 und C_1 so zu bestimmen, dass $BA_1 = CB_1 = A$ $\triangle A_1B_1C_1$ möglichst klein wird.*

Sei $AC_1 = CB_1 = BA_1 = x$, daher $C_1B = c - x$, $A_1C = a - x$ $= b - x$, so müssen folgende Proportionen stattfinden:

$$\triangle AB_1C_1 : ABC = x(b-x) : bc,$$
$$\triangle A_1BC_1 : ABC = x(c-x) : ac,$$
$$\triangle A_1B_1C : ABC = x(a-x) : ab.$$

Ferner ist $u = \triangle A_1B_1C_1 = ABC - (AB_1C_1 + A_1BC_1 + A_1B_1C)$

$$u = \triangle ABC \left[1 - \frac{x(a-x)}{ab} - \frac{x(b-x)}{bc} - \frac{x(c-x)}{ac}\right] =$$

$$= \frac{\triangle ABC}{a.b.c}\{abc - x[(ab+ac+bc) - (a+b+c)x]$$

Soll u ein Minimum sein, so muss der Ausdruck

$$x[(ab+ac+bc) - (a+b+c)x] \text{ oder auch}$$
$$(a+b+c)\,x[(ab+ac+bc) - (a+b+c)\,x]$$

ein Maximum sein. Dieses ist der Fall, wenn:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab+ac+bc}{a+b+c}.$$

10. *Auf dem Durchmesser eines Kreises mit dem Mittelpu dem Radius r sind zu beiden Seiten des Mittelpunktes zwei Punk gegeben, so dass $AC = CB = a$. Von A und B sind zum Kreise d AD und BE so zu ziehen, dass das Trapez ABED ein Maxim*

Sei der $\sphericalangle CAD = \varphi$, ferner $AD = m$, $BE = n$, so ist d Flächeninhalt:

$$u = \frac{(m+n)\,BF}{2}, \text{ wo } BF \perp AD \text{ ist.}$$

Nun ist $BF = 2a \cdot \sin\varphi$, und wenn wir ferner die Punkte D u verbinden, ergibt sich aus den $\triangle ACD$ und BCE $r^2 = a^2 + m^2 - a$ und $r^2 = a^2 + n^2 + 2an \cdot \cos\varphi$, woraus

$$m = \quad a \cdot \cos\varphi \pm \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2\varphi}$$
$$n = -a \cdot \cos\varphi \pm \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2\varphi} \text{ folgt.}$$

Die unteren Zeichen sind unzulässig, da n positiv sein muss; (m

$$m + n = 2\sqrt{r^2 - a^2 \sin^2\varphi} \text{ und } u = 2a \cdot \sin\varphi \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2\varphi}.$$

Soll u ein Maximum sein, so muss es auch $a^2 \sin^2\varphi\,(r^2 - a^2 \sin^2\varphi)$ s dann der Fall ist, wenn $a^2 \sin^2\varphi = r^2 - a^2 \sin^2\varphi$, oder wenn $\sin\varphi =$

Der Abstand BF oder die Höhe des Trapezes ist sodann $r\sqrt{2}$ u

Ein gleichseitiges Dreieck ABC, dessen Seite a ist, ist gegeben. Man von den Ecken desselben drei congruente gleichschenklige Vierecke so ab, dass der übrig bleibende Theil das Netz des grösstmöglichen bildet.

CD = CG = x und DH = y, so ist

$$= \frac{(a-2x)^2}{4}\sqrt{3} \cdot y$$

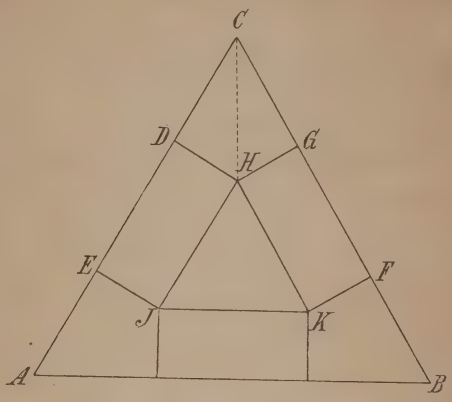
dem halben gleichseitigen

HH $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ist,

$$u = \frac{(a-2x)^2 \cdot x}{4}.$$

$(a-2x)^2 \cdot x$ oder $(a-2x)$ x ein Maximum werden, so $x = 4x$ oder $x = \frac{1}{6}a$ sein,

$\frac{1}{54}a^3$.



Figur 23

Aus einem Kreissector werde ein Trichter gebildet; wie gross muss Winkel des Sectors gewählt werden, wenn der Inhalt des Trichters gross sein soll?

Der Radius des Sectors r, der Centriwinkel desselben x, so ist die Bogens $\frac{r\pi x}{180}$; ist ferner y der Grundflächenradius des Kegels y, so

$= \frac{r\pi x}{180}$, daher $y = \frac{rx}{360}$ sein.

daher der Inhalt des Kegels:

$$u = \frac{\pi}{3}y^2 \cdot \sqrt{r^2 - y^2} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{r^3x^2}{360^2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{360^2}}$$

$\sqrt{1 - \frac{x^2}{360^2}}$ oder auch $\frac{x^2}{2 \cdot 360^2} \cdot \frac{x^2}{2 \cdot 360^2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{360^2}\right)$,

einem Maximum, wenn $\frac{x^2}{2 \cdot 360^2} = 1 - \frac{x^2}{360^2}$ oder

$$x = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \cdot 360^0 = \sqrt{6} \cdot 120^0 = 293^0\ 56'\ 19''.$$

einen gegebenen Kegel einen möglichst grossen Kegel so einzu- dass die Spitze des letzteren in der Basis des ersteren liegt.

Der Radius, h die Höhe des gegebenen, x und y die entsprechenden des gesuchten Kegels, so ist das Volum desselben:

$= \frac{\pi}{3}x^2y$ und, da $y = \frac{h}{r}(r-x)$ ist, $u = \frac{\pi h}{3r}x^2(r-x)$.

$x^2(r-x)$ oder auch $x \cdot x(2r-2x)$ wird ein Maximum, wenn x
oder $x = \frac{2}{3}r$ und $y = \frac{1}{3}h$.

Für diesen Wert ist $u = \frac{4}{81}r^2\pi \cdot h = \frac{4}{27} \cdot \frac{r^2\pi h}{3}$.

14. *Ein leuchtender Punkt B hat vom Mittelpunkt C eine Entfernung a; wie gross muss der Radius der Kugel sein, w leuchtete Theil ihrer Oberfläche möglichst gross sein soll?*

Zieht man von B an die Kugel eine Tangente BC, verbind nennt $AC = x$ und fällt $CD \perp AB$, so ist der beleuchtete Theil der Kug

$$u = 2\pi x \cdot DE = 2\pi x\left(x - \frac{x^2}{a}\right) = \frac{2\pi}{a}x^2(a-x).$$

$x^2(a-x)$ oder auch $x \cdot x(2a-2x)$ wird ein Maximum, wenn 2
oder $x = \frac{2}{3}a$, daher $u = \frac{8}{27}a^2\pi$.

15. *Einer Halbkugel denjenigen abgestumpften Kegel ein welcher den grössten Mantel hat.*

Sei r der Radius der Kugel, x der Radius der kleineren Grun y die Höhe des abgestumpften Kegels, so ist die Seite desselben:

$z^2 = y^2 + (r-x)^2$, und da $y^2 = r^2 - x^2$, $z^2 = 2r(r-$
daher der Mantel des abgestumpften Kegels:

$$u = \pi(r+x)\sqrt{2r(r-x)}.$$

Es muss also $(r+x)\sqrt{r-x}$ oder auch $(r+x)(r+x)(2-$
Maximum werden, was eintritt, wenn $r + x = 2r - 2x$ oder $x = \frac{1}{3}$
$y = \frac{2}{3}r\sqrt{2}$ und $u = \frac{8r^2\pi}{9}\sqrt{3}$.

16. *In einen mit Flüssigkeit gefüllten Kegel werde ein re sechsseitiges Prisma so eingetaucht, dass seine untere Grundfläche mit der Kegelbasis bleibe. Wie gross muss die Basis dieses Pris und wie tief muss es eingetaucht werden, damit es möglichst viel verdränge?*

Ist r der Grundflächenradius und h die Höhe des Kegels, ist er Seite der Basis und y die eingetauchte Höhe des Prismas, so ist das der verdrängten Flüssigkeit:

$u = \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot x^2 y$ und, da $y = \frac{h}{r}(r-x)$ ist, $u = \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{h}{r}x(r-$
Soll $x^2(r-x)$ oder $x \cdot x(2r-2x)$ ein Maximum sein, so muss:

$x = 2r - 2x$ oder $x = \frac{2}{3}r$ und $y = \frac{1}{3}h$, wofür $u = \frac{2}{9}\sqrt{\cdot r}$

*Einer Halbkugel soll ein möglichst grosser Cylinder eingezeichnet
welches ist das Verhältnis seines Volums zu dem der Halbkugel?*
der Radius der Halbkugel, x und y Halbmesser und Höhe des
so ist

$u = x^2\pi \,.\, y$ und, da $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ist, $u = \pi x^2 \sqrt{r^3 - x^2}$.

$^2\sqrt{r^2 - x^2}$ oder auch $x^2 \,.\, x^2(2r^2 - 2x^2)$ ein Maximum sein, so muss

$-2x^2$ oder $x = r\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} r \sqrt{6}$ und $y = \frac{1}{3} r \sqrt{3}$, daher

$^2\sqrt{3}$, daher das Verhältnis des Cylinders zur Halbkugel: $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

*Es soll unter allen möglichen geraden Prismen, welche einer Kugel
nem Radius eingeschrieben werden können, dasjenige gesucht
ssen Volum ein Maximum ist und umgekehrt, es soll unter allen
Prismen von gegebenem Volum dasjenige gesucht werden, welches
en Kugel eingeschrieben ist a) wenn die Grundfläche ein Quadrat,
hteck, c) ein reguläres n-eck ist.*

die Seite des Quadrates x und die Höhe des Prismas z, so ist das
$= x^2 y$ und, da $2x^2 + y^2 = 4r^2$,

$= \left(2r^2 - \frac{y^2}{2}\right) y$ und $u^2 = \left(2r^2 - \frac{y^2}{2}\right)\left(2r^2 - \frac{y^2}{2}\right) y^2$,

für $2r^2 - \frac{y^2}{2} = y^2$ oder $y = x = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ ein Maximum $u = \frac{8r^3}{3\sqrt{3}}$ statt.

Prisma ist also ein Würfel.

ehrt: $u = 2x^2 + y^2$ und, da $v = x^2 y$,

$$u = \frac{2v}{y} + y^2 = \frac{v}{y} + \frac{v}{y} + y^2, \text{ wo } u = 4r^2 \text{ ist.}$$

duct der Summanden constant ist, so findet für $y = x = \sqrt[3]{v}$ ein
tatt, d. h. das gesuchte Prisma ist ein Würfel.

Seiten der Grundfläche seien x und y, die Höhe z, so ist:

$$u = x \,.\, y \,.\, z \text{ und, da } x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2 \text{ ist,}$$
$$u^2 = x^2 y^2 (4r^2 - x^2 - y^2).$$

$^2 = 4r^2 - x^2 - y^2$ oder für $x^2 = y^2 = \frac{4}{3} r^2$ und $z^2 = \frac{4}{3} r^2$ ist u
m; daher das Prisma ein Würfel.

ehrt: $v = xyz$; $u = x^2 + y^2 + z^2$, wo $u = 4r^2$ ist; daher

$$u = x^2 + y^2 + \frac{v^2}{x^2 y^2}.$$

t der drei Factoren ist constant, daher u ein Minimum, wenn
$\frac{v^2}{^2 y^2}$ oder $x = y = \frac{v}{x^2}$ oder $x = y = z = \sqrt[3]{v}$, demnach das ge-
aa ein Würfel.

c) Ist der Radius des der Grundfläche eingeschriebenen Kreise

$$u = \frac{n\varrho^2}{2} z \sin\frac{360^0}{n} \text{ und, da } \varrho^2 = r^2 - \frac{z^2}{4},$$

$$u = \frac{n}{2}\left(r^2 - \frac{z^2}{4}\right) z \,.\, \sin\frac{360^0}{n}.$$

Es muss also $\left(r^2 - \frac{z^2}{4}\right) z$ oder auch $\left(r^2 - \frac{z^2}{4}\right)\left(r^2 - \frac{z^2}{4}\right)\frac{z^2}{2}$ ein

werden; daher muss $\frac{z^2}{2} = r^2 - \frac{z^2}{4}$ oder $z = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ und $\varrho = r\sqrt{\frac{2}{3}}$ i

daher: $\frac{z^2}{\varrho^2} = 2.$

Umgekehrt: $v = \frac{n}{2}\varrho^2 z \,.\, \sin\frac{360^0}{n}$, $u = \varrho^2 + \frac{z^2}{4}$ wo $u = r^2$ is

$$u = \frac{v}{nz \,.\, \sin\frac{360^0}{n}} + \frac{v}{nz \,.\, \sin\frac{360^0}{n}} + \frac{z^2}{4}$$

daher u ein Minimum für $z^3 = \frac{4v}{n \,.\, \sin\frac{360^0}{n}}$ und $\varrho^3 = \frac{v\sqrt{2}}{n \,.\, \sin\frac{360^0}{n}}$

19. *Welches gerade, n-seitige Prisma, dessen Basis ein regu ist, hat bei gegebenem Volumen a^3 die kleinste Oberfläche?*

Sei x die Seite der Grundfläche und y die Höhe des Prisma s

$$\frac{nx^2y}{4}\operatorname{cotg}\frac{180^0}{n} = a^3 \text{ und } u = nxy + \frac{nx^2}{2} \,.\, \operatorname{cotg}\frac{180^0}{n} \text{ od}$$

$$u = \frac{2a^3}{x}\operatorname{tg}\frac{180^0}{n} + \frac{2a^3}{x} \,.\, \operatorname{tg}\frac{180^0}{n} + \frac{nx^2}{2}\operatorname{cotg}\frac{180^0}{n}.$$

Wenn daher: $\frac{2a^3}{x} \,.\, \operatorname{tg}\frac{180^0}{n} = \frac{nx^2}{2} \,.\, \operatorname{cotg}\frac{180^0}{n}$ oder

$$x = a\sqrt[3]{\frac{4}{n}\operatorname{tg}^2\frac{180^0}{n}} \text{ und } y = a\sqrt[3]{\frac{4}{n}\operatorname{cotg}\frac{180^0}{n}},$$

so ist $u = 3a^2\sqrt[3]{2n \,.\, \operatorname{tg}\frac{180^0}{n}}$ ein Minimum.

20. *Unter allen geraden Prismen mit quadratischer Grundfläche einer Kugel von gegebenem Halbmesser eingeschrieben werden kann dasjenige gesucht werden, dessen Seitenoberfläche ein Maximum ist umgekehrt: es soll unter allen möglichen Prismen mit gleicher Seitenob dasjenige gesucht werden, welches der kleinsten Kugel eingeschrieben*

Ist x die Seite der Grundfläche, y die Höhe des Prismas und Radius der Kugel, so ist:

$= 4xy$ oder, da $2x^2 + y^2 = 4r^2$ ist, $u^2 = 32x^2(2r^2 - x^2)$,
$x^2 = 2r^2 - x^2$, oder $x = r$ und $y = r\sqrt{2}$ u ein Maximum.
kehrt: $M = 4xy$ und $u = 2x^2 + y^2$, wo u das Quadrat des Durch-
r gesuchten Kugel ist:

$$u = 2x^2 + \frac{M^2}{16x^2}.$$

Für $2x^2 = \frac{M^2}{16x^2}$ oder $x^2 = \frac{M\sqrt{2}}{8}$ und $y^2 = \frac{M\sqrt{2}}{4}$ ist

$$u = 4r^2 = \frac{M\sqrt{2}}{2}, \text{ daher } r^2 = \frac{M}{4\sqrt{2}}.$$

eine Kugel vom Radius r einen Kegelstutz von grösster Mantel-
uschreiben, wenn der Scheitelwinkel des vollständigen Kegels ge-
(Siehe Fig. 21.)
iehe $OF \perp AB$ und nenne $AF = x$, $DF = BG = y$, so ist die
des Kegelstutzes:

$$\pi \cdot AB - \pi \cdot DH \cdot AD = (x + y)^2 \pi \cdot \sin\alpha - (x - y)^2 \pi \cdot \sin\alpha =$$
$$= 4\pi xy \cdot \sin\alpha.$$

ner $OF^2 = r^2 - y^2 = x^2 \operatorname{tang}^2\alpha$ ist, so folgt:

$$u = 4\pi \cdot \cos\alpha \cdot y\sqrt{r^2 - y^2}.$$

ss demnach $y\sqrt{r^2 - y^2}$ oder auch $y^2(r^2 - y^2)$ ein Maximum
er $y = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$ und $x = \frac{1}{2}r\sqrt{2} \cdot \operatorname{cotg}\alpha$, mithin:

$$u = 2r^2\pi \cdot \cos\alpha.$$

der Winkel α veränderlich, so hat von allen diesen Kegelstutzen
grösste Mantelfläche (Maximum maximorum), für welchen $\cos\alpha$
n ist, daher für $\alpha = 0$; der Kegelstutz geht also in einen Cylinder
Mantelfläche $u = 2r^2\pi$, dessen Höhe $2y = r\sqrt{2}$ und dessen
durchmesser $r\sqrt{2}$ ist; der Cylinder ist also ein gleichseitiger.

z. Damit der grösste Kegelstutz in der Kugel wirklich zustande
n, muss A ausserhalb der Kugel liegen, also $AO > r$ oder $\frac{x}{\cos\alpha} > r$,
$< \frac{1}{\sqrt{2}}$, mithin $\alpha < 45^0$.

lches sind die Dimensionen eines cylindrischen Gefässes, welches
ite Menge Flüssigkeit fassen und bei dessen Anfertigung mög-
terial gespart werden soll?
Volum des Gefässes V, die Höhe y, der Halbmesser x und die
Oberfläche und der einen Grundfläche u, so ist:

$$V, \quad u = 2\pi xy + \pi x^2 = \frac{2V}{x} + \pi x^2, \text{ oder } u = \frac{V}{x} + \frac{V}{x} + \pi x^2.$$

Soll u ein Minimum sein, so muss also:

$$\frac{V}{x} = \pi x^2 \text{ oder } x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \text{ und } y = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}},$$

der betreffende Cylinder ist demnach die Hälfte eines gleichseitigen

23. Einer Kugel jenen Kegel zu umschreiben, welcher de Mantel besitzt.

Sei der Radius der Kugel r, der Radius des Kegels x und d und Seite z und y, so finden die Beziehungen

$$M = x\pi y,\ r = \frac{xz}{x+y},\ z = \sqrt{y^2 - x^2} \text{ statt,}$$

woraus sich $y = x\frac{x^2+r^2}{x^2-r^2}$ und $M = \pi x^2 \frac{x^2+r^2}{x^2-r^2}$ ergibt.

Um unsere Regel anwenden zu können, setzen wir $x^2 - r^2 =$ M übergeht in:

$$M = \pi \frac{2r^4 + 3r^2t^2 + t^4}{t^2}.$$

Soll M ein Minimum werden, so muss es auch $u = \frac{2r^4}{t^2} + t^2$, wa Fall ist, wenn $\frac{2r^4}{t^2} = t^2$ oder $t^2 = r^2\sqrt{2}$; demnach ist:

$$x = r\sqrt{1+\sqrt{2}},\ y = r\sqrt{7+5\sqrt{2}},\ z = r(2+\sqrt{2}).$$

24. An eine Ellipse soll eine Tangente so gelegt werden, ss zu den beiden Axen verlängert, mit diesen ein Dreieck von möglis Inhalt bildet.

---

* Einer ähnlichen Transformation hat man sich zu bedienen, wenn ma Methode die Aufgabe 32a auf Seite 52 (des vorjährigen Jahresberichtes) lösen vl. fläche des Cylinders wird ein Maximum, wenn $x^2 + xy$ oder $\frac{x^2+xy}{4r^2}$ oder, da $4r=$

wenn $\frac{x^2+xy}{4x^2+y^2}$ ein Maximum oder $u = \frac{4x^2+y^2}{x^2+xy}$ ein Minimum wird. Nun is $u =$

oder, wenn man $1 + \frac{y}{x} = z$ setzt: $u = \frac{5-2z+z^2}{z} = \frac{5}{z} - 2 - z.$

u wird aber ein Minimum, wenn $z = \frac{5}{z}$ oder $z = \sqrt{5}$ und $\frac{y}{x} = \sqrt{5} -$ oder $= \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) : 1$ ist. Es muss sich also die Höhe des gesuchten Cylinde zu messer der Grundfläche verhalten, wie die Seite eines regulären Zehneckes zu R umschriebenen Kreises. — —

Aehnlich ist die Lösung von Aufgabe 35 auf Seite 54. Man setze in $V = \frac{2\pi}{3}$

$x^2 - r^2 = t^2$, so wird $\frac{x^4}{x^2-r^2} = \frac{r^4+2r^2t^2+t^4}{t^2} = \frac{r^4}{t^2} + 2r^2 + t^2$ ein Minimu wer oder $t = r$ ist, woraus $x = r\sqrt{2}$ folgt.

$_1$ y_1 die Coordinaten des Berührungspunktes, so ist die Gleichung
te $a^2yy_1 + b^2xx_1 = a^2b^2$, daher die Abscisse des Durchschnitts-
selben mit der Verlängerung der grossen Axe $\frac{a^2}{x_1}$ und die Ordinate
chnittspunktes derselben mit der verlängerten kleinen Axe $\frac{b^2}{y_1}$, daher
$\frac{1}{x_1 y_1}$ und da $y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2}$, $u = \frac{a^3 b}{2} \frac{1}{x_1\sqrt{a^2 - x_1^2}}$.
ein Minimum werden, so muss $x_1\sqrt{a^2 - x_1^2}$ oder auch $x_1^2(a^2 - x_1^2)$
m werden, was der Fall ist, wenn $x_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ und $y_1 = \frac{b\sqrt{2}}{2}$ ist.
$= ab$.

*ir welchen Punkt eines Ellipsenquadranten schliessen Durch-
Normale den grössten Winkel ein?*
ler Winkel, welchen die Normale, α_1 der Winkel, welchen der
mit der grossen Axe einschliesst, und φ der Winkel zwischen
und Normale, so ist
$\frac{\iota - \operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{g}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha_1}$ und da $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$ und $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{y_1}{x_1}$ und $y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2}$,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a^2 - b^2}{a^3 b} x_1 \sqrt{a^2 - x_1^2}$$

$-x_1^2$ oder auch $x_1(a^2 - x_1^2)$ wird ein Maximum für $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$, und für diese Werte ist: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a^2 - b^2}{2ab}$.

*Kreis ist durch seine Scheitelgleichung gegeben; Anfangspunkt
naxe des Coordinatensystems sind zugleich Scheitel und Axe
, welche den Kreis in den Punkten B und B' schneidet. Wie
rameter der Parabel gewählt werden, wenn das von BB' be-
ent derselben ein Maximum werden soll?*

$$u = \frac{2}{3} x_1 y_1.$$

Gleichungen des Kreises $y^2 = 2rx - x^2$ und der Parabel $y^2 = 2px$
r die Coordinaten der Durchschnittspunkte:
$r - p)$ und $y_1 = 2\sqrt{p(r-p)}$, daher $u = \frac{8}{3}\sqrt{p(r-p)^3}$.
r für das Maximum von u der Ausdruck $p(r-p)^3$ oder auch
$-p)(r-p)$ ein Maximum sein; also

$$p = \frac{1}{4} r, \text{ wofür } u = \frac{1}{2} r^2 \sqrt{3}.$$

27. *Ein Parabelsegment wird durch eine zur Axe senkrecht begrenzt, deren Abstand vom Scheitel A gleich a ist. Eine zu MN soll parallel zu AB so gezogen werden, dass das Rechteck, Seite MN ist und dessen andere Seite in BC liegt, a) die grö b) den kleinsten Umfang besitzt.*

a) $u = 2(a - x)y$ und da $y^2 = 2px$, $u = 2(a - x)\sqrt{2px}$. Maximum sein, so muss $(a - x)\sqrt{x}$ und auch $(a - x)^2 . x$ und $(a -$ ein Maximum sein, daher $x = \frac{1}{3}a$ und $y = \sqrt{\frac{2}{3}ap}$.

b) $u = 2(a - x + 2y) = 2(a - x + 2\sqrt{2px})$. Soll $2\sqrt{p}$ $= (2\sqrt{2p} - \sqrt{x})\sqrt{x}$ ein Minimum sein, so muss $\sqrt{x} = \sqrt{2p}$ ce und $y = 2p$ sein.

28. *In ein gleichschenkliges Dreieck soll eine Parabel s werden, dass ihre Axe auf der Mitte der Grundlinie senkrech sie die beiden Schenkel berührt und das von der Basis begren segment ein Maximum sei.*

Die Spitze des gleichschenkligen Dreieckes sei A, die Bas S der Scheitel der Parabel, sei ferner $AS = z$, die Höhe des Drec ist, wenn A als Coordinatenursprung genommen wird, die Gleichung er

$$y^2 = 2p(x - z)$$

und die Gleichung der Geraden AB . . $y = \frac{a}{h} \cdot x$.

Durch Verbindung dieser Gleichungen erhalten wir als Absciss d schnittspunktes der Geraden mit der Parabel:

$$x = \frac{ph^2}{a^2} \pm \sqrt{\frac{p^2h^4}{a^4} - \frac{2ph^2z}{a^2}}.$$

Soll nur ein Durchschnittspunkt existieren, d. h. die Linie e e sein, so muss der Wurzelausdruck $= 0$ werden, woraus

$$p = \frac{2a^2}{h^2}z.$$

Nun ist die Fläche des Parabelsegments:

$$u = \frac{2}{3}(h - z)\sqrt{2p(h - z)} = \frac{4a}{3h}\sqrt{z(h - z)^3}.$$

u oder $z(h - z)^3$ oder $3z(h - z)(h - z)(h - z)$ wird ein Maim $z = \frac{1}{4}h$ und $p = \frac{a^2}{2h}$; dann ist: $u = \frac{ah}{4}\sqrt{3}$.

29. *Einem gegebenen gleichschenkligen Dreiecke soll eine Ellips beschrieben werden, dass ihre Hauptaxe senkrecht auf der Basis eht unter allen möglichen hat den grössten Inhalt?*

Die Spitze des Dreieckes sei A, die Grundlinie $BC = 2c$, die Höhe ferner sei D der Coordinatenursprung, DC die Abscissen-, AB e O

die Scheitelgleichung der Ellipse: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, und die der Geraden AC ... $y = -\frac{c}{h}x + c$.

iesen beiden Gleichungen ergibt sich für die Abscisse der Durch-xte:

$$\frac{ac^2 + b^2h}{a^2c^2 + b^2h^2} \pm \sqrt{\frac{a^2h^2(ac^2 + b^2h)^2 - a^2c^2h^2(a^2c^2 + b^2h^2)}{(a^2c^2 + b^2h^2)^2}}.$$

rade eine Tangente sein, so muss der Wurzelausdruck verschwinden. statt, wenn

$$b^2 = \frac{c^2(h - 2a)}{h} \text{ ist.}$$

daher die Fläche der Ellipse

$$u = ab\pi = a\pi c\sqrt{\frac{h - 2a}{h}}.$$

o $a\sqrt{h - 2a}$ oder auch $a \cdot a(h - 2a)$ ein Maximum, also $a = h - 2a$, h und $b = \frac{c}{\sqrt{3}}$ sein, wofür $u = \frac{\pi ch}{9}\sqrt{3}$ wird.

gleichseitiges Dreieck ist $a = \frac{1}{3}h$, $b = \frac{1}{3}h$, daher geht die Ellipse is über.

Anhang.

Methode von Koppe.

cher Weise wie Heilermann hat Koppe in seinen »Anfangsgründen hen Analysis,* nebst Ergänzungen zur Arithmetik, Essen 1870«, ntwickelt, durch deren Anwendung alle Aufgaben über Maxima welche durch Heilermann's Methode ihre Erledigung finden, ge-können.

wähnten Sätze sind folgende:

Ausdrücke $2mx - x^2$, $3m^2x - x^3$, $3mx^2 - 2x^3$, $4m^3x - x^4$, ^{4}, $4mx^3 - 3x^4$, $5m^4x - x^5$ . . . . *allgemein* $(n + p)\, m^p x^n -$ *orin* n *und* p *ganze Zahlen bedeuten, erhalten ihre grössten* $= m$.

Werke ist die vorliegende Darstellung entnommen. Dieselbe findet sich auch nzungen zu jedem Lehrbuche der Elementarmathematik«, im Programm der Oberrealschule zu Budweis, 1877.

Beweis.

1. $2mx - x^2 = m^2 - (m^2 - 2mx + x^2) = m^2 - (m - x)^2$, w
Ausdruck dann ein Maximum wird, wenn $m - x = 0$ oder $x = m$

2. $3m^2x - x^3 = 2m^3 - (2m^3 - 3m^2x + x^3)$. Der Ausdru
der Klammer ist aber durch $(m - x)^2 = m^2 - 2mx + x^2$ theilba
setzen kann: $3m^2x - x^3 = 2m^3 - (m + 2x)(m - x)^2$.
Dieser Ausdruck wird aber ein Maximum, wenn der Subtrahend
was für $x = m$ stattfindet. Dasselbe gilt für die folgenden Ausd

3. $3mx^2 - 2x^3 = m^3 - (m^3 - 3mx^2 + 2x^3) = m^3 - (m +$

4. $4m^3x - x^4 = 3m^4 - (3m^4 - 4m^3x + x^4) =$
$3m^4 - (3m^2 + 2mx + x^2)(m - x)^2$.

5. $4m^2x^2 - 2x^4 = 2m^4 - (2m^4 - 4m^2x^2 + 2x^4) = 2m^4 -$

6. $4mx^3 - 3x^4 = m^4 - (m^4 - 4mx^3 + 3x^4) =$
$= m^4 - (m^2 + 2mx + 3x^2)(m - x)^2$.

7. $5m^4x - x^5 = 4m^5 - (4m^5 - 5m^4x + x^5) =$
$= 4m^5 - (4m^3 + 3m^2x + 2mx^2 + x^3)(m - x)^2$.

Um diesen Satz allgemein zu beweisen, betrachten wir zuvörderst d

$$v = (n + p)z^n - nz^{n+p} = p - [p - (n + p)z^n + nz^{n+}$$

Der Subtrahend ist aber durch $(1 - z)^2 = 1 - 2z + z^2$ theilbar.
Division durch diesen Ausdruck ergibt, lautet dann der andere Fa

$$Z = p + 2pz + 3pz^2 + \ldots + npz^{n-1} + n(p - 1)z^{n-1} +$$
$$+ [n - (p - 1)]z^{n+p-2};$$

demnach ist: $v = p - (1 - z)^2 Z$.

Da für positive z das Polynom Z jederzeit positiv ist, so ist v e

wenn $z = 1$ ist. Setzt man $z = \frac{x}{m}$, so geht der Ausdruck üb

$$v = (n + p)\frac{x^n}{m^n} - \frac{nx^{n+p}}{m^{n+p}} = \frac{1}{m^{n+p}}[(n + p)m^p x^n - nx^{n+p}]$$

oder wenn man $m^{n+p} v = u$ setzt:

$$u = (n + p)m^p x^n - nx^{n+p},$$

welcher Ausdruck für $\frac{x}{m} = 1$ oder $x = m$ ein Maximum wird.

II. *Die Ausdrücke* $\frac{m^2}{x} + x$, $\frac{m^3}{x^2} + 2x$, $\frac{2m^3}{x} + x^2$, $\frac{m^4}{x^3} + 3$ $\frac{2}{x}$

$\frac{3m^4}{x} + x^3$, $\frac{4m^5}{x} + x^4$, ... *allgemein* $\frac{p \cdot m^{n+p}}{x^n} + nx^p$ *erlangen ihre*

Werte für $x = m$.

is.

$$+x = \frac{m^2+x^2}{x} = \frac{2mx+m^2-2mx+x^2}{x} = 2m + \frac{(m-x)^2}{x}.$$

druck wird ein Minimum, wenn das zweite Glied verschwindet, also m ist.

$$\frac{m^3}{x^2} + 2x = \frac{m^3+2x^3}{x^2} = \frac{3mx^2+m^3-3mx^2+2x^3}{x^2} =$$

$$= 3m + \frac{m^3-(3mx^2-2x^3)}{x^2},$$

ck, welcher am kleinsten wird, wenn der Subtrahend $3mx^2-2x^3$ n wird, was nach dem vorigen Satze eintritt, wenn $x=m$ ist. Ganz st sich in den folgenden Fällen schliessen.

$$\frac{m^3}{x} + x^2 = \frac{2m^3+x^3}{x} = \frac{3m^2x+2m^3-3m^2x+x^3}{x} =$$

$$= 3m^2 + \frac{2m^3-(3m^2x-x^3)}{x}.$$

$$\frac{m^4}{x^3} + 3x = \frac{m^4+3x^4}{x^3} = \frac{4mx^3+m^4-4mx^3+3x^4}{x^3} =$$

$$= 4m + \frac{m^4-(4mx^3-3x^4)}{x^3}.$$

$$\frac{m^4}{x^2} + 2x^2 = \frac{2m^4+2x^4}{x^2} = \frac{4m^2x^2+2m^4-4m^2x^2+2x^4}{x^2} =$$

$$= 4m^2 + \frac{2m^4-(4m^2x^2-2x^4)}{x^2}.$$

$$\frac{m^4}{x} + x^3 = \frac{3m^4+x^4}{x} = \frac{4m^3x+3m^4-4m^3x+x^4}{x} =$$

$$= 4m^3 + \frac{3m^4-(4m^3x-x^4)}{x}.$$

$$\frac{m^5}{x} + x^4 = \frac{4m^5+x^5}{x} = \frac{5m^4x+4m^5-5m^4x-x^5}{x} =$$

$$= 5m^4 + \frac{4m^5-(5m^4x-x^5)}{x}$$

in:

$$u = \frac{pm^{n+p}}{x^n} + nx^p = \frac{pm^{n+p}+nx^{n+p}}{x^n} =$$

$$= \frac{(n+p)m^px^n+pm^{n+p}-(n+p)m^px^n+nx^{n+p}}{x^n} =$$

$$= (n+p)m^p + \frac{pm^{n+p}-[(n+p)m^px^n-nx^{n+p}]}{x^n}.$$

rahend für $x=m$ ein Maximum wird, so wird u für denselben nimum.

Beispiele.

1. Wie muss sich die Höhe eines Dreieckes zur Grundlinie verhalten, wenn das eingeschriebene Quadrat ein möglichst grosser Bruchteil des Inhalt des Dreieckes sein soll?

Sei x die Grundlinie, y die Höhe des Dreieckes, z die Seite des Quadrates und $v = \frac{y}{x}$.

Aus den Beziehungen $z^2 = u \cdot \frac{xy}{2}$, $x : z = y : y - z$ folgt:

$$u = \frac{2xy}{(x+y)^2} = \frac{2v}{(1+v)^2}.$$

Soll u ein Maximum werden, so muss $\frac{(1+v)^2}{v} = \frac{1}{v} + v + 2$, oder ein Minimum werden. Nach Formel 1. des II. Satzes ist in unserem $m = 1$, daher $v = 1$, woraus $y = x$ und $u = \frac{1}{2}$ sich ergibt.

2. Von einem Trapez soll die eine der parallelen Seiten a gegeben, der nicht parallelen sein und der Inhalt möglichst gross werden, wie sind die Winkel zu wählen?

Ist die Höhe des Trapezes y und der Winkel an der Grundlinie α,

$$u = a^2 \sin\alpha (1 + \cos\alpha),$$

und wenn wir $\cos\alpha = x$ setzen: $u = a^2(1+x)\sqrt{1-x^2}$. u wird ein Maximum, wenn $(1+x)^2(1-x^2) = (1+x)^3(1-x)$ am grössten wird. Um die Formeln anwenden zu können, setzen wir $1 + x = z$, wodurch unser Ausdruck $z^3(2-z) = 2z^3 - z^4$ übergeht.

Soll dieser Ausdruck ein Maximum werden, so muss auch $6z^3 - 5z^4$ den grössten Wert erhalten, was nach I. 6. der Fall ist, wenn, da $4m = 6$, $z = \frac{3}{2}$ und $x = \frac{1}{2}$ oder $\alpha = 60^0$ ist.

3. Zwei gleiche Kreise, deren Mittelpunkte K und K' sind, und eine Gerade in den Punkten A und B berühren, werden von einem Kreis vom selben Radius (Mittelpunkt O) berührt. Für welche Lage der drei Kreise wird die Fläche des Fünfeckes AKOK'B ein Maximum?

Sei der Winkel $KOK' = 2\varphi$, so ist $KK' = AB = 4r \sin\varphi$ und $u = AKOK'B = AKK'B + KOK' = 4r^2 \sin\varphi (1 + \cos\varphi)$, und wenn $\sin\varphi = x$ gesetzt wird,

$$u = 4r^2 x (1 + \sqrt{1-x^2}).$$

Setzt man $1 + \sqrt{1-x^2} = z$, woraus $x = \sqrt{2z - z^2}$ folgt, so wird u ein Maximum, wenn $z\sqrt{2z-z^2}$, oder wenn $2z^3 - z^4$, oder wenn $6z - 5z^2$ ein Maximum wird. Letzteres ist aber nach I. 6. der Fall, wenn, da $4m = 5$, $z = \frac{3}{2}$ und $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\varphi = 60^0$ ist. Dann ist $KK' = AB = 2r\frac{1}{2}\sqrt{3}$, so dass so gross wie die Seite des dem Kreise eingeschriebenen gleichseitigen Drei-

Welches ist das Maximum aller Parallelogramme mit gegebenem , welche man in ein Dreieck so einschreiben kann, dass eine Seite llelogramms in eine Seite des Dreieckes und die beiden andern s Parallelogramms in die beiden andern Dreiecksecken fallen?

las gegebene Dreieck ABC, die eine Seite des Parallelogramms, welche te AB hineinfällt, MQ, die beiden andern Ecken des Parallelogramms, die Seiten AC und BC fallen, seien beziehungsweise N und P, end- $\angle QMN = \varphi$ und $AN = x$, so ist: $u = MQ \cdot MN \cdot \sin\varphi$.

ber $MQ = NP = \frac{(b-x)\sin C}{\sin B}$ und $MN = \frac{x \cdot \sin A}{\sin\varphi}$, so folgt:

$$u = \frac{x(b-x)\ \sin A \cdot \sin C}{\sin B}.$$

oder $bx - x^2$ aber wird ein Maximum, wenn $x = \frac{b}{2}$ ist. Man hal- die Seite AC in N, trage in A den Winkel φ an, dass der eine n die Richtung AB fällt, und ziehe zum andern Schenkel durch N lele; auf diese Weise erhält man den Punkt M, wodurch das amm gegeben ist.

geben sei ein Dreieck ABC und auf der Verlängerung von AB über ein Punkt P; man soll durch P eine Gerade, welche BC in D und schneidet, so ziehen, das CE . BD oder AE . CD ein Maximum wird.

ehe DF || AC und setze $PA = m$, $PB = n$, $PF = x$, $BC = a$, $AC = b$ c, so ist wegen $BD : a = x - n : c$

$$BD = \frac{a}{c}(x-n);$$

$E = b - AE$, $AE : DF = m : x$, daher $AE = \frac{m}{x} \cdot DF$, $DF : b = x-n : c$

$\frac{b}{c}(x-n)$, also $AE = \frac{mb}{cx}(x-n)$ und $CE = b - \frac{mb}{cx}(x-n)$, demnach

$$u = CE \cdot BD = \frac{abn}{c^2} \cdot \frac{(x-n)(m-x)}{x}.$$

Maximum, wenn $\frac{(x-n)(m-x)}{x} = m + n - \left(\frac{mn}{x} + x\right)$ ein Maximum x ein Minimum wird.

itt aber nach II. 1. ein, wenn $x = \sqrt{mn}$ wird. Die Lage des rgibt sich also durch eine leichte Construction; damit ist aber geben. Da $AE = \frac{mb(x-n)}{cx}$ und $CD = a - BD = \frac{a}{c}(m-x)$,

$CD = \frac{abm}{c^2} \cdot \frac{(x-n)(m-x)}{x}$ ist, so ist auch $AE \cdot CD$ für $x = \sqrt{mn}$ n.

6. *In den Seiten eines gleichseitigen Dreieckes drei Punkte so dass die Verbindungslinien wieder ein gleichseitiges Dreieck bi zwar das kleinstmögliche.*

Das gegebene Dreieck sei ABC, die gesuchten Punkte seien N in AC und P und BC, ferner sei NP = x, CN = y, so ist zunäc

$$u = \frac{x^2}{2}\sqrt{3}.$$

Nun sind die Dreiecke CNP, AMN und BMP congruent, daher CI Mit Anwendung des Carnot'schen Lehrsatzes ist aber:

$$x^2 = y^2 + (a-y)^2 - 2y(a-y) = 3y^2 - 3ay + a^2,$$

mithin wird $u = \frac{1}{2}\sqrt{3}[a^2 - 3(ay - y^2)]$ ein Minimum, wenn a Maximum, also wenn $y = \frac{a}{2}$ wird, wofür $u = \frac{a^2}{8}\sqrt{3}$.

7. *Einem Kreise vom Radius r ist ein Sechseck eingeschrieb aus einem Rechteck und zwei über den Gegenseiten construier schenkligen Dreiecken besteht; unter welcher Bedingung ist da möglichst gross?*

Sind die Seiten des Rechteckes x und y und die Dreiecke b richtet, so ist:

$$u = xy + x\left(r - \frac{y}{2}\right) = \frac{xy}{2} + rx,$$

und da $x^2 + y^2 = 4r$ ist,

$$u = \tfrac{1}{2}x(2r + \sqrt{4r^2 - x^2}).$$

Man setze $2r + \sqrt{4r^2 - x^2} = z$, woraus sich $x = \sqrt{4rz - z^2}$ ergi

$z\sqrt{4rz - z^2}$ oder $4rz^3 - z^4$ oder $12rz^3 - 3z^4$ aber wird ein Ma wenn $z = 3r$ und $x = r\sqrt{3}$, daher $y = r$ wird; dann ist aber auch jed S der gleichschenkligen Dreiecke r, daher das Sechseck ein regelmäs ges

8. *In einer Ebene sind zwei parallele Linien gegeben, dieso dritten unter rechten Winkeln geschnitten werden; ebenso ist ein Pu derselben Ebene gegeben. Es soll durch diesen eine die beiden Pa schneidende Gerade so gezogen werden, dass die Summe der Qdr Stücke, welche auf den Parallelen zwischen dieser neuen und der geg schneidenden Linie liegen, ein Maximum ist.*

Seien die Durchschnittspunkte der parallelen Geraden AX u B der dritten A und B; liege ferner der gegebene Punkt C innerhalb s R XABY; schneide endlich die durch C gelegte Gerade AX und Y Punkten E und F, so findet, wenn man AB und EF bis zum Durchsch verlängert, durch C die HJ ∥ AB und CD ⊥ AB zieht und CH = , C CD = h, AE = x und BF = y setzt, die Proportion statt:

$$x - h : h - y = m : n,$$

t: $u = x^2 + y^2 = \frac{(m^2+n^2)\,x^2 - 2n\,(m+n)\,hx + (m+n)^2\,h^2}{m^2}$.

$\frac{2n\,(m+n)\,h}{m^2+n^2}\,x - x^2$ wird aber ein Maximum, wenn $x = \frac{n\,(m+n)\,h}{m^2+n^2}$

und $y = \frac{m\,(m+n)\,h}{m^2+n^2}$ ist.

t der Punkt C ausserhalb des Raumes XABY, so geht das Glied n Resultate in m — n über.

Den Radius einer Kugel zu bestimmen, in welcher zu einer Calotte tanter Fläche ein Segment gehört, dessen Volum ein Maximum ist.

der Radius der Kugel x, die Höhe des Segmentes y und die Fläche te c, so ist $u = \frac{1}{3}\pi y^2\,(3x - y)$ und wegen $c = 2\pi xy$:

$$u = \tfrac{1}{6}y\,(3c - 2\pi y^2),$$

daher $3cy - 2\pi y^3$ oder $\frac{3c}{2\pi}\,y - y^3$ ein Maximum sein; demnach ist

.: $y = \sqrt{\frac{c}{2\pi}}$ und $x = \sqrt{\frac{c}{2\pi}}$, die Calotte ist also die krumme Fläche bkugel.

Es sind die Dimensionen einer dreiseitigen gleichseitigen Pyramide teln, welche bei gegebenem Inhalte a^3 die kleinste Oberfläche besitzt.

lie Länge einer Grundkante x, die einer Seitenkante y, so ist, da die Pyramide $\sqrt{\frac{3y^2 - x^2}{3}}$,

$$\frac{x^2}{12}\sqrt{3y^2 - x^2} = a^3$$

berfläche $u = \frac{1}{4}\sqrt{3}\,(x^2 + 3y^2) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(x^2 + \frac{72\,a^6}{x^4}\right)$.

zu entscheiden, unter welcher Bedingung $\frac{72\,a^6}{x^4} + x^2$ ein Minimum n wir in der allgemeinen Formel II.: $p = 2$ und $n = 4$. Diese geht in

$$\frac{2\,m^6}{x^4} + 4x^2.$$

n wird $\frac{72\,a^6}{x^4} + x^2$ oder $\frac{288\,a^6}{x^4} + 4x^2$ ein Minimum, wenn

$x = a\sqrt[3]{12}$ und $y = 2a\sqrt[6]{\frac{2}{3}}$, daher $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ ist.

Eine Kreiskegelfläche hat im Axenschnitt den Winkel 2α. Um kt der Axe als Mittelpunkt soll mit einem gegebenen Radius r lfläche beschrieben werden, so dass das Volum des abgestumpften

Kegels zwischen den Kreisschnitten beider Oberflächen ein möglich sei. Wie gross ist der Abstand x des Mittelpunktes der Kugel von des Kegels?

Sei die Seite des abgestumpften Kegels $2y$, die Höhe z und d der Grenzkreise ϱ_1 und ϱ_2, so ist zunächst $z = 2y \cdot \cos\alpha$. Zieht Mittelpunkt der Kugel ein Perpendikel auf die Seite des Kegelstu wird letztere halbiert und es ergibt sich:

$$\varrho_1 = (x\cos\alpha + y) \cdot \sin\alpha, \quad \varrho_2 = (x \cdot \cos\alpha - y)\sin\alpha, \text{ und } r^2 = y^2 +$$

$$\text{daher } u = \tfrac{2}{3}\pi y \cos^3\alpha\,[3r^2 - (3 - \operatorname{tang}^2\alpha)\,y^2].$$

Soll $3r^2y - (3 - \operatorname{tang}^2\alpha)\,y^3$ oder $\dfrac{3r^2}{3 - \operatorname{tang}^2\alpha}\,y - y^3$ ein Maximu so muss nach I. 2.

$$y = \frac{r}{\sqrt{3 - \operatorname{tang}^2\alpha}} \text{ und } x = \frac{r}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2 - \operatorname{tang}^2\alpha}{3 - \operatorname{tang}^2\alpha}} \text{ sein.}$$

Ist $\alpha = 0$, so ist $y = \tfrac{1}{3}r\sqrt{3}$ und $x = \infty$; ϱ_1 und ϱ_2 erscheinen da unbestimmten Form $\infty \cdot 0$. Um die wahren Werte dieser Grössen substituieren wir zunächst für x den aus der Gleichung $r^2 = y^2 +$ folgenden Wert, wodurch wir erhalten:

$$\varrho_1 = \sqrt{r^2 - y^2} \cdot \operatorname{cotang}\alpha + y \cdot \sin\alpha \text{ und } \varrho_2 = \sqrt{r^2 - y^2} \cdot \operatorname{cotang}\alpha - y$$

Setzen wir nun $\alpha = 0$ und für y den entsprechenden Wert, so erh

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \sqrt{r^2 - y^2} = r\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \tfrac{1}{3}r\sqrt{6}.$$

Der Kegelstumpf geht also in einen Cylinder über und damit ist die Aufgabe, Einer Kugel den grösstmöglichen Cylinder einzuschreiben, gelöst.

12. *Von allen Cylindern, welche gleiche Oberfläche a^2 besitzen, soll derjenige gesucht werden, dessen Inhalt am grössten ist.*

Da $a^2 = 2\pi xy + m\pi x^2$, wo $m = 0$, 1, 2, je nachdem die Mantelfl ein offener oder beiderseits geschlossener Cylinder gemeint ist, so ist

$$u = \pi x^2 y = \frac{x}{2}(a^2 - m\pi x^2).$$

u wird ein Maximum, wenn $a^2x - m\pi x^3$ oder $\dfrac{a^2}{m\pi}\,x - x^3$ ein Maximum

Dies ist der Fall, wenn $x = \dfrac{a}{\sqrt{3m\pi}}$ und $y = a\sqrt{\dfrac{m}{3\pi}}$, daher $\dfrac{y}{x} = m$ wird

13. *Wie muss sich die Höhe eines geraden Kegels zum Durchm des Grundkreises verhalten, wenn die Oberfläche der ihm eingeschrie Kugel ein möglichst grosser Bruchtheil von der Oberfläche des Kegels ist*

Ist der Durchmesser der Basis des Kegels x, die Höhe y, der Radius der Kugel z, O die Oberfläche der Kugel und O' die Oberfläche des Kegels, so

$= 4z^2\pi$ und da $z = \frac{xy}{x+\sqrt{x^2+4y^2}}$, $O = \frac{4\pi x^2 y^2}{(x+\sqrt{x^2+4y^2})^2}$.

t: $$O' = \frac{\pi x}{4}(x+\sqrt{x^2+4y^2}),$$

$$u = \frac{O}{O'} = \frac{16xy^2}{(x+\sqrt{x^2+4y^2})^3},$$

n $\frac{y}{x} = v$ gesetzt wird, $u = \frac{16v^2}{(1+\sqrt{1+4v^2})^3}$.

r ferner $\sqrt{1+4v^2} = w$, so wird

$$u = \frac{4(w-1)}{(w+1)^2}$$

$w - 1 = t$ einsetzend $u = \frac{4t}{(t+2)^2}$.

$\frac{t}{(t+2)^2}$ ein Maximum werden, so muss $\frac{(t+2)^2}{t} = t+4+\frac{4}{t}$ oder $\frac{4}{t}+t$ im werden. Dies findet statt für $t = 2$, daher für $w = 3$ und $v = \sqrt{2}$. t demnach $\frac{y}{x} = \sqrt{2}$, es verhält sich also die Höhe zum Durchmesser fläche, wie die Diagonale eines Quadrates zur Seite desselben. In lle ist $u = 1/2$.

n ein volles kegelförmiges Weinglas, dessen Durchschnitt ein gleich- Dreieck ABC mit der Höhe CD = h und dem Winkel ACB = 2α itze, soll eine Kugel gelegt werden, welche bewirkt, dass möglichst überfliesst.

Mittelpunkt der gesuchten Kugel, welcher in der Axe des Kegels d; dieselbe berühre AC in E, BC in F und schneide die Höhe des) in G, AB in J und H. Sei ferner $ME = MF = x$, $MD = y$, so nalt des Segmentes HEGFJ:

$$u = 1/3\,\pi(x+y)^2(2x-y)$$

$= (h-y)\sin\alpha$, also $y = h - \frac{x}{\sin\alpha}$ ist:

$$u = 1/3\,\pi(h-ax)^2(bx-h),$$

rze halber $\frac{1}{\sin\alpha} - 1 = a$ und $\frac{1}{\sin\alpha} + 2 = b$ gesetzt wurde.

man ferner $h - ax = z$, so erhält man:

$$u = \frac{1}{3a}\cdot\pi z^2\cdot[h(b-a)-bz].$$

u wird ein Maximum, wenn $\frac{2h(b-a)}{b}z^2 - 2z^3$ ein Maximum wird. der Fall für

$$z = \frac{2h(b-a)}{3b}, \text{ und } x = \frac{h(2a+b)}{3ab}$$

und für a und b die Werte einsetzend:

$$x = \frac{h \cdot \sin\alpha}{\sin\alpha + \cos 2\alpha}, \text{ und daraus } y = \frac{h \cdot \sin\alpha(1 - 2\sin\alpha)}{\sin\alpha + \cos 2\alpha},$$

daher $\frac{y}{x} = 1 - 2\sin\alpha$.

Ist $AC = s$ und $AB = d$, so ist $\frac{y}{x} = \frac{s-d}{s}$, welcher Ausdruck ic struierbar ist.

15. *Ein gerader Kreiskegel, dessen Spitze A und dessen Bei messer BC sei, soll durch eine zu AC parallele Ebene so geschnitte dass der Inhalt der entstandenen Parabelfläche ein Maximum ist.*

Sei S der Scheitel der Parabel, D der Durchschnittspunkt der Lr mit BC, r der Radius der Grundfläche des Kegels, s dessen Seite un x die Coordinaten der Punkte, in denen die Parabel von der Grundic Kegels geschnitten wird, so ist

$$u = \tfrac{2}{3}xy.$$

Ferner ist $y^2 = BD \cdot CD = CD(2r - CD)$,

$$s : x = 2r : 2r - CD, \text{ daher } CD = \frac{2r}{s}(s - x),$$

also $$y = \frac{2r}{s}\sqrt{sx - x^2} \text{ und } u = \frac{4r}{3s}x\sqrt{sx - x^2}.$$

$x\sqrt{sx - x^2}$ oder $sx^3 - x^4$ oder $3sx^3 - 3x^4$ wird ein Maximum, wen

$$x = \tfrac{3}{4}s \text{ und } y = \tfrac{1}{2}r\sqrt{3}.$$

Die Lage des Punktes S ist somit gegeben durch $AS = s -$

16. *Um ein gleichschenkliges Dreieck soll die an Fläche kleins gezeichnet werden, deren kleine Axe parallel zur Grundlinie des Dreie*

Sei die Spitze des Dreieckes A, die Basis $BC = 2c$, die Höhe und t die Halbaxen der gesuchten Ellipse, so lautet die Scheitelei (A als Coordinatenursprung):

$$s^2y^2 = t^2(2sx - x^2).$$

Da die Coordinaten der Punkte B und $C \pm c$ und h sind, so besteht d Re

$$s^2c^2 = t^2(2sh - h^2).$$

Die Fläche der Ellipse $u = \pi st = \frac{\pi cs^2}{\sqrt{2sh - h^2}}$ wird ein Minim

in Minimum, oder wenn $\frac{2s-h}{s^4} = \frac{2}{s^3} - \frac{h}{s^4} = 2v^3 - hv^4$ (indem $\frac{1}{s} = v$
ırde), oder wenn $\frac{6v^3}{h} - 3v^4$ ein Maximum wird. Letzteres findet statt
$\frac{3}{h}$ oder $s = \frac{2}{3}h$ und $t = \frac{2}{3}c\sqrt{3}$.

Auf einer Geraden befinden sich fünf vollkommen elastische Kugeln D und E. Alle, mit Ausnahme der Kugel A, welche mit der Geeit c in der Richtung AE sich bewegt, seien im Zustande der Wenn nun die Massen der Kugeln A und E gegeben sind, wie ie Massen der übrigen Kugeln gewählt werden, damit die Geeit der Kugel E ein Maximum werde?

Massen der Kugeln seien beziehungsweise M, x, y, z und m. In Stosses der Kugel A gegen B erhält B die Geschwindigkeit $\frac{2Mc}{M+x}$;
letzteren Geschwindigkeit trifft B mit C zusammen, daher die Geeit der Kugel C nach dem Stosse

$$\frac{2x\frac{2MC}{M+x}}{x+y} = \frac{4Mxc}{(M+x)(x+y)} \text{ ist.}$$

gleiche Weise empfängt D die Geschwindigkeit
$\frac{8Mxyc}{+x)(x+y)(y+z)}$ und E $\frac{16Mxyz.c}{(M+x)(x+y)(y+z)(z+m)}$,
ere ein Maximum werden soll; dies ist der Fall, wenn

$$u = \frac{(M+x)(x+y)(y+z)(z+m)}{xyz}$$

m wird.

hten wir zunächst x als veränderlich, während y und z als constant n werden sollen, so muss

$$\frac{(M+x)(x+y)}{x} = \frac{My}{x} + x + M + y \text{ oder } \frac{My}{x} + x$$

um werden; letzteres tritt ein, wenn $x^2 = My$ ist. In derselben bei veränderlichem y: $y^2 = xz$ und bei veränderlichem z: $z^2 = my$ h Multiplication dieser drei Gleichungen folgt: $xz = Mm$ und mit igung von $y^2 = xz$: $y^2 = Mm$; es muss demnach

$$x = \sqrt[4]{M^3m},\ y = \sqrt[4]{M^2m^2},\ z = \sqrt[4]{Mm^3} \text{ sein.}$$

IV.

Methode der goniometrischen Functionen.*

Die Bestimmung der Maxima und Minima ist in dem Falle, wo die eines grössten oder kleinsten Wertes fähige Grösse eine goniometrische Function der Variablen ausgedrückt ist. Die Sinus und Cosinus können alle möglichen Werte innerhalb der Grenzen $+1$ und -1 annehmen und werden in diesen Grenzen selbst Maxima oder Minima, während die Tangente und Cotangente, welche alle Werte zwischen $+\infty$ und $-\infty$ erlangen können, eines Maximums oder Minimums nicht fähig sind.

Hat demnach die vorgelegte Function eine der Formen

$$a \pm b \sin^p(mx + n) \text{ oder}$$
$$a \pm b \cdot \cos^p(mx + n),$$

wo p eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl bedeutet, so lässt sich die Frage über den grössten oder kleinsten Wert der Function unmittelbar beantworten. Häufig ist aber mit der durch die Bedingung der Aufgabe gegebenen Gleichung vorerst eine Transformation vorzunehmen, derselben eine zur Bestimmung der grössten und kleinsten Werte geeignete Form zu ertheilen.

Für die Zwecke der Transformation dienen vornehmlich folgende Formeln:

$$(m - n)^2 + 2mn = m^2 + n^2,$$
$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$
$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)],$$
$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)],$$
$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

---

* Berücksichtigung erfährt unter andern diese Methode in: Martus, Maxima und Minima. Mit Zons, Lehrbuch der Geometrie; Hermes, Sammlung von mathematischen Aufgaben III. Letzterem Werke ist eine Reihe der folgenden Aufgaben entnommen.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

---

sind von einem Punkte ausserhalb eines Kreises die grösste und rade zur Peripherie zu ziehen.

er Mittelpunkt des gegebenen Kreises B, der gegebene Punkt A. nun durch A eine beliebige Gerade, welche die Peripherie des Kreises ıkten C und D schneidet. Ist nun AB = a, BD = r, AD = u, so muss

$$u^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\varphi \text{ sein.}$$

laximum, wenn $\cos\varphi = -1$, also $\varphi = 180^0$; dann ist $u = r + a$, u ein Minimum, wenn $\cos\varphi = +1$, also $\varphi = 0$; dann ist $u = a - r$.

geben ist ein Punkt C, welcher Mittelpunkt eines Kreises mit lem Radius ist, und ein Punkt A, von welchem die Tangenten D an den Kreis gezogen sind. Für welchen Wert des Radius ührungssehne BD ein Maximum?

rbinde A mit C und nenne AC = a, BC = x und $\sphericalangle$ CBD = φ, so ist:

$BD = u = 2\,BC\,.\cos\varphi$ und da $BC = a\,.\sin\varphi$ ist,

$$u = 2a\,.\sin\varphi\,.\cos\varphi = a\,.\sin 2\varphi.$$

er ein Maximum, wenn $\sin 2\varphi = 1$ oder $\varphi = 45^0$ ist, daher ist AB.

allen Vierecken mit gegebenen Diagonalen dasjenige zu bestimmen, grössten Inhalt hat.

suchte Viereck sei ABCD, AC = a, BD = b und $\sphericalangle$ AEB = x, wo hschnittspunkt der Diagonalen ist; es ist sodann:

$= \frac{1}{2}(AE\,.\,BE + BE\,.\,CE + CE\,.\,DE + DE\,.\,AE)\sin x =$

$= \frac{1}{2}[BE(AE + CE) + DE(AE + CE)]\sin x = \frac{1}{2}\,a\,b\,.\sin x,$

Maximum wird für $\sin x = 1$ oder $x = 90^0$.

ei Punkte A und B bewegen sich auf concentrischen Kreisen, us a und b (a > b) gegeben sind, bezüglich mit den Winkel- eiten α und β von einer gegebenen Anfangslage aus. Nach wie n haben die beiden Punkte ihre grösste und kleinste Entfernung?

Anfangslage liegen A und B mit dem Centrum der Kreise in einer ich t Secunden habe A den Weg AA', B den Weg BB' gemacht. e Wege auf die Entfernung 1 vom Centrum bezogen, so ist der

Weg von A αt, der von B βt, daher die Differenz der Wege $(\beta -$ der zu dieser Wegdifferenz zugehörige Centriwinkel φ, so muss:

$$\varphi : 180^0 = (\beta - \alpha)\,t : \pi \text{ sein,}$$

$$\text{woraus } \varphi = \frac{(\beta - \alpha)\,t \,.\, 180^0}{\pi} \text{ folgt.}$$

Demnach ist $u^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \,.\, \cos \frac{(\beta - \alpha)\,t \,.\, 180^0}{\pi}$.

u ist daher ein Maximum, nämlich $u = a + b$, wenn

$$\cos \frac{(\beta - \alpha)\,t \,.\, 180^0}{\pi} = -1 \text{ oder } t = \frac{(2k+1)\,\pi}{\beta - \alpha},$$

ferner ein Minimum, nämlich $u = a - b$, wenn

$$\cos \frac{(\beta - \alpha)\,t \,.\, 180^0}{\pi} = 1 \text{ oder } t = \frac{2k\pi}{\beta - \alpha} \text{ ist,}$$

wo k eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet.

5. Einem Quadrat ein möglichst grosses gleichschenkliges Le zuzeichnen, so dass die Spitze desselben in einer Ecke des Qua Endpunkte der Basis auf den Gegenseiten liegen.

Das gegebene Quadrat sei ABCD, A sei gleichzeitig die Spi suchten Dreieckes, E und F, welche beziehungsweise in den Seit CB liegen, die Endpunkte der Basis, ferner sei $AB = a$ und $\sphericalangle AED = \varphi$

$$\triangle ADE = \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{cotg} \varphi, \quad \triangle CEF = \tfrac{1}{2}a^2 (1 - \operatorname{cotg} \varphi)^2,$$

daher $u = \frac{1}{2}a^2 (1 - \operatorname{cotg}^2 \varphi) = \frac{a^2}{2 \sin^2 \varphi} (2 \sin^2 \varphi - 1) = a^2 \left(1 - \right.$ si

u ist ein Maximum, wenn $\frac{1}{2 \sin^2 \varphi}$ ein Minimum, also $\sin^2 \varphi$ ein Ma

Es ist also $\alpha = 90^0$; das gesuchte Dreieck ist demnach die Hälfte de Qu

6. Von allen über derselben Hypotenuse beschriebenen Drei jenige zu finden, welches den grössten Umfang hat.

Ist die Hypotenuse c, die beiden Katheten x und y, so ist:

$$u = x + y = c(\sin \alpha + \cos \alpha) = \sqrt{2} \,.\, \cos (\alpha - 45^0).$$

u ist ein Maximum für $\cos (\alpha - 45^0) = 0$ oder $\alpha = 45^0$,

$$\text{oder } u = c(\sin \alpha + \cos \alpha) = c\sqrt{1 + \sin 2\alpha};^*$$

u wird ein Maximum, wenn $\sin 2\alpha = 1$ oder $\alpha = 45^0$ ist.

7. Unter allen rechtwinkligen Dreiecken, welche bezüglich der y dieselbe Höhe haben, dasjenige zu bestimmen, a) welches die kleins Ka summe, b) den kleinsten Inhalt hat.

a) $$u = x + y = h\left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}\right) = 2h \cdot \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin 2\alpha} =$$

---

* $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} = \sqrt{1 + \sin 2\alpha}$.

$$= 2h \cdot \frac{\sqrt{1 + \sin 2a}}{\sin 2\alpha} = 2h \sqrt{\frac{1}{\sin^2 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2\alpha}}.$$

Minimum, wenn $\sin 2\alpha$ ein Maximum, also $\alpha = 45^0$ ist.

$$u = \tfrac{1}{2} xy = \tfrac{1}{2} h^2 \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{h^2}{\sin 2\alpha}.$$

Minimum für $\alpha = 45^0$.

eber einer gegebenen Geraden ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, m die Summe der beiden Katheten und der Höhe auf die Hypo- öglichst gross wird.

die Hypotenuse und ein spitzer Winkel x, so ist:

$$u = c(\sin\alpha + \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha) =$$
$$= c\,[\sqrt{1 + \sin 2\alpha} + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha],$$

in Maximum für $\sin 2\alpha = 1$, oder $\alpha = 45^0$, das rechtwinklige Drei- so gleichschenklig.

n einen Kreisausschnitt das grösste Parallelogramm einzuzeichnen, it demselben einen Winkel gemeinsam hat.

er gegebene Winkel α, x und y die Seiten des Parallelogramms, und nkel, den die vom Mittelpunkte des Kreises gezogene Diagonale mit sst, so ist:

$= xy \cdot \sin\alpha$, und da $x = \frac{r \sin(\alpha - \varphi)}{\sin\alpha}$ und $y = \frac{r \cdot \sin\varphi}{\sin\alpha}$ ist,

$$u = \frac{r^2 \sin\varphi \cdot \sin(\alpha - \varphi)}{\sin\alpha} = \frac{r^2}{2\sin\alpha}[\cos(2\varphi - \alpha) - \cos\alpha].$$

r ein Maximum, wenn $\cos(2\varphi - \alpha) = 0$ oder $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ ist, das ge- allelogramm ist also ein Rhombus, dessen Seite $x = y = \frac{r}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$ ist.

inem gegebenen Kreise ein möglichst kleines Dreieck zu umschreiben.

die Winkel des Dreieckes 2x, 2y, 2z, so ist:

$$u = r^2(\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} z).$$

ir zunächst z als constant an, so ist u ein Minimum, wenn:

$\operatorname{tg} y = \frac{2\sin(x+y)}{\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}} = \frac{2\sin z}{\cos\frac{x-y}{2} - \sin\frac{z}{2}}$ ein Minimum, oder

in Maximum wird; dieses tritt ein für $x = y$. Würde y als constant n, so müsste für das Minimum von u $x = z$ sein; demnach ist das ichseitig.

11. Einem gegebenen Halbkreise soll ein Dreieck umgeschriebe so dass eine Seite desselben den Durchmesser enthält und der In lichst klein wird.

Sei AB die Grundlinie des Dreieckes, welche den Mittelpunkt d enthält, $2x$ und $2y$ die Winkel an derselben und $2z$ der Winkel an so ist:

$$u = \frac{r^2}{2}(\cot g\, 2x + \cot g\, 2y + 2 \cot g\, z).$$

Sei zuvörderst z constant, so wird u ein Minimum, wenn $\cot g\, 2x$ ein Minimum wird. Dies ist gemäss der vorangegangenen Aufgabe wenn $2x = 2y = 90 - z$ ist; dann ist aber

$$u = r^2(\operatorname{tg} z + \cot g\, z) = \frac{2r^2}{\sin 2z}.$$

u wird also ein Minimum, wenn $2z = 90^0$ ist; das Dreieck muss a schenklig und rechtwinklig sein.

12. Welches ist das grösste Viereck, das man aus vier gegeben bilden kann?

Sei das gesuchte Viereck ABCD, ferner $AB = a$, $BC = b$, CI $DA = d$, $\sphericalangle ABC = x$, $\sphericalangle CDA = y$, so ist der doppelte Inhalt des

$$2u = ab \,.\, \sin x + cd \,.\, \sin y.$$

Ferner ist $a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \cos x = c^2 + d^2 - 2cd \,.\, \cos y$, woraus

$$ab \,.\, \cos x - cd \,.\, \cos y = m^2 \text{ folgt,}$$

wo der Kürze halber $\dfrac{a^2 + b^2 - (c^2 + d^2)}{2} = m^2$ gesetzt wurde.

Quadrieren und addieren wir nun die beiden Gleichungen, so gib

$$4u^2 + m^4 = a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd \,.\, \cos(x + y).$$

Soll nun u ein Maximum sein, so muss $\cos(x + y) = -1$, also $x +$ also das Viereck ein Sehnenviereck sein.

13. Zwei Punkte in der Peripherie eines Kreises sind geg suche einen dritten Punkt, der ebenfalls in der Kreisperipherie der die Eigenschaft besitzt, dass die Summe der Quadrate der En desselben von den gegebenen Punkten ein Maximum ist.

Seien die beiden gegebenen Punkte A und B, der gesuchte $AX = x$, $BX = y$, Winkel $AXB = \varphi$, so ist:

$v = x^2 + y^2$ und da $x^2 + y^2 - 2xy \,.\, \cos\varphi = a^2$ ist: $v = a^2 + 2x \,.\, co$

Da $\sphericalangle \varphi$ für alle Lagen von X als Peripheriewinkel über demselben constant ist, so muss $u = xy$ ein Maximum sein.

Verbinden wir A mit B, setzen $AB = a$, $\sphericalangle XAB = \beta$, $\sphericalangle XI$ folgt aus dem Sinussatze:

$$y = \frac{a \,.\, \sin\beta}{\sin\varphi}, \quad x = \frac{a \,.\, \sin(\beta + \varphi)}{\sin\varphi},$$

daher $u = \frac{a^2 \sin\beta \cdot \sin(\beta+\varphi)}{\sin^2\varphi}$.

also $\sin\beta \cdot \sin(\beta+\varphi) = \frac{1}{2}[\cos\varphi - \cos(2\beta+\varphi)]$ ein Maximum sein. der Fall, wenn $\cos(2\beta+\varphi) = -1$, also $2\beta+\varphi = 180^0$ und $\frac{\varphi}{2}$ und $\gamma = 90 - \frac{\varphi}{2}$ wird; der gesuchte dritte Punkt ist demnach erungspunkt des Bogens AB. Es gibt also zwei Maxima, eines im eines im kleinern Kreisabschnitt.

Einen gegebenen Winkel als Peripheriewinkel in einen Kreis ein- so dass a) die Summe, b) das Product der ihn einschliessenden öglichst gross wird.

man durch den Scheitel des gesuchten Winkels einen Durchmesser die von diesem und den Sehnen gebildeten Winkel x und y, so ist $= 2r(\cos x + \cos y) = 2r\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$, mithin u ein Maximum $= \frac{1}{2}\alpha$.

$= 4r^2 \cos x \cdot \cos y = 2r^2[\cos\alpha + \cos(x-y)]$, daher u gleichfalls ein für $x = y = \frac{1}{2}\alpha$.

Einen gegebenen Winkel in zwei Theile zu theilen, für welche nme der Tangenten möglichst klein, b) das Product der Tangenten gross ist.

$$u = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} = \frac{2\sin(x+y)}{\cos\frac{x+y}{2} + \cos\frac{x-y}{2}} =$$

$$= \frac{2\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{x-y}{2}}.$$

inimum werden, so muss $\cos\frac{x-y}{2}$ ein Maximum, also $x = y = \frac{1}{2}\alpha$ sein.

$= \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$. Unter Anwendung der Formel:

$+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$ ergibt sich: $u = 1 - \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Maximum, wenn $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$ ein Minimum wird, daher wiederum .

on einem Dreieck ABC kennt man $AC = b$ und $\sphericalangle ABC = \beta$; die Gestalt des Dreieckes, wenn die Summe der beiden andern Maximum werden soll?

$u = x + y$; $x = \frac{b \cdot \sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$, $y = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta}$, daher

$$u = \frac{b}{\sin\beta}[\sin(\alpha+\beta)+\sin\alpha] = \frac{2b}{\sin\beta}\,\frac{\sin 2\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} = \frac{b\,.\,\sin\left(\right.}{\sin}$$

u wird ein Maximum, wenn $\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=1$, also $\alpha = 90-\frac{\beta}{2}$ und $\gamma =$ das Dreieck ist also ein gleichschenkliges.

17. *Auf dem Bogen eines Kreissectors einen Punkt so zu b*
a) dass die von ihm auf die begrenzenden Radien gefällten Senkre
möglichst grosse Summe geben, b) dass die beiden Senkrechten mi
grenzenden Radien eine möglichst grosse Fläche geben.

Sei O der Mittelpunkt des Kreises, AOB der gegebene Sector, X de
Punkt, ferner $XC \perp AO$, $XD \perp BO$, $OX = r$, $\sphericalangle AOB = \alpha$, $\sphericalangle AOX =$

a) $u = XC + XD = r\,[\sin\varphi + \sin(\alpha-\varphi)] = 2r\,\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos$

Für das Maximum von u muss $\cos\left(\varphi-\frac{\alpha}{2}\right)=1$, oder $\varphi=\frac{\alpha}{2}$ sein.

b) $u = \triangle COX + \triangle DOX$ und da $\triangle COX = r^2\sin\varphi\,.\,\cos\varphi =$

und $\triangle DOX = \frac{r^2}{2}\sin 2(\alpha-\varphi)$,

$$u = \frac{r^2}{2}[\sin 2\varphi + \sin 2(\alpha-\varphi)] = r^2\sin\alpha\,.\,\cos(2\varphi-\alpha),$$

daher u ein Maximum für $\varphi=\frac{\alpha}{2}$; der Punkt X ist demnach der H
punkt des Bogens AB.

18. *Gegeben sind zwei unbegrenzte Gerade AA', BB' und*
Punkt C; durch letzteren soll eine Gerade, welche AA' in P,
schneidet, so gelegt werden, dass a) das geometrische, b) das han
Mittel zwischen CP und CQ zu einem Minimum werde.

Man verbinde C mit dem Durchschnittspunkte O der gegebene
Sei $\sphericalangle COQ = \alpha_1$, $COP = \alpha_2$, $OPC = \beta$, $OQC = \gamma$, so ist:

a) $u = \sqrt{CP\,.\,CQ}$ und da $CP = \frac{a\,.\,\sin\alpha_2}{\sin\beta}$, $CQ = \frac{a\,.\,\sin\alpha_1}{\sin\gamma}$,

$$u = \sqrt{\frac{a^2\sin\alpha_1\,\sin\alpha_2}{\sin\beta\,.\,\sin\gamma}} = a\sqrt{\frac{2\sin\alpha_1\,.\,\sin\alpha_2}{\cos(\beta-\gamma)+\cos\alpha}}.$$

Da der Zähler constant, so ist u ein Minimum, wenn der Nenner ein
wird, was dann der Fall ist, wenn $\beta=\gamma$; es muss daher $PQ \perp OC$ sein.

$$u = \frac{2 \cdot CP \cdot CQ}{CP + CQ}.$$

$P = \varphi$, so ist $CP = \frac{a \cdot \sin \alpha_2}{\sin(\varphi + \alpha_2)}$, $CQ = \frac{a \cdot \sin \alpha_1}{\sin(\varphi + \alpha_1)}$, daher

$$u = \frac{2a \cdot \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2}{\sin \varphi \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Minimum sein, so muss $\sin \varphi$ ein Maximum sein, daher $\varphi = 90^0$, $\perp OC$.

n einer Seite BC eines Dreieckes ABC ist ein Punkt D gegeben. von diesem nach zwei zu findenden Punkten E und F in den ern Seiten AB und AC zwei Gerade DE und DF, die einen gewinkel ω einschliessen, so ziehen, dass das hiedurch entstandene nem Inhalte nach ein Minimum wird.

hnet man die beiden Stücke CD und DB mit n und m, die Winkel BDE mit y und x, so ist:

$$u = \tfrac{1}{2} DF \cdot DE \cdot \sin \omega,$$

und da $DE = \frac{m \cdot \sin B}{\sin(B + x)}$ und $DF = \frac{n \cdot \sin C}{\sin(x + \omega - C)}$:

$$u = \tfrac{1}{2} mn \cdot \frac{\sin B \cdot \sin C \cdot \sin \omega}{\sin(B + x) \cdot \sin(x + \omega - C)}.$$

Minimum werden, so muss der Nenner:

) $\sin(x + \omega - C) = \frac{1}{2}[\cos(B + C - \omega) - \cos(2x + B - C + \omega)]$

m werden. Dieses tritt ein, wenn $\cos(2x + B - C + \omega) = -1$,

r wenn $x = 90^0 - \frac{B}{2} + \frac{C}{2} - \frac{\omega}{2}$

$y = 90^0 + \frac{B}{2} - \frac{C}{2} - \frac{\omega}{2}$ } daher $y - x = B - C$.*

inem Kreise mit dem Radius r ist ein Viereck umgeschrieben, von ei Winkel 2α und 2β gegeben sind; es sollen die beiden andern bestimmt werden, dass das Viereck möglichst klein werde.

e beiden andern Winkel $2x$ und $2y$, so ist:

$$u = r^2(\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta + \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y).$$

$\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y = \frac{\sin(x + y)}{\sin x \cdot \sin y}$, da ferner $x + y = 180^0 - (\alpha + \beta)$ ist,

s Dreieck zu construieren, verfahre man auf folgende Weise: Man fälle von D AB und AC die Perpendikel DM und DN, halbiere den $\sphericalangle$ MDN und trage ten der Halbierungslinie DO gleiche Winkel ODE und ODF $= \frac{\omega}{2}$ ab. Die unkte der nicht gemeinsamen Schenkel dieser Winkel mit den Seiten AC und n die beiden andern Eckpunkte des gesuchten Dreieckes.

so ist $\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin x \,.\, \sin y}$.

u wird demnach ein Minimum, wenn

$$\sin x \,.\, \sin y = \tfrac{1}{2}\,[\cos\tfrac{1}{2}(x-y) - \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)]$$

ein Maximum wird, was eintritt, wenn $2x = 2y = 180^0 - (\alpha+\beta)$ s

21. *Einem Dreiecke ABC ein zweites möglichst kleines $A_1 I$ schreiben, wenn die Lage des Eckpunktes A_1 auf BC und der $\sphericalangle I A$ gegeben sind.*

Sei $BA_1 = c_1$, $CA_1 = b_1$, dann ist:

$$u = \tfrac{1}{2} A_1 B_1 \,.\, A_1 C_1 \,.\, \sin\alpha_1.$$

Ist ferner $\sphericalangle B C_1 A_1 = z$ und $\sphericalangle A_1 B_1 C = y$, so ist:

$A_1 B_1 = \dfrac{b_1 \sin\gamma}{\sin y}$ und $A_1 C_1 = \dfrac{c_1 \sin\beta}{\sin z}$, demnach $u = \tfrac{1}{2} b_1 c_1 \dfrac{\sin\alpha_1 \,.\, n}{\sin}$

Soll u ein Minimum sein, so muss $\sin y \,.\, \sin z = \tfrac{1}{2}\,[\cos(y-z) - o$ ein Maximum sein. Da aber aus dem Vierecke $AB_1 A_1 C_1$ die e $y + z = \alpha + \alpha_1$ sich ergibt, so muss $\cos(y-z) - \cos(\alpha+\alpha_1)$ ein M sein, was der Fall ist, wenn $y = z = \tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha_1)$ ist.

22. *Von einem Punkte C aus sind an einen Kreis, desse ist, zwei Tangenten CD und CE gezogen, welche sich unter einn Winkel schneiden. Man soll eine dritte Tangente, welche CE in A, B trifft, so ziehen, dass das Dreieck ABC ein Maximum wird.*

Sei O der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, ferner $\sphericalangle EOF =$ $\sphericalangle DOF = 2\psi$, daher $\sphericalangle AOF = \varphi$ und $\sphericalangle BOF = \psi$, so ist wegen $BC = r($ und $AC = r(1 - \operatorname{tg}\varphi)$ der Inhalt des Dreieckes ABC:

$$u = \tfrac{1}{2} r^2 (1 - \operatorname{tg}\varphi)(1 - \operatorname{tg}\psi).$$

Nun ist $(1 - \operatorname{tg}\varphi)(1 - \operatorname{tg}\psi) = 2\,\dfrac{\cos(\varphi-\psi) - \sin(\varphi+\psi)}{\cos(\varphi+\psi) + \cos(\varphi-\psi)}$; da ab φ $= 45^0$ ist, so ist: $u = \dfrac{2\cos(\varphi-\psi) - \sqrt{2}}{2\cos(\varphi-\psi) + \sqrt{2}}\, r^2$, woraus sich

$$\cos(\varphi-\psi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{r^2+u}{r^2-u} \text{ ergibt.}$$

Der grösste Wert den $\cos(\varphi-\psi)$ erreichen kann, ist 1; es mus nach für das Maximum $\varphi = \psi$ und $\dfrac{r^2+u}{r^2-u} = \sqrt{2}$ sein; daraus gib

$$u = (\sqrt{2}-1)^2 r^2,$$

der Punkt F ist also der Schnittpunkt der Linie CO mit dem Kr se.

23. *Unter allen Vierecken mit einem gegebenen Winkel 2α die gegebenen Kreise mit dem Radius r umgeschrieben sind und zugleich d dingung genügen, dass um dieselben ein Kreis beschrieben wer das kleinste zu finden.*

lie Seiten des Viereckes a, b, c und d, so ist:

$$u = \frac{r}{2}(a + b + c + d),$$

$+ d = a + c$ ist:

$$u = r(a + c).$$

edingungen der Aufgabe gemäss ist der Winkel, der 2α gegenüber -2α; ist daher ein Nachbarwinkel von 2α $2x$, mithin der gegenle $180^0 - 2x$, so ist:

$= r(\cot g\,\alpha + \cot g\,x)$ und $c = r(\tan g\,\alpha + tg\,x)$; demnach

$$r^2(tg\,\alpha + \cot g\,\alpha + tg\,x + \cot g\,x) = 2r^2\left(\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2x}\right).$$

in Minimum, wenn $\sin 2x$ ein Maximum, also wenn $2x = 90^0$ ist.

nter allen Vierecken, welche einen gegebenen Winkel 2α und enen Umfang $2s$ haben und zugleich der Bedingung genügen, l in als um dieselben ein Kreis beschrieben werden kann, das finden.

Bezeichnung der Winkel und Seiten dieselbe, wie in der voran-Aufgabe, so ist: $u = r \cdot s$,

$$r(tg\,\alpha + \cot g\,\alpha + tg\,x + \cot g\,x) = 2r\left(\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2x}\right) \text{ ist,}$$

$$u = \frac{s^2}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2x}}.$$

r ein Maximum, wenn $\sin 2x$ ein Maximum, also $2x = 90^0$ wird.

ie Winkel eines Viereckes zu bestimmen, das einem gegebenen dem Radius r umgeschrieben ist und dem auch ein Kreis umgerden kann, wenn der Inhalt desselben möglichst klein werden soll.

selben Bezeichnung, wie sie in der vorigen Aufgabe gewählt wurde,

$$u = r(a + c).$$

ufeinander folgende Winkel $2x$ und $2y$, so sind die diesen gegenn Winkel den Bedingungen der Aufgabe gemäss $180^0 - 2x$ und aher

$$u = 2r^2\left(\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 2y}\right).$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\sin 2y} = \frac{2}{\sqrt{\sin 2x \cdot \sin 2y}} + \left[\sqrt{\frac{1}{\sin 2x}} - \sqrt{\frac{1}{\sin 2y}}\right]^2,$$

Minimum für $2x = 2y$; demnach ist:

$$u = \frac{4r^2}{\sin 2x}.$$

n minimorum findet daher statt, wenn $2x = 90^0$; das Viereck geht lle in ein Quadrat über.

26. *Durch einen Eckpunkt A eines Rechteckes ABCD eine ziehen, welche von den Gegenseiten Stücke abschneidet, die vo zusammenstossenden Seiten aus gerechnet, eine möglichst kleine Su*

Die gesuchte Gerade schneide CD in E und die Verlängeru in F; dann ist:

$$u = DE + BF,$$

oder wenn $\sphericalangle BAF = x$, ferner $AB = a$, $AD = b$ gesetzt wird, $u = a \cdot \operatorname{tg} x$ oder mit Anwendung des Satzes

$$(m - n)^2 + 2mn = m^2 + n^2$$

$$u = \sqrt{(a \cdot \operatorname{tg} x)^2} + \sqrt{(b \cdot \operatorname{cotg} x)^2} = 2\sqrt{ab} + [\sqrt{a \cdot \operatorname{tg} x} - \sqrt{b \cdot}$$

u ist also ein Maximum für $a \cdot \operatorname{tg} x = b \cdot \operatorname{cotg} x$ oder $\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{b}{a}}$;

$DE = \sqrt{ab}$, $BF = \sqrt{ab}$.

Geht das Rechteck in ein schiefwinkliges Parallelogramm übe der $\sphericalangle DAE = y$ genannt, so ist wegen:

$$DE = \frac{b \cdot \sin y}{\sin x} \text{ und } BF = \frac{a \cdot \sin x}{\sin y}$$

$$u = a \cdot \frac{\sin x}{\sin y} + b \cdot \frac{\sin y}{\sin x}$$

und unter Anwendung des obigen Satzes

$$u = 2\sqrt{ab} + \left(\sqrt{\frac{a \cdot \sin x}{\sin y}} - \sqrt{\frac{b \cdot \sin y}{\sin x}}\right)^2.$$

u wird also ein Maximum, wenn $\frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{\frac{b}{a}}$, wo $x + y = \alpha$ ein g Winkel des Parallelogramms ist.

27. *Durch den Scheitelpunkt des rechten Winkels eines rech Dreieckes eine Gerade so zu ziehen, dass die Summe der Projectne Katheten auf sie möglichst gross werde.*

Sei MN die durch den Scheitel C des rechten Winkels im Dieec gezogene Gerade und $\sphericalangle ACM = x$. Fällt man von A und B die enk AM und BN, so ist:

$$u = CM + CN = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = (\sin x + \frac{b}{a} \cos x) a$$

und wenn wir $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$ setzen:

$$u = \frac{a \cdot \sin(x + \varphi)}{\cos \varphi}.$$

u ist ein Maximum, wenn $x + \varphi = 90^0$ ist; daher $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{cotg} x$ ler

ist aber $\frac{a}{b} = \text{tg BAC}$, daher $x = \text{BAC}$, oder MN || AB. Liegt MN
halb des Dreieckes, so schneidet dieselbe die Hypotenuse AB etwa
P und man hat bei derselben Bezeichnung die Gleichung:

$$u = CM + CN = a \,.\, \sin x + b \,.\, \cos x.$$

t daher wie oben $x = \text{BAC}$; es ist daher $AP = CP$ und in gleicher
= CP; es ist demnach P der Mittelpunkt der Hypotenuse.

*in Sechseck besteht aus einem Rechteck mit den Diagonalen d
auf zwei Gegenseiten des letzteren als Diagonalen aufgesetzten
raten. Der Winkel zwischen beiden Diagonalen ist so zu be-
ss der Inhalt des Sechseckes möglichst gross wird.*

Seite des Rechteckes, auf welche das halbe Quadrat aufgesetzt
dere a und der Winkel zwischen beiden Diagonalen x, so ist der
chteckes $\frac{d^2}{2} \sin x$ und der des halben Quadrates $\frac{b^2}{4} = \frac{d^2}{4} \cdot \cos^2\frac{x}{2}$, daher:

$$u = \frac{d^2}{2}\left(\sin x + \cos^2\frac{x}{2}\right) = \frac{d^2}{4}(2 \sin x + \cos x + 1).$$

$+ \cos x$ ist aber nach der vorangehenden Aufgabe ein Maximum,
$= 90^0$ ist, wo $\text{tg}\,\varphi = \frac{1}{2}$.

*nicht parallelen Seiten eines Trapezes, welches einem Kreise
dius r eingeschrieben ist, durchschneiden einander verlängert
Winkel 2a; man bestimme den zu den nicht parallelen Seiten
ntriwinkel so, dass a) der nhalt, b) der Umfang des Trapezes
ss wird.*

B und CD die parallelen Seiten des Trapezes, ferner sei x der
r zu CD und z der zu AD = BC zugehörige Peripheriewinkel,

$$u = \frac{r^2}{2}(\sin 2x + \sin 2y + 2 \,.\, \sin 2z).$$

$z = 90^0 - \alpha$, $x + z = 90^0 + \alpha$, daher $x + y = 180^0 - 2z$ und
daher:

$$\sin 2x + \sin 2y = 2 \sin(x + y) \,.\, \cos(x - y) =$$
$$= 2 \sin 2z \,.\, \cos 2\alpha; \text{ demnach}$$
$$u = r^2 \sin 2z\,(1 + \cos 2\alpha) = 2r^2 \,.\, \cos^2\alpha \,.\, \sin 2z.$$

m Resultat kann man auch auf folgende Weise gelangen:

$$\sqrt{a \,.\, \sin x + b \,.\, \cos x)^2} = \sqrt{a^2 \,.\, \sin^2 x + b^2 \cos^2 x + 2ab \sin x \,.\, \cos x} =$$
$$\sqrt{+ b^2 - b^2 \sin^2 x + 2ab \,.\, \sin x \,.\, \cos x} = \sqrt{(a^2 + b^2) - (a \,.\, \cos x - b \,.\, \sin x)^2}.$$

Maximum, wenn $a \,.\, \cos x = b \,.\, \sin x$ oder $\text{tg}\, x = \frac{a}{b}$ ist.

u wird also ein Maximum für $z = 45^0$; in diesem Falle ist $AD = 2$
$= r\sqrt{2}$ also gleich der Seite des dem Kreise eingeschriebenen Q

Das Maximum maximorum findet statt, wenn $2\alpha = 0$, also
ein Quadrat übergeht.

b) Da $AB = 2r \cdot \sin x$, $CD = 2r \cdot \sin y$ und $AD = BC = 2r$

$$u = 2r(\sin x + \sin y + 2 \sin z) = 4r(\cos \alpha \cdot \cos z + \sin$$

Setzt man nun $\cos \alpha = \operatorname{tg} \varphi$, wo φ ein Hilfswinkel ist, so geht u

$$u = \frac{4r}{\cos \varphi} \sin(\varphi + z).$$

u ist also ein Maximum für $z = 90^0 - \varphi$; in diesem Falle ist

$$u = \frac{4r}{\cos \varphi} = 4r\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}.$$

Das Maximum maximorum findet statt für $\alpha = 0^0$; dann ist
das Trapez geht in ein Quadrat über.

V.

Methode der Tangenten

(Schellbach'sche Methode).

isten Aufgaben, bei deren Behandlung die vorausgehenden Methoden ssen, finden ihre Lösung durch jenes eigenthümliche (der Methode zialrechnung ähnliche) Verfahren, welches Schellbach in seinen chen Lehrstunden«* veröffentlichte. Demselben gebührt wegen meinheit eine besondere Beachtung, wenn gleich dasselbe, wie nt werden wird, der Mängel nicht entbehrt.

nction, welche ein Maximum oder ein Minimum werden soll, sei olynom gegeben, welches nach Potenzen der Veränderlichen x fort- ner die Form:

$$y = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ besitzt.}$$

stellt diese Gleichung eine Curve dar, von welcher beliebig viele rch erhalten werden können, dass für x beliebige Werte substituiert prechenden Werte von y berechnet werden.**

wir an, es würde y für $x = \xi$ ein Maximum oder Minimum und sehr nahe an ξ liegender Wert von x und zwar sei $x_1 < \xi$. Wert x_1 wird die Function y einen bestimmten Wert erhalten; muss aber der Function auch noch für einen zweiten Nachbar- ukommen, etwa für x_2,*** wobei $x_2 > \xi$ ist, so dass die Gleichung is:

et und herausgegeben von Bode und Fischer, Berlin 1860. Ausserdem ist die ndet in Martus, Maxima und Minima, Berlin 1861; Bardey, Arithmetische ig 1873; Koch, Jahresbericht der k. k. O.-R. zu Budweis, 1877; Wagner, r k. k. O.-R. im III. Bezirk in Wien, 1884, u. s. w.

Theil pag. 18.

spiel diene die auf pag. 19 des I. Theils graphisch dargestellte Function $4x + 2$. Dieselbe wird für $x = -\frac{1}{2}$ ein Maximum $3\frac{1}{4}$; für die Nachbar- und $x = \frac{1}{4}$ erhält die Function den Wert 1. Für $x = \frac{2}{3}$ dagegen wird die nimum 0·07; für die Nachbarwerte $x = \frac{1}{4}$ und $x = 1$ wird $y = 1$.

$$a_m x_1^m + a_{m-1} x_1^{m-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 =$$
$$= a_m x_2^m + a_{m-1} x_2^{m-1} + \ldots + a_1 x_2 + a_0,$$

oder nach Zusammenfassung der Glieder von gleich hohen Poten

$$a_m(x_1^m - x_2^m) + a_{m-1}(x_1^{m-1} - x_2^{m-1}) + \ldots + a_1(x_1 - x_2) =$$

und wenn durch den gemeinschaftlichen Factor $x_1 - x_2$ dividiert i

$$a_m(x_1^{m-1} + x_1^{m-2} \cdot x_2 + \ldots + x_1 x_2^{m-2} + x_2^{m-1}) +$$
$$+ a_{m-1}(x_1^{m-2} + x_1^{m-3} x_2 + \ldots + x_1 x_2^{m-3} + x_2^{m-2}) +$$
$$+ a_2(x_1 + x_2) + a_1 = 0.$$

Diese Gleichung, welche bezüglich x_2 und x_1 vom $(m-1)$sten G die Beziehung zwischen zwei Abscissen, welche zur selben Ordi

Einer jeden in der Nähe des Maximums oder Minimum Ordinate entspricht eine zweite gleich grosse; für die Maximal- Ordinate selbst fallen beide Werte zusammen. Setzen wir daher erhaltene Gleichung $x_1 = x_2 = \xi$, so liefert die Auflösung der au zum Vorschein kommenden Gleichung:

$$m a_m \cdot \xi^{m-1} + (m-1) a_{m-1} \xi^{m-2} + \ldots + 2 a_2 \xi + a_1 =$$

die Werte, welche y zu einem Maximum oder Minimum mache

Andere Ableitung dieser Formel.

Die Gleichung einer Geraden, welche durch zwei durch ihr C $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ gegebene Punkte geht, ist bekanntlich:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Sollen diese beiden Punkte der oben erwähnten Curve angehöre die Gleichungen

$$y_1 = a_m x_1^m + a_{m-1} x_1^{m-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 \text{ und}$$
$$y_2 = a_m x_2^m + a_{m-1} x_2^{m-1} + \ldots + a_1 x_2 + a_0$$

bestehen, aus welchen sich durch Subtraction:

$$y_2 - y_1 = a_m(x_2^m - x_1^m) + a_{m-1}(x_2^{m-1} - x_1^{m-1}) + \ldots + a_1(x -$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a_m(x_2^{m-1} + x_2^{m-2} x_1 + \ldots + x_1^{m-1}) +$$
$$+ a_{m-1}(x_2^{m-2} + x_2^{m-3} x_1 + \ldots + x_1^{m-2}) + \ldots + a$$

sich ergibt. Setzt man diesen Wert in die obige Gleichung ein, so selbe die Gleichung der Secante dar.

Verschieben wir nun dieselbe parallel zu sich selbst, so d s Punkte einander immer näher rücken, so geht derselbe endlich die über, wobei $x_1 = x_2 = \xi$ wird; der Factor von $x - x_1$, nämlich

$$m a_m \xi^{m-1} + (m-1) a_{m-1} \xi^{m-2} + \ldots + a_1$$

ist die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der Tang te Abscissenaxe. Da aber an der Stelle, wo ein Maximum oder Min

Tangente* zur Abscissenaxe parallel wird, so ist die Bedingung des oder Minimums:

$$m a_m \xi^{m-1} + (m-1) a_{m-1} \xi^{m-2} + \ldots + a_1 = 0.$$

wir der Einfachheit halber x statt x_2 und dieses Zeichen x auch für al- oder Minimalwert statt ξ gebrauchen, so ergibt sich folgende Regel:

1 drücke die Function, die eines Maximums oder Minimums fähig urch eine einzige Unbekannte aus.

1 setze den Wert der Function gleich jener Function, die man er- man in die ursprüngliche Function x_1 statt x substituiert.

1 fasse die Glieder, welche x und x_1 in gleich hohen Potenzen ent- mmen.

1 dividiere die Gleichung durch $x - x_1$ (eventuell durch $x^k - x_1^k$), x und suche aus der resultierenden Gleichung x. Die gefundenen x sind dann diejenigen, welche die vorgelegte Function zu einem der Minimum machen.**

s Maximum und das Minimum die vorerwähnte Eigenschaft, dass rd, wo α den Neigungswinkel der Tangente mit der Abscissenaxe öge, gemeinsam besitzen, so liefert diese Methode kein Mittel zur des Maximums oder Minimums, und darin liegt eben der Mangel e. Allerdings liefert in den meisten Fällen eine geometrische oder itung der Grenzwerte die gewünschte Entscheidung; in manchen

der Name Methode der »Tangenten« für dieses Verfahren gerechtfertigt.

en Unterricht dürfte es am geeignetsten sein, die Regeln aus der Betrachtung 1 geometrischen Aufgabe abzuleiten, etwa der folgenden: Einem Kreise das iche Rechteck einzuschreiben.

m die Höhe des Rechteckes von $x = 0$ an immer zunehmen, so nimmt die Fläche anfangs 0 war, zunächst fortwährend zu, später wiederum fortwährend ab, bis wieder 0 wird. Es existiert also unter allen diesen unendlich vielen Rechtecken den grössten Flächeninhalt besitzt. Betrachtet man nun ein beliebiges Recht- ssen Höhe x ist, so ist der Flächeninhalt desselben $u = x\sqrt{4r^2 - x^2}$. Da mit Wachsen von x der Inhalt des Rechteckes alle möglichen Werte von 0 bis zum bei dem weiteren Wachsen von x wieder alle möglichen Werte vom Maximal- rchläuft, so muss es jenseits des Maximums ein zweites Rechteck A'B'C'D' mit eben, welches denselben Flächeninhalt wie ABCD hat, es ist also:

$x\sqrt{4r^2 - x^2} = x_1\sqrt{4r^2 - x_1^2}$ oder $4r^2x^2 - x^4 = 4r^2x_1^2 - x_1^4$.

nfassung der Glieder mit gleichen Potenzexponenten folgt weiter $4r^2(x^2 - x_1^2) =$ er nach Division mit dem gemeinsamen Factor $x^2 - x_1^2$:

$$4r^2 = x^2 + x_1^2,$$

ng die Beziehung zwischen den Höhen der gleichflächigen dem Kreise einge- chtecke enthalt. Von den beiden Wurzeln der Gleichung $x^2 - x_1^2 = 0$ besagt neues, während die andere überhaupt unbrauchbar ist.

teck gibt es, dem kein zweites gleichflächiges entspricht, nämlich das Maximal- dieses fallen also x und x_1 zusammen, daher $2x^2 = 4r^2$ oder $x = r\sqrt{2}$; das eck ist demnach das dem Kreise eingeschriebene Quadrat.

Fällen setzen sich aber, insbesondere, wenn mehrere Maxima und
stieren, dieser Entscheidung Schwierigkeiten entgegen.*

Erscheint die Function, die ein Maximum oder Minimum wer
Summe oder Differenz zweier Wurzelausdrücke, so bedarf es, bevor
$x - x_1$ dividieren kann, einer Transformation. Nach Zusammen
ähnlichen Glieder stelle man die beiden Seiten der Gleichung i
Brüchen mit rationalem Zähler dar, was dadurch erreicht wird, d
einem Ausdruck von der Form $\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$ multipliciert und divi

Eine häufige Anwendung findet ferner ein Satz aus der Propo
Ist nämlich $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, so muss $\frac{A-B}{B} = \frac{C-D}{D}$ sein.

Ist endlich die gedachte Function von sin x oder cos x abhä
scheint die Anwendung der auf Seite 32 und 33 angegebenen gon
Formeln geboten.

---

*1. Es soll eine Zahl von der Beschaffenheit gesucht werd
Summe der Quadrate der Differenzen, welche diese Zahl mit
Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ bildet, am kleinsten ist.*

$$u = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + (x - a_3)^2 + \ldots + (x - a_n)^2 =$$
$$= nx^2 - 2x(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots$$
$$nx^2 - 2(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)x = nx_1^2 - 2(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$
$$n(x^2 - x_1^2) = 2(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)(x - x_1).$$

Kürzt man durch $x - x_1$ ab und setzt $x_1 = x$, so folgt:

$$x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}.$$ **

2. Von welcher Zahl ist die dritte Factorielle ein Maximum ode M

$$u = \binom{x}{3} = \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3},$$

$$x(x-1)(x-2) = x_1(x_1-1)(x_1-2),$$

$$\frac{x-2}{x_1-2} = \frac{x_1^2 - x_1}{x^2 - x} \text{ oder } \frac{x - x_1}{x_1 - 2} = \frac{-(x^2 - x_1^2) + (x -)}{x^2 - x}.$$

Dividiert man durch $x - x_1$ und substituiert $x_1 = x$, so erhält man
G

$$x^2 - 2x + \frac{2}{3} = 0,$$

welche $x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ liefert.

---

* Ueber ein arithmetisches Kriterium siehe im Anhang zu diesem Absc itte

** Sind $a_1, a_2 \ldots a_n$ die durch Beobachtung gewonnenen Werte einer Grös, de
Wert x ist, so ist die Summe der Quadrate der Fehler ein Minimum, wen man
arithmetische Mittel aller beobachteten Werte nimmt.

wir zunächst $x = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} = 1{\cdot}577$, so ist für

$x = 1{\cdot}57 \quad \ldots u = -0{\cdot}0641$

$x = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \ldots u = -0{\cdot}0642$

$x = 1{\cdot}59 \quad \ldots u = -0{\cdot}0641,$

für $x = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ ein Minimum, nämlich $u = -\frac{1}{27}\sqrt{3}$.

wir ferner $x = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{\cdot}423$, so ist für

$x = 0{\cdot}42 \quad \ldots u = 0{\cdot}064148\ldots$

$x = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \ldots u = 0{\cdot}06415\ldots.$

$x = 0{\cdot}43 \quad \ldots u = 0{\cdot}0640\ldots.$

$x = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ ein Maximum, nämlich $u = \frac{1}{27}\sqrt{3}$.

ches ist die dunkelste Stelle zwischen zwei Punkten, deren Hellig-hältnisse $\alpha : \beta$ steht?

Entfernung der beiden Punkte $AB = d$, sei ferner der gesuchte $X = x$, daher $BX = d - x$, so ist:

$$u = \frac{k\alpha}{x^2} + \frac{k\beta}{(d-x)^2};$$

$$\frac{}{x)^2} = \frac{\alpha}{x_1^2} + \frac{\beta}{(d-x_1)^2}; \quad \alpha\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_1^2}\right) = \beta\left[\frac{1}{(d-x_1)^2} - \frac{1}{(d-x)^2}\right].$$

die Brüche auf gleiche Nenner gebracht und durch $x_1 - x$ abge-gibt sich:

$$\alpha \cdot \frac{x_1 + x}{x^2 \cdot x_1^2} = \beta \frac{2d - (x_1 + x)}{[(d-x)(d-x_1)]^2},$$

an $x_1 = x$ setzt: $\left(\frac{d-x}{x}\right)^3 = \frac{\beta}{\alpha}$, woraus $x = \frac{d\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}}$ folgt.

für diesen Wert von x wirklich ein Minimum werden muss, geht nderen Form der Function hervor. Es wird nämlich sowohl für $= d$ die Function $u = +\infty$; es muss also zwischen beiden Werten geben, der u zu einem Minimum macht.

ist ein rechter Winkel und innerhalb desselben ein Punkt P oordinaten a und b gegeben; man soll durch diesen die kürzeste schen den Winkelschenkeln ziehen.

linate des Punktes P PD schneide von BC das Stück $CD = x$ cisse von P EP schneide von AB das Stück $AE = y$ ab, dann ist:

$$u = \sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2},$$

und da $x : a = b : y$, $\qquad u = \frac{(a+x)\sqrt{b^2+x^2}}{x}.$

$$\frac{(a+x)\sqrt{b^2+x^2}}{x} = \frac{(a+x_1)\sqrt{b^2+x_1^2}}{x_1},$$

$$\frac{a^2x_1^2 + 2axx_1^2 + x^2x_1^2}{a^2x^2 + 2ax^2x_1 + x^2x_1^2} = \frac{b^2+x_1^2}{b^2+x^2}$$

oder mit Anwendung des oben erwähnten Satzes aus der Propo

$$\frac{a^2(x_1^2 - x^2) + 2axx_1(x_1 - x)}{(a+x_1)^2x^2} = \frac{x_1^2 - x^2}{b^2+x^2}.$$

Dividiert man durch $x - x_1$ und substituiert $x_1 = x$, so ergibt si

$$x = \sqrt[3]{ab^2} \text{ und } y = \sqrt[3]{a^2b}.$$

Der Beweis für die Existenz eines Minimums ergibt sich leic geometrischen Betrachtung. Lassen wir die gesuchte Linie die Ic annehmen, so ist die Länge derselben $= \infty$; lassen wir nun den Wi von 0 an wachsen, so nimmt die Länge der Linie AC immer mer ab, wird endlich am kleinsten und nimmt dann wieder stetig zu $\sphericalangle PCD = 90^0$ dieselbe wieder $= \infty$ wird.

5. *Ein Lichtpunkt A sei in einer Geraden AC, welche die Ho ebene im Punkte C schneidet, verschiebbar. Die Projection von A Ebene sei CE und $\sphericalangle ACE = \alpha$. Wo muss sich der Lichtpunkt damit der Punkt B der Horizontalebene möglichst stark beleuc*

Sei $\sphericalangle ACB = \gamma$ und $BC = a$, ferner die Intensität der Lichtq ist die Beleuchtungsstärke:

$$u = \frac{ki \,.\, \sin ABE}{AB^2},$$

und da $\sin ABE = \frac{AE}{AB} = \frac{x \,.\, \sin\alpha}{AB}$ und $AB = \sqrt{a^2 + x^2 - 2ax\,c}$

$$u = \frac{kix \,.\, \sin\alpha}{\sqrt{(a^2 + x^2 - 2ax \,.\, \cos\gamma)^3}}.$$

$$\frac{x}{\sqrt{(a^2 + x^2 - 2ax \,.\, \cos\gamma)^3}} = \frac{x_1}{\sqrt{(a^2 + x_1^2 - 2ax_1 \,.\, \cos\gamma)^3}}, \text{ ahe}$$

$$\frac{a^2 + x^2 - 2ax \,.\, \cos\gamma}{a^2 + x_1^2 - 2ax_1 \,.\, \cos\gamma} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x_1^2}} \text{ und}$$

$$\frac{(x^2 - x_1^2) - 2a \,.\, \cos\gamma(x - x_1)}{2a^2 + x^2 + x_1^2 - 2a\cos\gamma(x + x_1)} = \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x_1^2}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x_1^2}},$$

und, wenn man durch $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_1}$ abkürzt:

$$\frac{+\sqrt[3]{x x_1}+\sqrt[3]{x_1^2}]\,[(x+x_1)-2a\,.\,\cos\gamma]}{2a^2+x^2+x_1{}^2-2a\,.\,\cos\gamma\,(x+x_1)}=\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x_1}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x_1{}^2}};$$

$=x$, so erhält man die Gleichung:

$$2x^2-ax\,.\,\cos\gamma=a^2,$$

$x=\frac{a}{4}[\cos\gamma\pm\sqrt{\cos^2\gamma+8}]$ ergibt.

obere Zeichen ist der Lichtpunkt über, für das untere Zeichen rizontalebene.

Fusse eines Berges, der unter dem Winkel β ansteigt, soll eine Berg hinauf abgefeuert werden. Wie muss man den Lauf einen möglichst hohen Punkt des Berges zu treffen?

chung der Böschungslinie ist:

$$y=x\,.\,\operatorname{tg}\beta.$$

der Wurfslinie (Parabel), bezogen auf den Fuss des Berges als sprung, lautet:

$$y=x\,.\,\operatorname{tg}\varphi-\frac{g}{2c^2\cos^2\varphi}\cdot x^2,$$

evationswinkel und c die Anfangsgeschwindigkeit des Projectils liminiert man aus beiden Gleichungen x, so erhält man:

$$y=\frac{2c^2\,.\,\cos^2\varphi\,.\,\operatorname{tg}\beta\,(\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\beta)}{g}.$$

die Function $u=\frac{\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$ ein Maximum werden.

der Kürze halber $\operatorname{tg}\varphi=z$ und $\operatorname{tg}\beta=a$, so ist:

$$z=\frac{z_1-a}{1+z_1{}^2};\ (z-z_1)+a(z^2-z_1{}^2)-z\,z_1(z-z_1)=0,$$

durch $z-z_1$ dividiert und $z_1=z$ setzt:

$$1+2az-z^2=0,$$

$$+2\operatorname{tg}\beta\,.\,\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi=0\ \text{oder}\ \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\beta}=-\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$$

$$g\,2\varphi=-\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}=-\operatorname{cotg}\beta=\operatorname{tg}(90^0+\beta),\ \text{daher}$$

$$2\varphi=90^0+\beta\ \text{und}\ \varphi=45^0+\tfrac{1}{2}\beta.$$

esuchten Elevationswinkel zu erhalten, errichte man im Anfangs- schiefe Ebene ein Perpendikel und halbiere den Winkel, den r Horizontalen bildet.

ndensein eines Maximums ist leicht nachzuweisen. Für $\varphi=\beta$ ird $y=0$; da y positiv sein muss, so liegt innerhalb dieser ximum.

7. In dem ersten Quadranten einer Ellipse soll man den bestimmen, dessen Normale am weitesten vom Centrum entfer

Die Entfernung einer Geraden, deren Gleichung $y = Ax +$ dinatenursprung ist ausgedrückt durch $d = \pm \frac{B}{\sqrt{1+A^2}}$, wo das wählen ist, dass d positiv ist. Nun ist aber die Gleichung der x' und y' die Coordinaten des Berührungspunktes bedeuten,

$$y = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} x + \frac{a^2 - b^2}{b^2} y', \text{ daher } d = \frac{(a^2 - b^2) x' y'}{\sqrt{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}} \text{ und da } y' =$$

$$d = \frac{a^2 - b^2}{a} \cdot \frac{x' \sqrt{a^2 - x'^2}}{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) x'^2}}.$$

$$\frac{a^2 x'^2 - x'^4}{a^4 - (a^2 - b^2) x'^2} = \frac{a^2 x_1'^2 - x_1'^4}{a^4 - (a^2 - b^2) x_1'^2}.$$

Nach erfolgter Reduction, Division durch $x'^2 - x_1'^2$ und von $x_1 = x$ ergibt sich die Gleichung:

$$a^6 - 2a^4 x'^2 + (a^2 - b^2) x'^4 = 0,$$

woraus $x' = \frac{a^3 (a \pm b)}{a^2 - b^2}$ folgt.

Da $x' < a$ sein muss, so ist von den beiden Wurzeln $x' =$ $a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ nur die zweite brauchbar. Für $x' = a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ ist und $d = a - b$.

Für $x' = 0$ und $x' = a$ ist $d = 0$; es muss daher zwischen ein Maximum existieren.

8. Es ist die Zahl a in vier Theile so zu theilen, dass ich selben verhalten, wie m : n und die Summe der Producte aus ein Maximum werde.

Es ist $x + y + z + t = a$, $x : y = m : n$, $u = xy + xz + xt +$ Setzt man den Wert von y aus der zweiten in die erste und ein, so folgt:

$$\frac{m+n}{m} x + z + t = a$$

$$u = \frac{n}{m} x (x + z + t) + xz + xt + zt.$$

Anstatt nun den Wert einer Unbekannten aus der ersten Gleich stimmen und in die zweite zu substituieren, wende man die Meth bestimmten Coëfficienten an. Zu diesem Zwecke multipliciere wi reducierte erste Gleichung mit einem unbestimmten Factor λ und selbe zur zweiten Gleichung; es muss dann die Function

$$x(x+z+t)+xz+xt+zt+\lambda\left(a-\frac{m+n}{m}x-z-t\right)$$

aximum werden.

ächst x variabel, z und t dagegen constant, so ist nach Weg-constanten Glieder:

$$\frac{n}{m}x(x+z+t)+xz+xt-\lambda\cdot\frac{m+n}{m}x=$$

$$=\frac{n}{m}x_1(x_1+z+t)+x_1z+x_1t-\lambda\cdot\frac{m+n}{m}x_1.$$

ger Zusammenfassung der Glieder, Division durch den Factor $x-x_1$ ierung von $x_1=x$ erhält man die Gleichung:

$$2nx+(m+n)(z+t)-\lambda(m+n)=0 \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Weise ergibt sich bei variablem z die Gleichung

$$(m+n)x+mt-m\lambda=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

ablem z:

$$(m+n)x+mz-m\lambda=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

und (c) folgt unmittelbar $t=z$.

ergibt sich für den unbestimmten Factor

$$\lambda=\frac{m+n}{m}x+z.$$

ert desselben in (a) substituiert, so folgt:

$$z=\frac{m^2+n^2}{m(m+n)}x$$

insetzung der gefundenen Werte für t, z und y in die Gleichung $t=a$:

$$\frac{n+n)}{mn+3n^2},\quad y=\frac{an(m+n)}{3m^2+2mn+3n^2},\quad z=t=\frac{a(m^2+n^2)}{3m^2+2mn+3n^2}.$$

einen viereckigen Thurm, dessen Tiefe b ist, will man einen der Länge $m>b$ hineinschaffen. Welche Höhe muss die Thüre wenigstens haben, wenn eine Seitenbewegung des Balkens n ist?

ke sich den Balken so bewegt, dass seine Enden beziehungsweise n Rückwand des Thurmes und auf dem Boden gleiten. Jede Balken annehmen kann, bedingt eine gewisse Höhe der Thüre. ngswinkel des Balkens gegen den Boden φ, so ist:

$$u=m\,.\,\sin\varphi-b\,.\,\operatorname{tg}\varphi$$

$$m(\sin\varphi-\sin\varphi_1)=b(\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\varphi_1)$$

$$\cos\frac{\varphi+\varphi_1}{2}\cdot\sin\frac{\varphi-\varphi_1}{2}=\frac{2b\,.\,\sin\frac{\varphi-\varphi_1}{2}\cdot\cos\frac{\varphi-\varphi_1}{2}}{\cos\varphi\,.\,\cos\varphi_1},$$

daher $\cos\varphi = \sqrt[3]{\frac{b}{m}}$; mithin $\sin\varphi = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[3]{m}}$ und $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{}$

und $u = \sqrt{(\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{b^2})^3}$.

10. *Für welche Werte von x wird die Function:*

$u = \sin x \,.\, \sin y \,.\, \sin z$, *wo* $x + y + z = 180^0$ *ist, ein Maximum?*

Es ist $u = \sin x \,.\, \sin y \,.\, \sin(x + y)$. Man nehme y constan

$$\frac{\sin x}{\sin x_1} = \frac{\sin(x_1 + y)}{\sin(x + y)} \text{ oder } \frac{\sin x - \sin x_1}{\sin x_1} = -\frac{\sin(x + y) - \sin x}{\sin(x + y)}$$

$$\text{oder } \frac{2\sin\frac{x - x_1}{2} \cdot \cos\frac{x + x_1}{2}}{\sin x_1} = -\frac{2\sin\frac{x - x_1}{2} \cdot \cos\left(\frac{x + x}{2}\right.}{\sin(x + y)}$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{\cos(x + y)}{\sin(x + y)}; \quad \operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg}(x + y) = \operatorname{cot} z$$

und auf dieselbe Weise bei constantem x:

$$\operatorname{cotg} y = -\operatorname{cotg}(x + y) = \operatorname{cotg} z,$$

daher $x = y = z = 60^0$.

11. *Aus vier Brettern, von denen jedes a cm breit ist, soll offene Rinne zusammengezimmert werden, so dass die beiden äu vertical stehen und die beiden untersten einen Winkel bilden muss dieser Winkel sein, damit die Rinne eine möglichst gro menge fasst?*

Ist der gesuchte Winkel 2φ, so ist:

$$u = 2a^2 \sin\varphi + \frac{a^2}{2}\sin 2\varphi = \frac{1}{2}a^2(4\sin\varphi + \sin 2\varphi)$$

$$4\sin\varphi + \sin 2\varphi = 4\sin\varphi_1 + \sin 2\varphi_1$$

$$4(\sin\varphi - \sin\varphi_1) = \sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi \text{ oder}$$

$$8\cos\frac{\varphi + \varphi_1}{2} \cdot \sin\frac{\varphi - \varphi_1}{2} = -2\cos(\varphi + \varphi_1)\sin(\varphi - \varphi_1 =$$

$$= -4\cos(\varphi + \varphi_1)\sin\frac{\varphi - \varphi_1}{2} \cdot \cos\frac{\varphi - \varphi_1}{2}.$$

Daher $2\cos\varphi = -\cos 2\varphi$, woraus

$$\cos^2\varphi + \cos\varphi = \frac{1}{2} \text{ und } \cos\varphi = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \text{ folgt,}$$

daher $2\varphi = 137^0\,3'\,31''$.

Um zu beweisen, dass wirklich ein Maximum existiere, setzen wir und $\varphi = 90^0$; im erstern Falle ist $u = 1{\cdot}9a^2$ und $u = 2a^2$. Fü $= 137^0\,3'\,31''$ ist $u = 2{\cdot}2a^2$; demnach existiert ein Maximum.

nter allen Dreiecken, welche einen Winkel 2α und denselben Um-
ıben, dasjenige zu finden, welches den grössten Inhalt hat.

halt eines Dreieckes lässt sich durch das Product aus dem Quadrate Jmfanges und der Tangenten der halben Dreieckwinkel ausdrücken.* mäss ist:

$$u = s^2 \operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{cotg}(\alpha + x).$$

$$\operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{cotg}(\alpha + x) = \operatorname{tg} x_1 \,.\, \operatorname{cotg}(\alpha + x_1),$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x_1} = \frac{\operatorname{cotg}(\alpha + x_1)}{\operatorname{cotg}(\alpha + x)},$$

wendung des oben erwähnten Satzes:

$$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_1}{\operatorname{tg} x_1} = \frac{\operatorname{cotg}(\alpha + x_1) - \operatorname{cotg}(\alpha + x)}{\operatorname{cotg}(\alpha + x)},$$

$$\frac{\sin(x - x_1)}{\cos x \,.\, \sin x_1} = \frac{\sin(x - x_1)}{\sin(\alpha + x_1)\cos(\alpha + x)}$$

ıan $x_1 = x$ setzt:

$$\sin x \,.\, \cos x = \sin(\alpha + x)\cos(\alpha + x)$$

$$\text{oder } \sin 2x = \sin(2\alpha + 2x),$$

daher $2x = 180^0 - 2\alpha - 2x$ oder $2x = 90^0 - \alpha$,

ittte Winkel ebenfalls $90^0 - \alpha$; das Dreieck ist somit ein gleich-

nd zwar ist die Grundlinie desselben $a = \frac{2s \,.\, \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}$ und die Schenkel

$\frac{s}{\sin\alpha}$. Damit ist auch die Aufgabe: Unter allen Dreiecken, welche 2α und denselben Flächeninhalt u besitzen, dasjenige zu finden, kleinsten Umfang hat, gelöst.

obigen Formel folgt nämlich:

$$s^2 = \frac{u}{\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{cotg}(\alpha + x)}.$$

ɔrmel lässt sich auf folgende Weise entwickeln. Nach dem Sinussatze ist:

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C, \text{ daher}$$

$$(a + b + c) : a = (\sin A + \sin B + \sin C) : \sin A,$$

$$\text{daher } a = \frac{2s \,.\, \sin A}{\sin A + \sin B + \sin C},$$

$$\text{in } B + \sin C = 4 \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2},$$

$$a = \frac{s \,.\, \sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}} \text{ und ebenso: } b = \frac{s \,.\, \sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}},$$

:

$$u = \frac{ab}{2}\sin C = s^2 \operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Soll s ein Minimum werden, so muss $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg}(\alpha + x)$ ein Maxi
dies ist aber der Fall, wenn das Dreieck gleichschenklig ist und

$$a = 2\sqrt{u \operatorname{tg} \alpha} \text{ und } b = c = \sqrt{\frac{2u}{\sin 2\alpha}}.$$

13. *Durch einen gegebenen Eckpunkt eines Dreieckes ist*
so zu ziehen, dass der Körper, welcher durch Rotation des
dieselbe entsteht, möglichst gross wird.

Die gesuchte Gerade, welche durch den Eckpunkt A des $\triangle$
ist, bilde mit der Seite $AB = c$ den Winkel φ. Ziehen wir von
B und C die Perpendikel BD und CE auf die gesuchte Gerade,

$$u = \frac{\pi}{3} DE\,(BD^2 + CE^2 + BD \cdot CE) - \frac{\pi}{3} BD^2 \cdot AD - \frac{\pi}{3} CE$$

oder, da $BD = c \cdot \sin \varphi$, $AD = c \cdot \cos \varphi$, $CE = b \cdot \sin(A$
$= -b \cdot \cos(A + \varphi)$ ist:

$$u = \frac{\pi b c}{3} \sin A\,[b \cdot \sin(A + \varphi) + c \cdot \sin \varphi],$$

daher $b[\sin(A + \varphi) - \sin(A + \varphi_1)] = c(\sin \varphi_1 - \sin \varphi)$ od

$$2b \cdot \cos\left(\frac{\varphi + \varphi_1}{2} + A\right) \cdot \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} = -2c \cdot \cos \frac{\varphi + \varphi_1}{2} \cdot \sin$$

mithin $-b \cdot \cos(\varphi + A) = c \cdot \cos \varphi$, daher $AE = AD$.

Die Auflösung dieser Gleichung ergibt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{c + b \cdot \cos A}{b \cdot \sin A}.$$

Zieht man nun durch den Punkt A die Schwerlinie des Dreie
und nennen $\sphericalangle BAF = \psi$, so ist:

$$m c \cdot \sin \psi = m b \cdot \sin(A - \psi), \text{ woraus}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b \cdot \sin A}{c + b \cdot \cos A} \text{ folgt;}$$

mithin ist:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} = \operatorname{cotg} \psi = \operatorname{tg}(90^0 - \psi), \text{ daher } \varphi + \psi = 0^0,$$

die gesuchte Linie muss also senkrecht stehen auf der durch A gezogen

14. *Auf welchem Parallelkreise des Saturn erscheint*
Ringes am grössten und wie gross ist das Maximum der

Sei O der Mittelpunkt des Saturn, r sein Radius und
Ort; der verlängerte Aequatordurchmesser schneide den Ring
Ferner sei der Radius für den äussern Rand des Ringsystem
für den innern Rand $OA = d$, $\sphericalangle MOA = \beta$, $\sphericalangle AMB = \varphi$ und
so folgt aus dem $\triangle OMA$:

$d : r = \sin\omega : \sin(\omega + \beta)$, daher $\operatorname{tg}\omega = \frac{d \cdot \sin\beta}{r - d \cdot \cos\beta}$;

is dem $\triangle$ OMB:

$= \sin(\varphi + \omega) : \sin(\varphi + \omega + \beta)$, daher $\operatorname{tg}(\varphi + \omega) = \frac{c \cdot \sin\beta}{r - c \cdot \cos\beta}$

$\varphi + \omega) = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\omega}{1 - \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\omega}$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{r(c - d)\sin\beta}{r^2 + cd - r(c + d)\cos\beta}.$$

r der Kürze halber $r^2 + cd = a$ und $r(c + d) = b$, so ist:

$$\frac{\sin\beta}{a - b \cdot \cos\beta} = \frac{\sin\beta_1}{a - b \cdot \cos\beta_1}; \quad \frac{\sin\beta}{\sin\beta_1} = \frac{a - b \cdot \cos\beta}{a - b \cdot \cos\beta_1};$$

$$\frac{\sin\beta - \sin\beta_1}{\sin\beta_1} = -\frac{b(\cos\beta - \cos\beta_1)}{a - b \cdot \cos\beta_1},$$

$$\frac{2\sin\frac{\beta - \beta_1}{2} \cdot \cos\frac{\beta + \beta_1}{2}}{\sin\beta_1} = \frac{2\sin\frac{\beta + \beta_1}{2} \cdot \sin\frac{\beta - \beta_1}{2}}{a - b \cdot \cos\beta_1}.$$

gibt sich:

$$\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{b \cdot \sin\beta}{a - b \cdot \cos\beta} \text{ und } \cos\beta = \frac{b}{a} = \frac{r(c + d)}{cd + r^2},$$

$$\text{daher } \operatorname{tg}\varphi = \frac{r(c - d)}{\sqrt{(r^2 + cd)^2 - r^2(c + d)^2}}.$$

cher gestaltet sich $\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}$; man erhält:

$$\sin\varphi = \frac{r(c - d)}{cd - r^2}.$$

$= 7885$, $c = 18794$, $d = 12746$ Meilen ist $\beta = 34^0\ 29'\ 10''$ und $35'\ 47''$.*

Auf der Peripherie eines gegebenen Kreises einen Punkt so zu bedass die Summe der Quadrate seiner Abstände von zwei gegebenen der Peripherie ein Maximum werde.

die zwei gegebenen Punkte A und B und der gesuchte Punkt P, $OB = 2\alpha$, $\sphericalangle AOP = 2\tau$, so ist, da $AP = 2r\sin\tau$, $BP = 2r\sin(\tau + \alpha)$,

$$u = 4r^2[\sin^2\tau + \sin^2(\tau + \alpha)],$$

$$\sin^2\tau - \sin^2\tau_1 = \sin^2(\tau_1 + \alpha) - \sin^2(\tau + \alpha) \text{ oder}$$

$$\sin\tau + \sin\tau_1)(\sin\tau - \sin\tau_1) = [\sin(\tau_1 + \alpha) + \sin(\tau + \alpha)] \cdot$$

$$\cdot [\sin(\tau_1 + \alpha) - \sin(\tau + \alpha)] \text{ oder}$$

$$4 \sin\frac{\tau+\tau_1}{2} \cdot \cos\frac{\tau-\tau_1}{2} \cdot \cos\frac{\tau+\tau_1}{2} \cdot \sin\frac{\tau-\tau_1}{2} =$$

$$= -4 \sin\left(\frac{\tau+\tau_1}{2}+\alpha\right) \cdot \cos\frac{\tau-\tau_1}{2} \cdot \sin\frac{\tau-\tau_1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\tau+\tau_1}{2}\right.$$

daher: $\sin 2\tau = -\sin(2\tau + 2\alpha)$; $2\tau + 2\alpha = 360^0 - 2\tau$ oder $2\tau =$ der Bogen über der Sehne AB wird also durch den Punkt P halb

Wird statt 2α $360^0 - 2\alpha$ gesetzt, so liegt der Punkt P im Abschnitte; in diesem Falle ist $\tau = \frac{1}{2}\alpha$.

16. *Von einem Punkte einer schiefen Ebene A soll ein Körper abwärts und dann weiter auf einer horizontalen Ebene bis zu d B gleiten. Welches muss die Neigung der schiefen Ebene sein, Körper in der kürzesten Zeit von A nach B kommt, wenn man d nicht berücksichtigt?*

Sei die Entfernung des Punktes A von der Horizontalen AC = und der Neigungswinkel der schiefen Ebene ACE $= \tau$. Die Zeiten, Körper braucht, um den Weg AD auf der schiefen Ebene und Horizontalen zurückzulegen, seien t_1 und t_2; dann ist $AD = \frac{a}{\sin\tau}$ u

dem $AD = \frac{g}{2} \cdot t_1^2 \cdot \sin\tau$, woraus $t_1 = \frac{1}{\sin\tau}\sqrt{\frac{2a}{g}}$ folgt.

Die Geschwindigkeit am Fusse der schiefen Ebene ist $\sqrt{2ag}$, Horizontalcomponente derselben $\sqrt{2ag} \cdot \cos\tau$. Da nun $BD = \sqrt{2a}$ und ferner $BD = b - a \cdot \cotg\tau$ ist, so folgt:

$$t_2 = \frac{b \cdot \sin\tau - a \cdot \cos\tau}{\sqrt{2ag} \cdot \sin\tau \cdot \cos\tau}; \text{ daher}$$

$$u = \sqrt{\frac{2a}{g}} \cdot \frac{1}{\sin\tau}\left[1 + \frac{b \cdot \sin\tau - a \cdot \cos\tau}{2a \cdot \cos\tau}\right] = \frac{1}{\sqrt{2ag}}\left(\frac{a}{\sin\tau} + \frac{b}{\sin\tau}\right.$$

$$\frac{a}{\sin\tau} + \frac{b}{\cos\tau} = \frac{a}{\sin\tau_1} + \frac{b}{\cos\tau_1} \text{ oder}$$

$$a\left(\frac{1}{\sin\tau} - \frac{1}{\sin\tau_1}\right) = b\left(\frac{1}{\cos\tau} - \frac{1}{\cos\tau_1}\right) \text{ oder}$$

$$\frac{2a \cdot \sin\frac{\tau-\tau_1}{2} \cdot \cos\frac{\tau+\tau_1}{2}}{\sin\tau \cdot \sin\tau_1} = \frac{2b \cdot \sin\frac{\tau-\tau_1}{2} \cdot \sin\frac{\tau+\tau_1}{2}}{\cos\tau \cdot \cos\tau_1}$$

Kürzt man durch $\sin\frac{\tau-\tau_1}{2}$ ab und setzt $\tau_1 = \tau$, so ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\tau = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

Zu einer gegebenen Sehne eines Kreises eine parallele Sehne zu dass der Inhalt des hiedurch bestimmten eingeschriehenen Trapezes imum werde.

das gesuchte Trapez ABCD und O der Mittelpunkt des gegebenen ei ferner $\sphericalangle AOB = 2\alpha$ und $\sphericalangle COD = 2\pi$, so ist, da $AB = 2r \sin\alpha$, $\sin\pi$ und die Höhe des Trapezes $r(\cos\alpha + \cos\pi)$:

$$u = r^2(\sin\alpha + \sin\pi)(\cos\alpha + \cos\pi);$$

$$\frac{\sin\alpha + \sin\pi}{\sin\alpha + \sin\pi_1} = \frac{\cos\alpha + \cos\pi_1}{\cos\alpha + \cos\pi}.$$

gibt sich weiters:

$$\frac{\sin\pi - \sin\pi_1}{\sin\alpha + \sin\pi_1} = \frac{\cos\pi_1 - \cos\pi}{\cos\alpha + \cos\pi} \text{ oder}$$

$$\frac{2\sin\frac{\pi-\pi_1}{2} \cdot \cos\frac{\pi+\pi_1}{2}}{\sin\alpha + \sin\pi_1} = \frac{2\sin\frac{\pi-\pi_1}{2} \cdot \sin\frac{\pi+\pi_1}{2}}{\cos\alpha + \cos\pi}$$

man durch $\sin\frac{\pi-\pi_1}{2}$ abkürzt und $\pi_1 = \pi$ setzt:

$$\frac{\cos\pi}{\alpha + \sin\pi} = \frac{\sin\pi}{\cos\alpha + \cos\pi} \text{ oder } \cos(\pi + \alpha) = -\cos 2\pi,$$

$+\alpha = 180^0 - 2\pi$ oder $3\pi = 180^0 - \alpha$, und $2\pi = \frac{360^0 - 2\alpha}{3}$.

also den über AB liegenden Bogen in drei gleiche Theile.

statt des Winkels 2α der $\sphericalangle 360^0 - 2\alpha$ genommen, so erhält man s Maximum das Trapez im kleinern Kreisabschnitte; dann ist

Man theile also in diesem Falle den Bogen im kleinern Abschnitte

iche Theile.*

Von einem gleichschenkligen Trapez kennt man die gleichen Seiten b parallele Seite a. Wie gross muss die andere parallele Seite sein, durch Rotation der Figur um a erzeugte Volum ein Maximum wird?

s gesuchte Trapez ABCD, die Höhe desselben CF oder DE und der $D = \varrho$, so ist:

Lösung der Aufgabe: »Einen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen« (Trisection ist auf elementarem Wege, d. h. mit Hilfe von Cirkel und Lineal nicht möglich. m Alterthume berühmte Aufgabe (τριχοτομία γωνίας) stammt unzweifelhaft nischen Schule. Hippias von Elis, ein Zeitgenosse des Sokrates, ist nach Proklos der Curve, der sogenannten Quadratix, durch welche die Drei- und Mehrtheilung ermöglicht wird. Näheres bezüglich Geschichte und Methoden der Trisection : Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik; Sutor, Geschichte der issenschaften. I. Bd.. und Klügel, Mathem. Wörterbuch, V. Bd.

$$u = \overline{DE}^2 \pi \,.\, EF + \tfrac{2}{3}\,\overline{DE}^2 \pi \,.\, AE,$$

oder da $DE = b \sin \varrho$, $AE = b \cos \varrho$ und $EF = a - 2b \,.\, \cos \varrho$,

$$u = \frac{b^2 \pi \,.\, \sin^2 \varrho}{3}(3a - 4b \,.\, \cos \varrho).$$

$$\sin^2 \varrho\,(3a - 4b \,.\, \cos \varrho) = \sin^2 \varrho_1 (3a - 4b) \,.\, \cos \varrho_1),$$

$$\frac{\sin^2 \varrho}{\sin^2 \varrho_1} = \frac{3a - 4b \,.\, \cos \varrho_1}{3a - 4b \,.\, \cos \varrho}$$

und ferner:

$$\frac{\sin^2 \varrho - \sin^2 \varrho_1}{\sin^2 \varrho_1} = \frac{4b(\cos \varrho - \cos \varrho_1)}{3a - 4b \,.\, \cos \varrho} \text{ oder}$$

$$\frac{4 \,.\, \sin \frac{\varrho + \varrho_1}{2} \cdot \cos \frac{\varrho - \varrho_1}{2} \cdot \sin \frac{\varrho - \varrho_1}{2} \cdot \cos \frac{\varrho + \varrho_1}{2}}{\sin^2 \varrho_1} = -\frac{8b \,.\, \sin \frac{\varrho + \varrho_1}{2}}{3a - 4b \,.\, \cos}$$

Kürzt man durch die gemeinschaftlichen Factoren ab und setzt $\varrho_1 =$

$$\frac{\cos \varrho}{\sin^2 \varrho} = -\frac{2b}{3a - 4b \,.\, \cos \varrho} \text{ oder } \cos^2 \varrho - \frac{a}{2b} \cdot \cos \varrho - \frac{1}{3} =$$

woraus sich $\cos \varrho = \frac{a}{4b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{16\,b^2} + \frac{1}{3}}$ ergibt.

Demnach $x = a - 2b \,.\, \cos \varrho = \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{4b^2}{3}}$.

Da für das obere Zeichen x negativ ausfallen würde, so ist:

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{4b^2}{3}}.$$

20. *Die Grundlinie und Höhe eines Dreieckes sind gegeben das Dreieck zu zeichnen, wenn die Summe der beiden andern Sei Minimum werden soll?*

Ist die Grundlinie des Dreieckes a, die beiden andern Seite b die Höhe h und die Winkel an der Grundlinie x und y, so ist:

$$u = h\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin y}\right).$$

Ferner ist $a = h(\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y)$. Man multipliciere die auf 0 reducrte Gleichung mit einem unbestimmten Factor λ und addiere sie zurers soll dann:

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin y} - \lambda(\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y)$$

ein Minimum werden. Wird y als constant angenommen, so mus

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin x_1} = \lambda(\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} x_1) \text{ oder}$$

$$\frac{\sin x_1 - \sin x}{\sin x \,.\, \sin x_1} = \frac{\lambda \,.\, \sin(x_1 - x)}{\sin x \,.\, \sin x_1} \text{ oder}$$

$$2\cos\frac{x_1+x}{2}\cdot\sin\frac{x_1-x}{2}=2\lambda\,.\,\sin\frac{x_1-x}{2}\cdot\cos\frac{x_1-x}{2}$$

$=\cos x$. Ebenso folgt für ein constantes x $\lambda=\cos y$, daher $x=y$, eck ist also gleichschenklig.

Existenz eines Minimums ergibt sich aus einer einfachen geometrischen ung. Lassen wir den einen Winkel an der Grundlinie von 180^0 bis men, so nimmt die Summe der beiden andern Seiten des Dreieckes o fortwährend ab und dann von einer gewissen Grenze an wieder zu o. Es muss daher ein Minimum existieren.

Es ist die grösste Ellipse zu bestimmen, die erhalten werden kann, m einen gegebenen geraden Kreiskegel durch eine Ebene schneidet.

der Winkel an der Spitze des Kegels 2α, der Neigungswinkel der ene gegen den senkrecht auf die Axe gelegten Schnitt ϱ, ferner die ng des einen Endpunktes der grossen Axe von der Spitze des Kegels $u=ab\pi$.

Gleichung des Schnittes lautet aber bekanntlich:

$$y^2=\frac{c\,.\cos(\varrho-\alpha)\,.\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}x-\frac{\cos(\varrho-\alpha)\,.\cos(\varrho+\alpha)}{\cos^2\alpha}x^2.$$

cheitelgleichung der Ellipse:

$$y^2=\frac{2b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

gt durch Vergleichung beider Gleichungen:

$$a=\frac{c\,.\sin 2\alpha}{2\cos(\alpha+\varrho)}\quad\text{und}\quad b^2=\frac{c^2\sin^2\alpha\,.\cos(\varrho-\alpha)}{\cos(\varrho+\alpha)}.$$

ist $u=\frac{\pi\,.\,c^2}{2}\sin\alpha\,.\sin 2\alpha\sqrt{\frac{\cos(\varrho-\alpha)}{\cos^3(\varrho+\alpha)}}$; es muss daher $\frac{\cos(\varrho-\alpha)}{\cos^3(\varrho+\alpha)}$ num werden.

$$\frac{\cos(\varrho-\alpha)}{\cos(\varrho_1-\alpha)}=\frac{\cos^3(\varrho+\alpha)}{\cos^3(\varrho_1+\alpha)}$$

Anwendung des schon oft gebrauchten Satzes:

$$\frac{\cos(\varrho-\alpha)-\cos(\varrho_1-\alpha)}{\cos(\varrho_1-\alpha)}=\frac{\cos^3(\varrho+\alpha)-\cos^3(\varrho_1+\alpha)}{\cos^3(\varrho_1+\alpha)}=$$

$$\frac{+\alpha)-\cos(\varrho_1+\alpha)]\,[\cos^2(\varrho+\alpha)+\cos(\varrho+\alpha)\,.\cos(\varrho_1+\alpha)+\cos^2(\varrho_1+\alpha)]}{\cos^3(\varrho_1+\alpha)}$$

$$\frac{-2\sin\left(\frac{\varrho+\varrho_1}{2}-\alpha\right)\sin\frac{\varrho-\varrho_1}{2}}{\cos(\varrho_1-\alpha)}=$$

$$\frac{\left(\frac{\varrho+\varrho_1}{2}+\alpha\right)\,.\,\sin\frac{\varrho-\varrho_1}{2}\,[\cos^2(\varrho-\alpha)+\cos(\varrho+\alpha)\,.\cos(\varrho_1+\alpha)+\cos^2(\varrho_1+\alpha)]}{\cos^3(\varrho_1+\alpha)}$$

Mithin $\frac{\sin(\varrho-\alpha)}{\cos(\varrho-\alpha)} = \frac{3\sin(\varrho+\alpha)\cos^2(\varrho+\alpha)}{\cos^3(\varrho+\alpha)}$ oder

$\operatorname{tg}(\varrho-\alpha) = 3\operatorname{tg}(\varrho+\alpha)$ oder $\operatorname{tg}(\varrho-\alpha) - \operatorname{tg}(\varrho+\alpha) = 2\operatorname{tg}(\varrho+$

$$-\frac{\sin 2\alpha}{\cos(\varrho+\alpha)\,.\,\cos(\varrho-\alpha)} = \frac{2\sin(\varrho+\alpha)}{\cos(\varrho+\alpha)},$$

woraus sich $\sin 2\varrho = 2\sin 2\alpha$ ergibt. Da $\sin 2\varrho < 1$ sein muss, $\sin 2\alpha < \frac{1}{2}$, daher $2\alpha < 30^0$, wenn ein Maximum existieren soll.

22. Zwei gegebene Strecken $OB = g$ und $OC = h$ bilden den Winkel δ; eine dritte Strecke ist um den Punkt O in der Eb drehbar. Wie gross sind die Winkel AOB und AOC, wenn da ABC ein Maximum ist.

Sei $\sphericalangle AOB = \pi$ und $AOC = \psi$, so ist:

$$u = \tfrac{1}{2}(g\,.\,h\sin\delta + fg\,.\,\sin\pi + fh\sin\psi),$$

und da $\psi = 360^0 - (\pi+\delta)$, so muss:

$$g\sin\pi - h\,.\,\sin(\pi+\delta)$$

ein Maximum werden.

$$g\sin\pi - h\,.\,\sin(\pi+\delta) = g\sin\pi_1 - h\,.\,\sin(\pi_1+\delta)$$

$$g(\sin\pi - \sin\pi_1) = h[\sin(\pi+\delta) - \sin(\pi_1+\delta)] \text{ oder}$$

$$2g\,.\,\cos\frac{\pi+\pi_1}{2}\,\sin\frac{\pi-\pi_1}{2} = 2h\cos\left(\frac{\pi+\pi_1}{2}+\delta\right)\sin\frac{\pi-\pi_1}{2}.$$

Kürzt man durch $\sin\frac{\pi-\pi_1}{2}$ ab und setzt $\pi_1 = \pi$, so ergibt sich:

$$(g - h\,.\,\cos\delta)\cos\pi = -h\,.\,\sin\pi\,.\,\sin\delta,$$

mithin $$\operatorname{tg}\pi = -\frac{g - h\,.\,\cos\delta}{h\,.\,\sin\delta}.$$

Fällt man $CE \perp OB$, so ist $OE = h\cos\delta$ und $BE = g - h\cos$, $CE = h\sin\delta$, daher $\operatorname{tg}(180^0-\pi) = \frac{BE}{CE}$. Nun ist aber $\frac{BE}{CE} = \operatorname{tg} BC$, $BCE = 180^0 - \pi$. Die beiden Dreiecke OEC und BOF haben daher zu gleich, mithin muss auch $\sphericalangle OFB = OEC$, demnach $OFB = 90^0$ sein; es us AO eine solche Lage haben, dass die Verlängerung senkrecht ste Verbindungslinie BC.

23. Drei Strecken $OA = f$, $OB = OC = g$ sind um eine gem liche durch O gehende Axe drehbar. Welche Winkel müssen die St paarweise bilden, damit die Fläche des Dreieckes ABC einen grö erreiche? *

* Diese und die vorangehende Aufgabe sind von Jettmar in Hoffmann's Zeschr den mathem.-naturw. Unterricht, Bd. XVII, gestellt.

$\sphericalangle BOC = \varphi$, $AOB = \xi$, so ist:

$$u = \tfrac{1}{2}\left[g^2 \sin\varphi + fg \,.\, \sin\xi + f \,.\, g \,.\, \sin\left[360^0 - (\varphi + \xi)\right]\right].$$

also die Function $g \sin\varphi + f \sin\xi - f \,.\, \sin(\varphi + \xi)$, welche zwei φ und ξ enthält, zu einem Maximum werden.

ien wir zunächst an, es sei ξ constant:

$$g \,.\, \sin\varphi - f \,.\, \sin(\varphi + \xi) = g \,.\, \sin\varphi_1 - f \,.\, \sin(\varphi_1 + \xi),$$

$$\cos\frac{\varphi + \varphi_1}{2} \cdot \sin\frac{\varphi + \varphi_1}{2} = 2f \cos\left(\frac{\varphi + \varphi_1}{2} + \xi\right) \sin\frac{\varphi - \varphi_1}{2},$$

$$\text{daher } g \,.\, \cos\varphi = f \,.\, \cos(\varphi + \xi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

constant und ξ variabel, so muss:

$$\sin\xi - \sin(\varphi + \xi) = \sin\xi_1 - \sin(\varphi + \xi_1)$$

slich

$$\cos\xi = \cos(\varphi + \xi) \text{ sein} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

) folgt $\xi + \varphi + \xi = 360^0$, daher $\xi = 180^0 - \frac{1}{2}\varphi$. Setzt man t in (a) ein, so folgt:

$$g \,.\, \cos\varphi = -f \,.\, \cos\frac{\varphi}{2}.$$

n beiderseits g und berücksichtigt, dass $1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{1}{2}\varphi$ ist, ch: $2g\cos^2\frac{1}{2}\varphi = g - f \,.\, \cos\frac{1}{2}\varphi$ und daraus:

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{-f \pm \sqrt{f^2 + 8g^2}}{4g}.$$

$> g$, so ist $\sqrt{f^2 + 8g} > 3g$; wird daher das untere Zeichen ge- ist der Zähler absolut grösser als $4g$, daher $\cos\frac{1}{2}\varphi > 1$, was :h ist. Es ist daher für $f > g$:

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{-f + \sqrt{f^2 + 8g^2}}{4g}.$$

egen $f < g$, so sind beide Werte zulässig und es treten in diesem Iaxima auf.

m die Brennpunkte A und B einer Ellipse sind mit gegebenen nd r Kreise beschrieben, welche innerhalb der Ellipse liegen; teren soll der Punkt P so bestimmt werden, dass die Summe i aus an die Kreise gelegten Tangenten ein Maximum wird.

an den Kreis A gelegte Tangente PC, die an B gelegte Tangente $A = x$, so ist, wenn a die grosse Halbaxe der Ellipse ist, $PB =$ nd

$$u = 2\left[\sqrt{x^2 - R^2} + \sqrt{(2a - x)^2 - r^2}.\right.$$

$$\sqrt{x^2 - R^2} + \sqrt{(2a - x)^2 - r^2} = \sqrt{x_1^2 - R^2} + \sqrt{(2a - x_1)^2 - r^2}$$

$$\sqrt{x^2 - R^2} - \sqrt{x_1^2 - R^2} = \sqrt{(2a - x_1)^2 - r^2} - \sqrt{(2a - x)^2 - r^2}.$$

Wenn wir nun diesen Ausdruck mit rationalem Zähler darstellen, fe
$x - x_1$ dividieren und $x_1 = x$ setzen, so erhalten wir:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - R^2}} = \frac{2a - x}{\sqrt{(2a - x)^2 - g^2}}.$$

Quadrieren wir diese Gleichung und wenden den in der Einleitung
Satz an, so ergibt sich:

$$R : r = x : 2a - x,$$

$$\text{oder } x = PA = \frac{2aR}{R + r} \text{ und } PB = \frac{2ar}{R + r}.*$$

Aus der Proportion $\frac{R}{x} = \frac{r}{2a - x}$ folgt $\sin CPA = \sin DPB$, d
$\measuredangle CPA = DPB$; die beiden Kreise erscheinen sonach von P aus un
Gesichtswinkeln.

25. Ueber der Centrale zweier Kugeln als Durchmesser is
einer der hindurchgehenden Ebenen ein Kreis beschrieben. V
Punkte dieses Kreises aus kann die grösste Summe der beiden Kg
übersehen werden?

Der gesuchte Punkt sei P, die beiden Kugelmittelpunkte A u
Radien der entsprechenden Kugeln r und R, der Durchmesser de
ferner $PA = x$, $PB = y$, so ist:**

$$u = 2\pi \left[R^2 + r^2 - \left(\frac{R^3}{x} + \frac{r^3}{y} \right) \right]$$

und da $y = \sqrt{c^2 - x^2}$ ist,

$$\frac{R^3}{x} + \frac{r^3}{\sqrt{c^2 - x^2}} = \frac{R^3}{x_1} + \frac{r^3}{\sqrt{c^2 - x_1^2}}$$

und nach Zusammenfassung der ähnlichen Glieder und Rationalmachung de

$$R^3 \frac{x_1 - x}{x x_1} = \frac{x_1^2 - x^2}{\sqrt{(c^2 - x^2)(c^2 - x_1^2)} \left[\sqrt{c^2 - x^2} + \sqrt{c^2 - x_1^2} \right]}.$$

Kürzt man durch $x_1 - x$ ab und setzt $x_1 = x$, so folgt:

$$x = \frac{R \cdot c}{\sqrt{R^2 + r^2}} \text{ und } y = \frac{rc}{\sqrt{R^2 + r^2}}.$$

Da für $x = 0$ und $x = c$ die Function $u = -\infty$ wird, o
einen gewissen zwischen 0 und c liegenden Wert von x die Funct
Maximum werden.

---

* Um die Lage von P zu finden, suche man den inneren Aehnlichkeitspunkt
Kreise E, errichte in E auf die grosse Axe ein Perpendikel, verbinde den Schn
Axe mit A und verlängere die Verbindungslinie bis zum Durchschnitt mit der
beschreibt man endlich von A aus mit dem Radius AF einen Kreisbogen, so
schnittspunkt mit der Ellipse der gesuchte Punkt P.

** Vergleiche I. Theil, pag. 46, Nr. 24.

Ein Kreis mit dem Radius r ist durch eine Sehne, welche den vom Mittelpunkt hat, durchschnitten; es ist ein möglichst grosses zu construieren, von welchem zwei Ecken auf dem Bogen des bschnittes, zwei auf der Sehne liegen.

die Grundlinie, y die Höhe des gesuchten Rechteckes, so ist $u = xy = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - x^2} - a$ ist,

$$u = \frac{x}{2}\sqrt{4r^2 - x^2} - ax.$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{4r^2 - x^2} - \frac{x_1}{2}\sqrt{4r^2 - x_1^2} = a(x - x_1) \text{ oder}$$

$$\frac{4r^2(x^2 - x_1^2) - (x^4 - x_1^4)}{x\sqrt{4r^2 - x^2} + x_1\sqrt{4r^2 - x_1^2}} = 2a(x - x_1).$$

$$\frac{2r^2 - x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = a \text{ und daraus:}$$

$$x^2 = \tfrac{1}{2}[4r^2 - a^2 \pm a\sqrt{8r^2 + a^2}] \text{ und}$$

$$y = \tfrac{1}{4}[\sqrt{8r^2 + a^2} - 4a \mp a].$$

$a = r$ $x = 0$ und $y = 0$ werden muss, so sind die untern Zeichen

istenz eines Maximums ist unmittelbar ersichtlich. Ist die Grund- suchten Rechteckes gleich der gegebenen Sehne, so ist die Höhe daher $u = 0$. Lässt man die Höhe zunehmen, so nimmt die ıb, und es nimmt der Inhalt des Rechteckes bis zu einer gewissen und von dieser Grenze an wieder ab, bis die Höhe des Rechteckes s Abschnittes erreicht, wobei der Inhalt desselben wieder 0 wird.

soll unter der Voraussetzung, dass $x > 0$ ist, derjenige Wert ht werden, der den Ausdruck: $u = x + \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$ zu einem der Minimum macht.

$$x + \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} = x_1 + \frac{1}{x_1} + \sqrt{x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}},$$

$$x - x_1 - \frac{x - x_1}{x x_1} = \sqrt{x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} =$$

$$= \frac{\frac{x^2 - x_1^2}{x^2 x_1^2} - (x^2 - x_1^2)}{\sqrt{x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}},$$

sdruck auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens mit ratio- dargestellt wird.

Dividiert man durch den gemeinschaftlichen Factor $x - x_1$ ... $x_1 = x$, so folgt:

$$1 - \frac{1}{x^2} = -x\frac{1 - \frac{1}{x^4}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}}.$$

Nun lässt sich durch $1 - \frac{1}{x^2}$ abkürzen, welcher Ausdruck die Wurzel ... liefert. Da aber nach der Voraussetzung $x > 0$ sein soll, so ist de... Wert $x = 1$. Nach erfolgter Verkürzung ergibt sich aus obiger ...

$$1 = -\frac{x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}},$$

welche Gleichung keinen brauchbaren Wert von x liefert. Um zu ... $x = 1$ die vorgelegte Function zu einem Maximum oder Minim... setzen wir:

$x = \frac{1}{2}$, dafür ist $u = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{17}) = 0{\cdot}4\ldots$
$x = 1$, „ „ $u = 2 - \sqrt{2} = 0{\cdot}6\ldots$
$x = \frac{3}{2}$, „ „ $u = \frac{1}{6}(13 - \sqrt{97}) = 0{\cdot}5\ldots$

Es ist also u für $x = 1$ ein Maximum.*

28. Man will zwei Punkte A und B, die zu beiden Seiten ei... kante eines Würfels in den Seitenflächen desselben liegen, durch ... die Kante herumgelegte Schnur mit einander verbinden. Die n... Abstände der Punkte A und B von der Seitenkante und von a... fläche des Würfels seien beziehungsweise a, a' und b, b'. In wel... liegt auf jener Kante derjenige Punkt, durch welchen die Schn... werden muss, damit sie möglichst kurz zu sein braucht?

Sei der gesuchte Punkt in der Seitenkante K und seine Entfern... der Grundfläche x, so ist:

$$u = AK + BK = \sqrt{a^2 + (x - a')^2} + \sqrt{b^2 + (b' - x)^2}.$$

Daher:

$$\sqrt{a^2 + (x - a')^2} - \sqrt{a^2 + (x_1 - a')^2} = \sqrt{b^2 + (b' - x_1)^2} - \sqrt{b^2 + (b' - x)^2}$$

$$\frac{(x^2 - x_1^2) - 2a'(x - x_1)}{\sqrt{a^2 + (x - a')^2} + \sqrt{a^2 + (x_1 - a')^2}} = -\frac{(x^2 - x_1^2) - 2b'(x - x_1)}{\sqrt{b^2 + (b' - x_1)^2} + \sqrt{b^2 - (b...}$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{x - a'}{\sqrt{a^2 + (x - a')^2}} = -\frac{x - b'}{\sqrt{b^2 + (b' - x)^2}} \text{ und } x = \frac{ab' + a'}{a + b}.$$

* Andere Methoden der Berechnung in Hoffmann's Zeitschrift für den ... Unterricht, XV. Band, pag. 282.

Innerhalb eines gegebenen Viereckes einen Punkt von der Beschaffenheit finden, dass die Summe der Quadrate der Entfernungen desselben von den Ecken desselben ein Minimum ist.

gegebene Viereck sei ABCD, der gesuchte Punkt O. Man ziehe
; wird nun AM = x, OM = y, AD = a, AB = b, BC = c genannt,

$$OA^2 = x^2 + y^2,\ OB^2 = (b-x)^2 + y^2;$$

man ferner CF und DE $\perp$ AB und durch O eine zu AB Parallele, in H und CF in G schneidet, so ist:

$$\overline{OC}^2 = OG^2 + CG^2 = (AF - AM)^2 + (CF - OM)^2 =$$
$$= (b - c \cdot \cos B - x)^2 + (c \cdot \sin B - y)^2;$$

$$\overline{OD}^2 = OH^2 + DH^2 = (x - a \cdot \cos A)^2 + (a \cdot \sin A - y)^2.$$

$$= x^2 + 2y^2 + (b-x)^2 + (b - c \cdot \cos B - x)^2 + (c \cdot \sin B - y)^2 +$$
$$+ (x - a \cdot \cos A)^2 + (a \cdot \sin A - y)^2.$$

e y constant an, so folgt:

$$x^2 + (b-x)^2 + (b - c \cdot \cos B - x)^2 + (x - a \cdot \cos A)^2 =$$
$$= x_1^2 + (b - x_1)^2 + (b - c \cdot \cos B - x_1)^2 + (x_1 - a \cdot \cos A)^2,$$

ler $4(x^2 - x_1^2) - 2b(x - x_1) - 2(b - c \cdot \cos B)(x - x_1) -$
$$- 2a \cdot \cos A (x - x_1) = 0;$$

$$x = \frac{2b + a \cdot \cos A - c \cdot \cos B}{4} = \frac{AB + AF + AE}{4}.$$

n dagegen x constant an, so erhält man ähnlich:

$$y = \frac{a \cdot \sin A + c \cdot \sin B}{4} = \frac{DE + CF}{4}.$$

laher die halbe Mittellinie des Trapezes DEFC. Um daher O zu iere man EF und errichte im Halbierungspunkte eine Senkrechte, n bis zum Durchschnitte mit der gegenüberliegenden Viereckseite Zieht man nun durch den Halbierungspunkt dieser Senkrechten undlinie Parallele, so enthält diese den Punkt O. Führt man die- uction für eine andere Seite als Grundlinie aus, so erhält man Gerade, welche O enthält. Der Durchschnittspunkt der beiden eraden ist dann der verlangte Punkt.

an soll innerhalb eines gegebenen Viereckes einen Punkt von der eit finden, so dass die Summe der Entfernungen desselben von ken ein Minimum ist.

man die Bezeichnungsweise der vorigen Aufgabe bei, so ist:

$$\sqrt{y^2} + \sqrt{(b-x)^2 + y^2} + \sqrt{(b - c\cos B - x)^2 + (c \sin B - y)^2} +$$
$$+ \sqrt{(x - a \cdot \cos A)^2 + (a \cdot \sin A - y)^2}.$$

Für ein constantes y erhält man:

$$\frac{x^2 - x_1^2}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x_1^2+y^2}} + \frac{(x^2 - x_1^2) - 2b(x - x_1)}{\sqrt{(b-x)^2+y^2}+\sqrt{(b-x_1)^2+y^2}} +$$

$$+ \frac{(x^2 - x_1^2) - 2(b - c.\cos B)(x - x_1)}{\sqrt{(b - c.\cos B - x)^2 + (c\sin B - y)^2} + \sqrt{(b - c.\cos B - x_1)^2 + (c.\sin B} +$$

$$+ \frac{(x^2 - x_1^2) - 2a.\cos A\,(x - x_1)}{\sqrt{(x - a.\cos A)^2 + (a.\sin A - y)^2} + \sqrt{(x_1 - a.\cos A)^2 + (a.\sin A - y}}$$

daher: $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x-b}{\sqrt{(b-x)^2+y^2}} + \frac{x - b + c.\cos B}{\sqrt{(b - c.\cos B - x)^2 + (c.\sin B}}$

$$+ \frac{x - a.\cos A}{\sqrt{(x - a.\cos A)^2 + (a.\sin A - y)^2}} = 0 \text{ oder}$$

$$\frac{AM}{AO} - \frac{BM}{OB} - \frac{OG}{OC} + \frac{OH}{OD} = 0.$$

Setzen wir $\sphericalangle AOM = \alpha$, $\sphericalangle MOB = \beta$, $\sphericalangle COG = \gamma$ und $\sphericalangle DH$ so geht die vorige Gleichung über in:

$$\sin\alpha - \sin\beta - \cos\gamma + \cos\delta = 0,$$

oder

$$\sin\alpha - \sin\beta = \cos\gamma - \cos\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Wird dagegen x constant angenommen, so ergibt sich die Beziehung

$$\frac{OM}{OA} + \frac{OM}{OB} - \frac{CG}{OC} - \frac{DH}{OD} = 0, \text{ oder}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta - \sin\gamma - \sin\delta \text{ oder}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = \sin\gamma + \sin\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Die Gleichungen (a) und (b) lassen sich auch in folgender Form schreiben:

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma+\delta}{2} \cdot \sin\frac{\delta-\gamma}{2} \quad . \quad .$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin\frac{\gamma+\delta}{2} \cdot \cos\frac{\delta-\gamma}{2} \quad . \quad .$$

woraus durch Division folgt:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\delta-\gamma}{2}, \text{ daher } \alpha - \beta = \delta - \gamma \quad . \quad .$$

Aus (c) ergibt sich ferner mit Benützung von (e):

$$\cos\frac{AOB}{2} = \cos\frac{COD}{2}, \text{ da } \gamma + \delta = 180^0 - COD,$$

daher $\sphericalangle AOB = COD$.

Auf dieselbe Weise kann, wenn z. B. c als Grundlinie angenommen nachgewiesen werden, dass $COB = AOD$ ist. Der Punkt O fällt also mit Durchschnittspunkt der Diagonalen zusammen.

. *Wie verhält sich die Höhe einer geraden Pyramide mit quadratischer ur Diagonale dieses Quadrates, wenn bei gegebenem Volum die Oberöglichst klein werden soll?*

die Seite des Quadrates y, die Höhe der Pyramide x, so ist:

$$u = y^2 + y\sqrt{4x^2 + y^2} \text{ und, da } V = \frac{xy^2}{3},$$

$$u = y^2 + \frac{1}{y}\sqrt{y^6 + 36V^2}.$$

$$y^2 + \frac{1}{y}\sqrt{y^6 + 36V^2} = y_1^2 + \frac{1}{y_1}\sqrt{y_1^6 + 36V^2},$$

$$y^2 - y_1^2 = \frac{y\sqrt{y_1^6 + 36V^2} - y_1\sqrt{y^6 + 36V^2}}{yy_1},$$

$$(y^2 - y_1^2)yy_1 = \frac{-y^2y_1^2(y^4 - y_1^4) + 36V^2(y^2 - y_1^2)}{y\sqrt{y_1^6 + 36V^2} + y_1\sqrt{y^6 + 36V^2}}.$$

rgibt sich:

$$y^2 = \frac{36V^2 - 2y^6}{2y\sqrt{y^6 + 36V^2}},$$

daher $y = \sqrt[6]{9/2\, V^2}$ und $x = \sqrt[3]{6V}$;

agonale des Quadrates $z = \sqrt[3]{6V}$ ist, so muss die Höhe der Pyramide Diagonale der Grundfläche sein.

Unter allen Kugelsectoren vom selben Inhalte $\frac{4\pi}{3}a^3$ *sollen diejenigen timmt werden, deren Oberfläche ein Maximum und ein Minimum wird.*

ler Radius der Kugel x, z der Halbmesser der Basis der Kugeld y die Höhe derselben, so ist:

$$u = 2\pi xy + z\pi x = \pi x(2y + z).$$

ber aus $\frac{2}{3}\pi x^2 y = \frac{4}{3}\pi a^3$ $y = \frac{2a^3}{x^2}$ folgt und $z = \sqrt{y(2x - y)} = \sqrt{x^3 - a^3)}$ ist, so ergibt sich:

$$u = \frac{2a\pi}{x}\left[2a^2 + \sqrt{a(x^3 - a^3)}\right].$$

$$\frac{1}{x}\left[2a^2 = \sqrt{a(x^3 - a^3)}\right] = \frac{1}{x_1}\left[2a^2 + \sqrt{a(x_1^3 - a^3)}\right],$$

$$2a^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_1}\right) = \frac{1}{x_1}\sqrt{a(x_1^3 - a^3)} - \frac{1}{x}\sqrt{a(x^3 - a^3)} =$$

$$= \frac{a^2x^2x_1^2(x_1 - x) + a^4(x_1^2 - x^2)}{x^2x_1^2\left[\frac{1}{x_1}\sqrt{a(x^3 - a^3)} + \frac{1}{x}\sqrt{a(x^3 - a^3)}\right]},$$

und wenn man durch $x_1 - x$ dividiert und $x_1 = x$ setzt: $2a = \frac{x^3 -}{2\sqrt{a}}$

oder $x^6 - 12a^3x^3 + 20a^8 = 0$.

Die Auflösung dieser Gleichung ergibt die Wurzeln: $x_1 = a\sqrt{}$ $x_2 = a\sqrt[3]{2}$; erstere erzeugt ein Maximum $u = a^2\pi\sqrt[3]{100}$, letztere ein $3a^2\pi\sqrt[3]{4}$.

Anhang.

Die Fermat'sche Methode.

In einigen Lehrbüchern und Aufgabensammlungen* ist folgende fahren angegeben, welches man mit Recht** die Fermat'sche M nennen kann:

Man setze in der gegebenen Function $x + h$ statt x, subtrahiere die ursprüngliche Function, dividiere die Differenz durch h und setze lich $h = 0$; die resultierende Gleichung, nach x aufgelöst, liefert welche die Function zu einem Maximum oder Minimum machen. E klar, dass dieses Verfahren im Grunde mit der Schellbach'schen coindiciert,*** so dass nichts im Wege stünde, die letztere auch Fe Methode zu nennen.

Ordnet man die Function, nachdem man die Substitution $x +$ vollführt hat, nach Potenzen der Grundzahl h, so ist ersichtlich, da Seite der auf 0 reducierten Bestimmungsgleichung für den gesuc von x in diesem Ausdrucke als Coëfficient von h erscheint. Da sich folgendes vereinfachte Verfahren: Man substituiere in die Function $x + h$ für x, ordne nach Potenzen von h und setze den Coeffi von h gleich 0. Die Wurzeln dieser Gleichung repräsentieren da suchten Werte. Es genügt also eigentlich aus der ganzen Entwicl Glied zu kennen, welches h in der ersten Potenz enthält.

Allerdings besitzt diese Methode den Vorzug der grössern All setzt aber voraus, dass man die Functionen in Form von unendlic darzustellen vermöge, eine Bedingung, welcher mit elementaren Hilf sowie sie die Mittelschule lehrt, in den seltensten Fällen entsprochen w

* Bardey, Arithmetische Aufgaben; G. Hoffmann, Anleitung zur Lösung p Aufgaben, Leipzig 1887.

** Vergl. I. Theil, pag. 12, Anmerkung.

*** Man ersetze h durch $x_1 - x$.

ı zu entscheiden, ob in einem gegebenen Falle ein Maximum oder ein n oder keines von beiden stattfinde, kann man sich einer geometrischen chung, wie sie in diesem Abschnitte bei einer Anzahl von Aufgaben lt wurde, bedienen, oder man schlägt folgendes arithmetisches Ver- ïn. Man verschaffe sich zwei entgegengesetzt gelegene Nachbarwerte ximums oder Minimums; diese werden erhalten, indem man in die $x = \xi \pm h$ einsetzt, worin ξ jenen Wert, welcher ein Maximum oder n hervorruft und h eine Grösse bedeuten soll, die man beliebig klein ann. Da man sich aber bereits zu einem andern Zwecke die Function h in eine nach Potenzen von h fortschreitende Reihe entwickelt hat, ht man blos in diese Entwicklung den Wert ξ statt x zu setzen und ler, welche h in ungeraden Potenzen enthalten, mit dem doppelten en $\pm$ zu versehen oder, was auf dasselbe hinauskommt, h von vorn- ls positive oder negative Grösse zu betrachten.

h einem bekannten mathematischen Satze* kann man in einer solchen enzen einer Grundzahl fortschreitenden Reihe die Grundzahl so klein dass der absolute Wert irgend eines Gliedes grösser wird, als die ller folgenden Glieder; es muss also auch das Vorzeichen dieses Gliedes der Summe aller nachfolgenden präponderieren. Sei dieses Glied dasjenige, welches h^2 enthält, so setzen sich die erwähnten Nachbar- s zwei Theilen zusammen, nämlich aus dem vermutheten Maximal- imalwert und, da nach dem Obigen das Glied mit h verschwindet, sdrucke, der das Zeichen des h^2-Gliedes trägt. Ist demnach das n dieses Gliedes positiv, so sind die Nachbarwerte grösser und es Minimum statt; ebenso weist ein negatives Vorzeichen dieses Gliedes Stattfinden eines Maximums hin.

—

weis des Satzes. Sei die betreffende Reihe

$$S = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots + a_{n-1} h^{n-1} + a_n . h^n + \ldots$$

ier $a_{n-1} h^{n-1}$ jenes Glied, dessen absolutet Wert der Behauptung nach grösser sein Summe der absoluten Werte aller folgenden Glieder.

e Coëfficienten a_0, a_1 ... endliche Zahlen sind, so muss der Coëfficient eines der $^{-1}$ folgenden Glieder entweder der grösste von allen oder mindestens nicht kleiner rn sein; dieser Coëfficient sei A.

man nun h so bestimmen, dass:

$$a_{n-1} h^{n-1} > A h^n + A h^{n+1} + A h^{n+2} + \ldots \text{ ist,}$$

Satz offenbar erwiesen.

ieser Ungleichung folgt aber:

$$a_{n-1} h^{n-1} > A h^n (1 + h + h^2 + \ldots) \text{ oder}$$

$$a_{n-1} > A . h . \frac{1}{1-h},$$

: h einen echten Bruch wählen. Daraus ergibt sich aber:

$$h < \frac{a_{n-1}}{a_n + A}.$$

Es kann der Fall eintreten, dass der Coëfficient von h^2 oder noch Potenzen für $x = \xi$ verschwindet; in diesem Falle ist das erste r schwindende Glied in Betracht zu ziehen; enthält dasselbe h in ein mit ungeradem Exponenten, so ist wegen des doppelten Vorzeichens Nachbarwert grösser, der andere kleiner als das vermeinte Maxim Minimum; es findet dann weder ein Maximum noch ein Minimum st hält dagegen das erste nicht verschwindende Glied h in gerader P deutet ein positives Vorzeichen dieses Gliedes auf ein Minimum, ein auf ein Maximum.*

---

1. *Für welche Werte von x wird die Function:* $u = 2x^3 - 3x^2 - 1$ *ein Maximum oder Minimum?*

Es ist $$u_1 = 3(x+h)^3 - 3(x+h)^2 - 12(x+h) + 5 =$$
$$= u + 6(x^2 - x - 2)h + 3(2x - 1)h^2 + 2h^3.$$

Für $x^2 - x - 2 = 0$ ist $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, für welche Werte die Fu Werte -15, beziehungsweise 12 annimmt. Der Coëfficient von h^2 v den erstern Wert 9, für den letztern -9, daher in jenem Falle ein in diesem ein Maximum stattfindet.

Probe:

x	u		x	u	
1	-8		0	5	
2	-15,	daher ein	-1	12,	daher ein
3	-4	Minimum.	-2	1	Maximum.

2. $$u = \frac{x^2+7}{3-x}.$$

$$u_1 = \frac{(x+h)^2+7}{3-x-h} = \frac{(x^2+7)+2x.h+h^2}{(3-x)-h},$$

und durch wirkliche Ausführung der Division:

$$u_1 = u + \frac{6x^2-x+7}{(3-x)^2}h + \frac{16}{(3-x)^3}h^2 + \ldots$$

Aus $\frac{6x^2-x+7}{(3-x)^2} = 0$ folgt: $x_1 = 7$, $x_2 = -1$.

Für $x_1 = 7$ wird der Factor von h^2 negativ, daher u ein Maxim $x_2 = -1$ positiv, daher u ein Minimum.

---

* Man ersieht, dass sich die ganze Methode der Bestimmung der Werte wel Maximum oder Minimum erzeugen, sowie die Art und Weise der Entscheidung, ob e Ma oder Minimum stattfindet, mit dem Verfahren der Differentialrechnung deckt; die coëff von h, h^2, ... sind nichts anderes als die Differentialquotienten der ersten und höh nungen der gegebenen Function nach der Veränderlichen x.

)e:

x	u
6	$-14\frac{1}{3}$
7	-14
8	$-14\frac{1}{5}$

, daher ein Maximum.

x	u
0	$2\frac{1}{3}$
-1	2
-2	$2\frac{1}{5}$

, daher ein Minimum.

$$u = x + \sqrt{11 - 2x}.$$

$$(x+h) + \sqrt{(11-2x) - 2h} = u + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{11-2x}}\right)h - \frac{h^2}{2\sqrt{(11-2x)^3}} \cdots,$$

urch Ausziehung der Wurzel oder durch die Anwendung des bino-ehrsatzes ergibt.

$-\frac{1}{\sqrt{11-2x}} = 0$ folgt: $x = 5$, da für diesen Wert der Coëfficient gativ wird, so existiert ein Maximum.

:

x	u
$5\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$
5	6
4	2·3

$$u = 4x - \sqrt{24x - 63 - 2x^2}.$$

$$u_1 = 4(x+h) - \sqrt{24(x+h) - 63 - 2(x+h)^2} =$$

$$= 4x + 4h - \sqrt{(24x - 63 - 2x^2) - 4h(x-6) - 2h^2}.$$

lung des binomischen Lehrsatzes ergibt sich als Coëfficient von h:

$$4 + \frac{2(x-6)}{\sqrt{24x - 63 - 2x^2}}$$

fficient von h^2:

$$\frac{1}{\sqrt{24x - 63 - 2x^2}}\left[1 + \frac{2(x-6)^2}{24x - 36 - 2x^2}\right].$$

nan den Coëfficienten von h gleich 0 und löst die resultierende ach x auf, so ergeben sich als Wurzeln: $x_1 = 8$ und $x_2 = 4$. Die genügt der Gleichung aus der sie gewonnen wurde nur dann, wenn ien des Gliedes $\frac{2(x-6)}{\sqrt{24x - 63 - 2x^2}}$ negativ genommen wird,* wäh-

I. Theil, pag. 37.

rend die Wurzel x_2 genügt, wenn das positive Vorzeichen gewählt wi
Vorzeichen $\mp$ entsprechen im zweiten Gliede der vorgelegten Fu
Zeichen $\pm$. Der Coëfficient von h^2 ist für diese Fälle mit dem Vo
zu versehen.

Wählt man also das Vorzeichen — und setzt $x_1 = 8$, so er
Coëfficient von h^2 negativ; es wird also die Function:

$$u = 4x + \sqrt{24x - 63 - 2x^2}$$ für $x = 8$ ein Maximum

und ebenso:

$$u = 4x - \sqrt{24x - 63 - 2x^2}$$ für $x = 4$ ein Minimum.

5. *Wenn die Formel* $s = -\frac{1}{6}(5x^3 + 84x^2 - 3179x - 7$
sich durch Schiessversuche innerhalb der Grenzen 600 m bis 2
geben hat, auch für Werte ausserhalb dieser Grenzen Geltung
für welchen Wert von x (dem 24fachen der Elevation in $\frac{1}{16}$ *Gra*
ein Maximum für s statt und wie gross ist die zugehörige Schs

$$u = 5x^3 + 84x^2 - 3179x - 768$$

$$u_1 = 5(x+h)^3 + 84(x+h)^2 - 3179(x+h) - 768 =$$
$$= u + (15x^2 + 168x - 3179)h + (15x + 84)h^2 + 5h^3$$

Aus $15x^2 + 168x - 3179 = 0$ folgt angenähert $x = 10$, da
Wurzel auszuschliessen ist, mithin $10 = {}^{16}\!/_{24}$, daher $e = 15^0$ un
hörige Schussweite $u = 3193$ m. Mit Berücksichtigung von $s =$
scheint der Coëfficient von h^2 negativ, daher die Schussweite
Maximum ist.

6. $u = x^m(a-x)^n$.

Setzt man $x + h$ für x, so ergibt sich

$$(x+h)^m(a-x-h)^n = \left[x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}h^2 - \right.$$

$$\left.\left[(a-x)^n - n(a-x)^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}(a-x)^{n-2}h^2 \ldots\right]\right.$$

In dem nach h geordneten Producte erscheint als Coëfficient von
$$mx^{m-1}(a-x)^n - nx^m(a-x)^{n-1}$$

und als Coëfficient von h^2:

$$\frac{n(n-1)}{2}x^m(a-x)^{n-2} + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}(a-x)^n - mnx^{m-1}(a-x)$$

$$= \frac{x^{m-2}(a-x)^{n-2}}{2}[n(n-1)x^2 + m(m-1)(a-x)^2 - 2mnx^1$$

---

* Hermes, Sammlung mathem. Aufgaben, II. Theil.

der Coëfficient von h gleich 0 gesetzt, so folgt:

$$x = \frac{ma}{m+n},$$

n Wert $u = \frac{m^m n^n . a^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}$ wird.

man in den Coëfficienten von h^2 den gefundenen Wert von x ein, sich:

$$\frac{m^{m-2} n^{n-2} a^{m+n-4}}{(m+n)^{m+n-4}} \cdot \frac{mn a^2}{(m+n)^2} [(n-1)m + (m-1)n - 2mn] =$$

$$= - \frac{\frac{1}{2} m^{m-1} n^{n-1} a^{m+n-2}}{(m+n)^{m+n-3}},$$

Maximum.

m welchem Punkte der Hypotenuse AC des rechtwinkligen Drei- muss man auf die Katheten Perpendikel fällen, damit bei der g des Dreieckes ABC um die Kathete AB das entstandene Recht- Cylinder beschreibt, a) dessen Volum, b) dessen Oberfläche ein ist?

der gesuchte Punkt P, ist ferner AC = c, AB = b, BC = a, PC = x, Perpendikel aus P auf BC = y, auf AB = z, so ist:

$$u = \pi y z^2 = \frac{a^2 b}{c^3} \pi x (c-x)^2.$$

$$(x+h)(c-x-h)^2 = x(c-x)^2 - (c-x)(3x-c)h +$$
$$+ (3x-2c)h^2 + h^3.$$

aher $3x - c = 0$ oder $x = \frac{1}{3} c$ sein.

man diesen Wert in den Coëfficienten von h^2 ein, so folgt:

$$c - 2c = -c,$$

it dieser Wert die Function zu einem Maximum.

$$u = 2\pi z(y+z) = \frac{2\pi a}{c^2} (c-x)[ac - (a-b)x].$$

$$[(c-x)-h][ac-(a-b)x-(a-b)h] =$$
$$\cdot x)[ac-(a-b)x] - [2ac - bc - 2x(a-b)] . h + (a-b)h^2.$$

den Coëfficienten von h gleich 0, so folgt

$$x = \frac{(2a-b)c}{2(a-b)}.$$

m Coëfficienten von h^2 ist ersichtlich, dass für $a > b$ ein Minimum $< b$ ein Maximum stattfindet.

n einem gleichschenkligen Trapez sei die eine der parallelen Seiten nicht parallelen Seiten b gegeben. Wie gross muss die andere gewählt werden, wenn der Flächeninhalt des Trapezes ein sein soll?

Man findet für den Inhalt des Trapezes:

$$u = \frac{a+x}{4}\sqrt{4b^2-(x-a)^2}, \text{ daher}$$

$$u^2 = {}^1/_4\,[8ab^2x + (4b^2+2a^2)x^2 - x^4].$$

Um zu finden, für welche Werte der Ausdruck innerhalb der K Maximum wird, setzen wir $x+h$ statt x. Nach Substraction de lichen Ausdruckes ergibt sich:

$$[8ab^2 + (4b^2+2a^2)2x - 4x^3]h + [4b^2+2a^2-4x^2]h^2 - \dots$$

Setzt man den Coëfficienten von h gleich 0, so folgt die Gle

$$x^3 - (2b^2+a^2)x - 2ab^2 = 0.$$

Es ist sofort ersichtlich, dass eine Wurzel dieser Gleichung $x = \dots$ aber nicht brauchbar ist. Durch Division des Gleichungstrinom d Wurzelfactor $x+a$ erhält man die quadratische Gleichung:

$$x^2 - ax - 2b^2 = 0,$$

deren Auflösung die Wurzeln $x = {}^1/_2\,[a \pm \sqrt{a^2+8b^2}]$ gibt.

Da für das untere Zeichen x negativ würde, so ist:

$$x = {}^1/_2\,[a+\sqrt{a^2+8b^2}] \text{ zu wählen.}$$

Substituiert man diesen Wert in den Coëfficienten von h^2, so ist:

$$4b^2+2a^2-4x^2 = 4b^2+2a^2-2a^2-8b^2-2a\sqrt{a^2+8b^2}$$
$$= -4b^2-2a\sqrt{a^2+8b^2}$$

negativ, daher der Inhalt des Trapezes für diesen Wert von x ein M

9. *Welche von den Kugeln, die man um einen Punkt in de einer Kugel construieren kann, hat innerhalb der gegebenen K grösste Calotte?*

Sei der Radius der gegebenen und der gesuchten Kugel bezi r und x und die Höhe der Calotte y, so ist:

$$u = 2\pi x \,.\, y = 2\pi x\left(x - \frac{x^2}{2r}\right) = \frac{\pi}{r}x^2(2r-x),$$

$$(x+h)^2(2r-x-h) = x^2(2r-x) + (4rx-3x^2)h -$$
$$+ (2r-3x)h^2 - h^3,$$

daher $4rx - 3x^2 = 0$, woraus $x = {}^4/_3\,r$ sich ergibt.

Für diesen Wert wird der Coëfficient von h^2:

$$2r - 3x = -2r,$$

mithin findet ein Maximum statt.

10. *Es sollen in ein regelmässiges Tetraeder gerade Keg s schrieben werden, dass die Spitzen derselben im Fusspunkte in liegen und die Axen mit dem untern Theil der Höhe zusa me a) Welcher Kegel hat den grössten Inhalt? b) Welcher den grös*

die Seite des gegebenen Tetraeders a, die Höhe desselben $b = a\sqrt{2/3}$,
ung der Kegelbasis, deren Radius ϱ sei, von der Spitze des Tetraeders
Seite des Schnittes der Kegelbasis mit dem Tetraeder z, so ist:

$z = \frac{a}{b}x$, ferner $\varrho = \frac{z}{6}\sqrt{3}$, daher $u = \frac{\pi x^2}{24}(b - x)$.

:uiert man in $x^2(b-x)$ für x $x+h$, so folgt:

$(b-x-h) = x^2(b-x) + (2bx - 3x^2)h + (b-3x)h^2 - h^3$,

nan $2bx - 3x^2 = 0$ setzt, $x = \frac{2}{3}b$.

:in Maximum existiert, geht daraus hervor, dass der Inhalt des
die Grenzen: Höhe des Kegels $= b$ und $= 0$ verschwindet.
ergibt sich die Existenz eines Maximums aus dem Umstande, dass
:nt von h^2 für $x = \frac{2}{3}b$ negativ wird.

st $u = \frac{\pi x}{8}\sqrt{9x^2 - 16bx + 8b^2}$, daher

$[9(x+h)^2 - 16b(x+h) + 8b^2] = x^2(9x^2 - 16bx + 8b^2) +$
$8bx^2 + 16b^2x)h + (54x^2 - 48bx + 8b^2)h^2 + (36x - 16b)h^3 + 9h^4$.
$- 48bx^2 + 16b^2x = 0$ oder $4x(3x - 2b)^2 = 0$ folgt $x = \frac{2}{3}b$.
:sen Wert wird der Coëfficient von h^2 0, während der Coëfficient
ird, daher die Function weder ein Maximum noch ein Minimum besitzt.

soll unter allen möglichen geraden Pyramiden, deren Grund-
atisch und deren Seitenflächen eine Summe von gegebener Grösse
iejenige bestimmt werden, deren Volum ein Maximum ist. Ferner
len möglichen geraden Pyramiden, deren Grundfläche quadratisch
olum a^3 ist, diejenige bestimmt werden, von welcher die Summe
:hen ein Minimum ist.

eine Grundkante der Pyramide x, die Höhe derselben y, so ist
)der wegen $x\sqrt{4y^2 + x^2} = a^2$:

$$u = \tfrac{1}{6}x\sqrt{a^4 - x^4}.$$

r gegebenen Regel erhält man, wenn man $x^2 = z$ setzt:
$[a^4 - (z+h)^2] = (a^4 - z^2)z - (3z^2 - a^4)h - 3zh^2 - h^3$.

er $3z^2 - a^4 = 0$ sein, woraus $z = \frac{a^2}{\sqrt{3}}$ und $x = \frac{a}{\sqrt[4]{3}}$ folgt; ferner

$\frac{a}{2}$ und die Seitenkante der Pyramide $\frac{a}{\sqrt[4]{3}}$; die gesuchte Pyramide
die Hälfte eines regulären Octaeders.
Coëfficient von h^2 negativ ist, so ist die betreffende Pyramide
.

t $u = x\sqrt{4y^2 + x^2}$ und da $\frac{x^2y}{3} = a^3$ ist,

$$u = \frac{1}{x}\sqrt{36a^6 + x^6}.$$

Setzt man wiederum $x^2 = z$ und führt $z + h$ für z ein, so folgt:

$$\frac{36a^3}{z+h} + (z+h)^2 = \frac{36a^6}{z}\left(1 - \frac{h}{z} + \frac{h^2}{z^2} - \frac{h^3}{z^3} + \ldots\right) + z^2 + 2hz -$$

$$= \frac{36a^6}{z} + z^2 + 2\left(z - \frac{18a^6}{z^2}\right)h + \left(1 + \frac{36a^6}{z^3}\right)h^2 + \ldots$$

und wenn man $z - \frac{18a^6}{z^2} = 0$ setzt,

$$z = a^2\sqrt[3]{18}, \text{ daher } x = a\sqrt[6]{18} \text{ und } y = a\sqrt[3]{3/2},$$

daher die Seitenkante $a\sqrt[6]{18}$, mithin auch diese Pyramide die H regulären Octaeders ist.

Der Coëfficient von h^2 wird für den gefundenen Wert $= 3$, l Minimum stattfindet.

12. In einen gegebenen geraden Kegel soll ein solcher Kug gezeichnet werden, dass a) das Volum, b) die krumme Oberfläch am grössten ist.

Sei (I. Theil Fig. 19) die Höhe des gegebenen Kegels p, der Gru radius r und die Seite desselben s, ferner x der Radius der Kugel, u die gesuchte Calotte gehört und y die Höhe derselben, so ist:

$$u = \tfrac{1}{3}\pi y^2(3x - y).$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke EFD und EHC folgt:

$$EC : CH = EF : FD \text{ oder}$$

$$(p - y + x) : x = s : r \text{ oder } (p - y) : x = (s - r) : r,$$

$$\text{daher } x = \frac{r(p-y)}{s-r}, \text{ mithin:}$$

$$u = \tfrac{1}{3}\pi y^2\left[\frac{3r(p-y)}{s-r} - y\right] = \frac{(2r+s)\pi}{3(s-r)}y^2\left[\frac{3rp}{2r+s} - \right].$$

Setzen wir der Kürze halber $\frac{3rp}{2r+s} = a$, so ist weiter:

$$(y+h)^2(a - y - h) = y^2(a - y) + (2ay - 3y^2)h + (a - 3)h$$

Aus $2ay - 3y^2 = 0$ ergibt sich $y = \frac{2}{3}a = \frac{2rp}{2r+s}$. Da für = Coëfficient von h^2 $-a$ wird, so ist u für diesen Wert ein Maximum.

Für den Abstand des Mittelpunktes der Kugel von der Basi de erhält man:

$$y - x = \frac{rp(s - 2r)}{(s-r)(s+2r)}.$$

$= 2r$ ist $y - x = 0$, die Calotte geht demnach in eine Halbkugel
$\gtrless 2r$ ist $y \gtrless x$, daher die Calotte grösser beziehungsweise kleiner
lbkugel.

$$u = 2\pi xy = \frac{2r\pi}{s-r} y(p-y);$$

$$(y+h)(p-y-h) = y(p-y) + (p-2y)h - h^2.$$

fficient von h^2 negativ ist, findet ein Maximum statt und zwar für
), oder $y = \frac{1}{2}p$.

nter allen Kugelsectoren vom kubischen Inhalt a^3 denjenigen zu dessen Oberfläche ein Maximum oder Minimum wird.

met x den Kugelradius und y die Höhe der zugehörigen Calotte, so ist:

$$u = 2\pi xy + \pi x \cdot \sqrt{y(2y-y)}.$$

$\frac{2\pi x^2 y}{3} = a^3$, daher $x^2 y = \frac{3a^3}{2\pi}$. Nun kann man auch schreiben:

$$u = \pi xy\left[2 + \sqrt{\frac{2x}{y} - 1}\right].$$

wir der Kürze halber $\frac{3a^3}{2\pi} = b^3$, so folgt für:

$$xy = \frac{x^2 y}{x} = \frac{b^3}{x} \text{ und } \frac{x}{y} = \frac{x^3}{x^2 y} = \frac{x^3}{b^3}$$

ir endlich noch $\frac{x}{b} = z$ substituieren:

$$u = \frac{\pi b^2}{z}[2 + \sqrt{2z^3 - 1}.]$$

t also:

$$\frac{1}{z+h}[2 + \sqrt{2(z+h)^3 - 1}] =$$

$$\left. - \frac{h}{z^2} + \frac{h^2}{z^3} \cdots \right)\left[2 + \sqrt{2z^3 - 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6z^2 h + 6zh^2 + 2h^3}{\sqrt{2z^3 - 1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{8} \cdot \frac{(6z^2 h + 6zh^2 + 2h^3)^2}{\sqrt{(2z^3 - 1)^3}} \cdots \right].$$

fficient von h lautet:

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{3z^2}{\sqrt{2z^3 - 1}} - \frac{1}{z^2}(2 + \sqrt{2z^3 - 1}).$$

enselben 0, so ergibt sich daraus:

$$\frac{3z^3}{\sqrt{2z^3 - 1}} = 2 + \sqrt{2z^3 - 1}$$

an $\sqrt{2z^3 - 1} = t$ setzt:

$$t^2 - 4t - 3 = 0,$$

woraus $t = 2 \pm 1$ und $z_1 = \sqrt[3]{5}$, $z_2 = 1$ folgt.

Der Coëfficient von h^2 ist:

$$\frac{1}{z^3}(2 + \sqrt{2z^3 - 1}) - \frac{9z^3}{2\sqrt{(2z^3-1)^3}}.$$

Für $z_1 = \sqrt[3]{5}$ oder $x_1 = a\sqrt[3]{\frac{15}{2\pi}}$ ist dieser Coëfficient $+\frac{1}{6}$, mi

für diesen Wert ein Minimum statt; für $z_1 = 1$ oder $x_1 = a\sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}$ ist der

daher die Oberfläche für diesen Wert ein Maximum wird. Im er

ist die zugehörige Höhe der Calotte $y_1 = \frac{1}{5}x_1$, im letztern $y_1 = x$

Kugelsector ist die Halbkugel.

14. *Ein Lichtstrahl komme aus einem Medium, in welchem li pflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes c ist, in ein anderes, in weh selbe c_1 ist. Nach welchem Gesetze wird der Lichtstrahl im zweite abgelenkt, wenn der Weg in der kürzesten Zeit zurückgelegt werd*

Sei der Weg des Lichtes im ersten Medium SA, im zweit ferner die Trennungsfläche MN. Man ziehe nun durch A eine Sen die Trennungsfläche (das Einfallsloth), ferner fälle man von S un rechte auf MN, nämlich SB und SC. Es ist dann, wenn $BC = c$ $S'B = b$ und $AB = x$ gesetzt wird:

$$u = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c_1}.$$

Es ist nun:

$$c_1\sqrt{a^2 + (x+h)^2} + c\sqrt{b^2 + (d-x-h)^2} =$$

$$= c_1\sqrt{(a^2 + x^2) + (2hx + h^2)} + c\sqrt{[b^2 + (d-x)^2] - [2h(d-x)}$$

und mit Anwendung des binomischen Lehrsatzes:

$$= c_1[(a^2 + x^2)^{1/2} + \tfrac{1}{2}(a^2 + x^2)^{-1/2}(2hx + h^2) - \tfrac{1}{8}(a^2 + x^2)^{-3/2}(2h +$$
$$+ c\{[b^2 + (d-x)^2]^{1/2} - \tfrac{1}{2}[b^2 + (d-x)^2]^{-1/2}[2h(d-x) - h^2]$$
$$- \tfrac{1}{8}[b^2 + (d-x)^2]^{-3/2}[2h(d-x) - h^2]^2 - \ldots\}.$$

In dieser Reihe lautet der Coëfficient von h:

$$\frac{c_1 x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c(d-x)}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

und der Coëfficient von h^2:

---

* Die geradlinige Fortpflanzung des Lichtes im homogenen Medium, die effe Brechung sind alle drei Folgen eines und desselben Gesetzes, nämlich das Lic von einem Punkte zu einem andern zu gelangen, den in der kürzesten Zeit zurückgeba

$$\frac{}{+x^2}\left[1-\frac{x^2}{a^2+x^2}\right]+\frac{1}{2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}\left[1-\frac{(d-x)^2}{b^2+(d-x)^2}\right]=$$

$$=\frac{a^2}{2\sqrt{(a^2+x^2)^3}}+\frac{b^2}{2\sqrt{b^2+(d-x)^2}},$$

usdruck positiv ist, mithin findet ein Minimum statt. Der Wert lcher dasselbe hervorruft, ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{c_1 x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{c(d-x)^2}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}},$$

wir den Winkel zwischen dem Einfallsloth und dem Strahl SA den Winkel zwischen dem Einfallsloth und AS' mit β bezeichnen:

$$c_1 \cdot \sin\alpha = c \cdot \sin\beta,$$

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{c}{c_1}$, das bekannte Brechungsgesetz folgt.

---

en in der Bezeichnungsweise möge der Mangel an den entsprechenden Typen entschuldigen.)

Schulnachrichten.

I. Lehrpersonale.

ıe und Charakter des Lehrers	Ertheilt Unterricht			Anmerkung
	Lehrfach	Classe	Stundenzahl wöchentlich	
gerbauer Jos., tor u. Schulrath	Mathematik	VI.	5	
rben Anton, Professor	—	—	—	Als k. k. Bezirks-Schulinspector dauernd beurlaubt
merer Friedr., Professor	Mathematik, Darstellende Geometrie	VII. IV.—VII.	17	Ordinarius VII.
ger Eberhard, Professor	Mathematik, Chemie, analyt. Chemie	III., IV. IV.—VI.	18	
ller Johann, Professor	Mathematik, Physik	V. III., IV., VI., VII.	18	Custos der Lehrerbibliothek Ordinarius V.
stner Carl, Professor	Mathematik, Naturgeschichte	II. I., II., V.—VII.	17	
rk Johann, Professor	Geographie und Geschichte	I., III., IV., V., VII.	17	
s Hermann, Professor	Mathematik, Geom. Zeichnen, Freihandzeichnen, Schönschreiben	I. II. II., IV., VI. I., II.	18	Ordinarius II.
n Johann, Professor	Deutsch, Geogr. u. Gesch.	V.—VII. II., VI.	16	Custos d. Schüler-bibliothek d. O.-R. Ordinarius VI.

Nro.	Name und Charakter des Lehrers	Ertheilt Unterricht			Anm
		Lehrfach	Classe	Stundenzahl wöchentlich	
10	Czerny Julius, Professor	Geom. Zeichnen, Freihandzeichnen, Modellieren	III. I., III., V., VII.	22	Ordin
11	Baudisch Johann, Professor	Französisch, Englisch	VI., VII. V.—VII.	15	
12	Adametz Josef, Professor	Deutsch, Französisch	I., III. I., III.	17	Ordin
13	Dr. Daxberger Osw., Religionslehrer	Religionslehre	I.—VII.	14	Cus Schül der U
14	Sturm Johann, prov. Oberreallehrer	Deutsch, Französisch	II., IV. II., IV., V.	16	Ordi
15	Protze Moriz, Vereinsturnlehrer	Turnen	I.—VII.	12	
16	Hupfauf Joh. Peregr. Domchordirector	Gesang	2 Abth.	4	
17	Schuhmeister Josef, Profess. a. d. L.-B.-A.	Stenographie	1. Abtheil.	2	

Anmerkung. Den evangelischen Religionsunterricht ertheilte Herr Heinrich Aumüller.

II. Lehrplan pro $18^{89}|_{90}$.

tunden-Uebersicht nach dem Normal-Lehrplane der Realschule.

ehrfach	Zahl der wöchentlichen Stunden in jeder Classe							Summe	Anmerkung
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.		
n	2	2	2	2	2	2	2	14	Als unobligate Gegenstände werden eventuell gelehrt: Gesang, Stenographie, analytische Chemie, Modellieren.
ie Sprache . .	4	3	4	3	3	3	3	23	
ische Sprache .	5	4	4	3	3	3	3	25	
he Sprache . .	—	—	—	—	3	3	3	9	
hie	3	2	2	2	—	—	—	9	
hte	—	2	2	2	3	3	3	15	
atik	3	3	3	4	5	5	5	28	
schichte . . .	3	3	—	—	3	2	3	14	
. . . . .	—	—	3	3	—	3	4	13	
. . . . .	—	—	—	3	3	3	—	9	
isches Zeichnen	—	3	3	3	—	—	—	9	
nde Geometrie	—	—	—	—	3	3	3	9	
lzeichnen . . .	6	4	4	4	4	2	3	27	
n	1	1	—	—	—	—	—	2	
. . . . .	2	2	2	2	2	2	2	14	
Wöchentlich	29	29	29	31	34	34	34	220	

rkung. Der ausführliche Normal-Lehrplan selbst, der in allen seinen gen durchgeführt wird, kann aus dem vom hohen k. k. Ministerium und Unterricht herausgegebenen Verordnungsblatte (1879, Nr. 22, 380, Nr. 13, pag. 46 und 1881, pag. 32) ersehen werden.

III. Themata

zu den schriftlichen Arbeiten aus der deutschen Sprache.

(* Hausarbeiten.)

V. Classe: 1. Die Sage von Kaiser Carl dem Grossen als salz
Ortssage.* 2. Not entwickelt Kraft. 3. Durch Geduld und Stetigkeit
Seidenwurm zum Seidenkleid.* 4. Im Glücke nicht vermessen, im
nicht verzagt. 5. Ueber den Nutzen des Eisens.* 6. Es ist nic
Gold, was glänzt.* 7. Ueber die Kriegführung der alten Griechen.*
und Lykurgs Grundsätze in Bezug auf die Erziehung der Jugend.
gesellige Leben der Griechen (dargestellt aus Homers Dichtungen.)
historische Bedeutung der Thermopylen.* 11. „Zwischen heut' und mo
eine lange Frist; lerne schnell besorgen, da du noch munter bist." 1
Vorzüge hat die gemässigte Zone?* 13. Die Sage vom Watzmann.*
Rose ohne Dornen. 15. Unterschiede der epischen und lyrischen D

VI. Classe: 1. Welche Gefühle erweckt der Herbst im merc
Gemüte?* 2. Wodurch wird das Klima eines Landes bedingt?* 3. a
im Haushalte der Natur.* 4. Die Schulen zur Zeit Carls des Grossen.*
aber triumphiere nicht.* 6. Aufforderung zur Theilnahme an einer Ip
um die Erde. 7. Pläne und Ziele der hohenstaufischen Kaiser. 8. Vlc
Nibelungenliede erwähnten Personen haben eine historische Bedeut
9. Nibelungen und Gudrun (Aehnlichkeiten und Gegensätze). 10. Mi w
Feinden haben geographische Eroberungen zu kämpfen?* 11. Au
Ursache errichtet man Denkmäler, und welchen Zweck haben es
12. Das erste Gold in der deutschen Dichtung.* 13. Was verdanke wi
Entdeckungsbestrebungen des Columbus? 14. Interessante Episoden au
Jugendzeit.*

VII. Classe: 1. Was hat Europa vor den übrigen Erdtheilen vo
2. Der Dampf als Sclave und Sclavenbefreier? 3. Die Beweggründe zu
stellung von Statuen. 4. Nutzen der Kenntnis fremder Sprachen.
Postwesen alter und neuer Zeit.* 6. „Es bildet ein Talent sich in r
sich ein Charakter in dem Strom der Welt." 7. Fiesko, ein Charakter
Schillers Fiesko.* 8. Die Arbeitsthätigkeit des elektromagnetischen Telegra
9. Welchen Lebensberuf werde ich wählen?* 10. Welchen inneren und äus
Verhältnissen verdankt die romantische Richtung ihre Entstehung, u
besteht deren Gegensatz zur Classicität. 11. „Vergiss dein Ich; d
verliere nie." Herder.* 12. Wie hat sich der menschliche Ideenhorizo
dem 15. Jahrhundert erweitert?* 13. Die wichtigsten Handelswege
zeit.* 14. Kann uns zum Vaterland die Fremde werden? 15. Was e
der Stephansdom? (Maturitäts-Arbeit.)

ermehrung der Lehrmittel im Schuljahre 1888|9.

a) Bibliothek.

Jugendbibliothek erhielt einen Zuwachs von 30 Bänden und besteht tig aus 895 Bänden, wovon auf die 4 unteren Classen beziehungs- 7, 121, 113 und 107 und auf die 3 Oberclassen 417 Bände entfallen.

Lehrer-Bibliothek der Anstalt enthält jetzt 5564 Bände und 3797 Hefte me). Die wissenschaftlichen Fächer sind in nachstehender Weise :

hts- und Staatswissenschaft . .	16	Werke in	65 Bänden
igionswissenschaft	43	„	71 „
losophie	20	„	22 „
agogik	77	„	163 „
chichte	170	„	446 „
graphie	211	„	569 „
tsche Sprache und Literatur . .	469	„	1210 „
nzösische Sprache und Literatur .	177	„	326 „
lische Sprache und Literatur . .	233	Werke in	433 Bänden
erweitige fremde Sprachen . . .	112	„	176 „
hematik und darstell. Geometrie .	278	„	388 „
sik, Mechanik und Astronomie .	284	„	532 „
nie	131	„	223 „
rgeschichte	226	„	401 „
nik, Oeconomie	45	„	65 „
lelswissenschaften	86	„	312 „
meine Encyclopädien und Diversa	75	„	162 „

eschenken wurden der Lehrerbibliothek gespendet:

hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht: Be- die Industrie, den Handel und die Verkehrsverhältnisse in Nieder- für das Jahr 1887. — Statistik der Seeschiffahrt und des See- 86. — Navigazione in Trieste 1887. — Commercio di Trieste 1887.

er hohen k. k. Landesregierung: Gesetze und Verordnungen für thum Salzburg. — Skofitz, Botanische Zeitschrift für das Jahr 1889.

ohen Landesausschuss: Verhandlungen des Salzburger Landtags.

er meteorologischen Centralanstalt in Wien: Jahrbuch der schen Centralanstalt für 1887.

er meteorol. Centralanstalt in München: Monatliche Ueber- r die Witterung im Königreich Baiern 1889.

Central-Ausschuss des Deutschen und Oesterreichischen ins: Mittheilungen für 1889.

Von Herrn J. Zahbeliczky, Lehrer an der hiesigen kaufm
Fortbildungsschule und Inhaber einer Privathandelsschule: Oesterr.
zeitung, Jahrgang 1887 und 1888.

Von Herrn Professor Kammerer: Littrow, Analytische Geor
Eytelwein, Handbuch der Statik fester Körper, 3 vol. — Littrow, Ele
Algebra und Geometrie. — Leroy, Traité de Géométrie descriptive,
Gerstner, Handbuch der Mechanik mit Atlas, 4 vol.

Vom Herrn Verfasser: Fugger, Die Geschichte des botanische
in Salzburg.

Ferner wurden durch Ankauf erworben:

Zeitschriften: Verordnungs-Blatt des k. k. Ministeriums f
und Unterricht. — Die Wiener- und Salzburger-Zeitung. — Strack
organ für das Realschulwesen. — Kolbe, Zeitschrift für Realschulen.
mann, Geographische Mittheilungen. — Mittheilungen der Wiener
schen Gesellschaft. — Seibert, Zeitschrift für Schulgeographie. — Kl
Natur und Leben. — Hoffmann, Zeitschrift für den mathematischen
wissenschaftlichen Unterricht. — Poske, Zeitschrift für den phys
Unterricht. — Gretschel, Jahrbuch der Erfindungen. — Czermak,
gische Mittheilungen. — Groth, Zeitschrift für Krystallographie un
logie. — Verhandlungen der zoologisch-botan. Gesellschaft in Wien. -
Jahresbericht für chemische Technologie. — Vom Fels zum Meer
gnostische Jahreshefte.

Deutsche Sprache und Literatur: G. Freitags, Gesammel
43—46. Lief. — Grimm, Deutsches Wörterbuch, XII. 2. — Baumba
teuer und Schwänke, Von der Landstrasse, Kaiser Max und seine
Redwitz, Hymnen, Hans Wartenberg. — Wolff, Recht der Hage
Meyer, Versuchung des Pescara. — Dahn, Attila, Frigga's Ja. —
Nero, 3 vol. — Ebers, Die Gred. — Stinde, die Familie Buchholz. -
Poetik. — Rosegger, Jakob der Letzte.

Französische Sprache und Literatur: Lücking, Französis
matik. — Revue de deux mondes, 1882, 6 vol. — Collection Speman

Englische Sprache und Literatur: Schipper, Englische Me
ten Brink, Geschichte der englischen Literatur, II. Band, I. Hälfte.
tion Spemann 301—307.

Geschichte: Oncken, Geschichte in Einzelndarstellungen, 143.-15
— Giesebrecht, Geschichte der deutschen Kaiserzeit, V. Band, II.
Die Geschichtschreiber der deutschen Vorzeit, 82.—84. Lief. — Ebe
schichte Oesterreichs, III. — Duruy, Geschichte des römische
reiches, IV. — Die Denkwürdigkeiten des k. bairischen Staatsminist
von Montgelas. — Rancke, Weltgeschichte, IX. — Dahn, Gesch
deutschen Urzeit, II. Hälfte. — Honegger, Grundsteine zu einer Cultu
der neueren Zeit, 5 vol.

ographie: Richter, Die Gletscher der Ostalpen. — Die österreichisch-narchie, 60.—84. Lief. — Unser Wissen von der Erde, 99.—115. Lief. — physikalischer Atlas, 15.—18. Lief. — Bänitz, Geographie II. — Grundlehren der math. Geographie. — Ravenstein, Karte der Ost-itt 1.—6. und 9. — Simony, Das Dachsteingebiet, 1. Lief. — Krones, che Besiedlung der öst. Alpenländer.

ematik: Kleyer, Mathematische Aufgabensammlung, 420.—537. Heft. nimetrische Aufgaben. — Forsyth, Lehrbuch der Differential-Glei- übersetzt von Maser. — Gauss, Untersuchungen über höhere Arith- rsetzt von Maser.

sik: Ayrton, Handbuch der praktischen Elektricität. — Elektrotech-bliothek, 39. Band. — Müller-Pouillet, Physik, III. 1—2. — Clau-netheorie II. — Pabst, Theoretische Optik. — Clercke, Geschichte nomie im XIX. Jahrhundert. — Tait, Eigenschaften der Materie. — nd Jec, Praktische Physik, I. Theil. — Littrow, Wunder des Him-Faraday, Experimental-Untersuchungen über Elektricität, I. Bd. — Meteorologie.

mie: Fehling, Neues Handwörterbuch der Chemie 61—64. Lief. — m n. Weil. — Erlenmeyer, Org. Chemie, I. Theil, II. Bd. 4. Lief.

rgeschichte: Gümbel, Geologie, 5. Lief. — Clessin, Moluscenfauna s und der Schweiz, 3—4 Lief. — Prantl, Flora, 19.—33. Lief. — ora, 41—43. Lief. — Zittel, Palaeontologie, 1. Abth. III. Bd. 2. Lief. h. 6. Lief. — Wiesner, Elemente der wissenschaftlichen Botanik, III. Bd.

t: Die vervielfältigende Kunst der Gegenwart, 13.—16. Lief. — schen Künste, XI. Band, 3.—6. Lief. und XII. Band, 1.—2. Lief. — eichnungen. — Geschichte der vervielfältigenden Künste, 1.—2. Lief. hte der deutschen Kunst, 24.—28. Lief. — Culturhistorisches Bilder-59. Lief. — Müller-Walde, Leonardo da Vinci 1. Lief.

sa: Das Wissen der Gegenwart 65.—67. Band.

b) Physikalisches und chemisches Cabinet.

onsmikroskop. — Apparat zur Bestimmung des mechanischen Wärme- — Die nöthigen Reagentien und Präparate.

c) Naturhistorisches Cabinet.

uft: Generalregister der Flora von Deutschland von Dr. F. v. Schlech-L. Langethal und Dr. E. Schenk, revidiert von Dr. E. Hallier. — Zoo-ndtafeln von Leuckart und Nitsche Nr. 60—71. — Beiträge zur e Oesterreich-Ungarns und des Orients von Dr. E. v. Mojsisovics und mayr, Band 4, 5, 6. — Geweihe vom virginischen und javane-hen. — Verschiedene zur Aufstellung und Erhaltung der Naturalien Utensilien.

Geschenkt: Glauberit von Herrn Oberbergverwalter J. Schrem schiedene Naturkörper von Schülern der Anstalt. — 1 Stück Eisenb Herrn k. k. Oberpost-Verwalter Ozlberger.

d) Lehrmittel für Freihandzeichnen.

Elementare Draht- und Holzmodelle für das perspectivische Ze 1 eisernes Stativ zum Tragen der Modelle. (Drahtmodelle: Eine Marken versehene Linie, 1 Winkel mit beweglichen Schenkeln, 1 gl Dreieck, 1 Quadrat, 1 regelmässiges Fünfeck, 1 regelm. Sechseck, Achteck, 1 Kreis.) (Holzmodelle: 1 Würfel, 1 Prisma, 1 4seit. 1 Cylinder, 1 Kegel, 1 Kugel.)

V. Chronik.

Das Schuljahr 1889 wurde am 18. September in üblicher Weise m feierlichen Gottesdienste in der Studienkirche eröffnet.

Die Aufnahmsprüfungen in die I. Classe waren in zwei Term zwar am 15. und 16. Juli und am 16. und 17. September, diejenig übrigen Classen sowie die Wiederholungsprüfungen am 16. und 17. e vorgenommen worden.

Der Unterricht selbst erlitt, abgesehen von dem Gesangunterr durch die länger dauernde Krankheit des Lehrers etwas beeinträchtigt während des ganzen Schuljahres keine wesentliche Störung. Der Gesu zustand sowohl der Mitglieder des Lehrkörpers, als der Schüler war m normal und befriedigend. Doch hatte die Anstalt den Verlust des a 1 d. J. nach kurzer Krankheit zu Erpfendorf in Tirol verstorbenen sti Schülers der I. Classe, Gottfried Plass, zu beklagen. Der für den Ver am 28. Juni celebrierten Seelenmesse wohnten Lehrkörper und Schü — Andauernde Beurlaubungen kamen nicht vor.

Anlässlich des vierzigjährigen Regierungsjubiläums Seiner k. u. k stolischen Majestät wurde am 3. December ein feierlicher Gottesdienst Studienkirche celebriert, dem der Lehrkörper mit den Schülern beiwo

Am 5. Februar, als dem Tage des Leichenbegängnisses weiland Sr. k. Hoheit des durchlauchtigsten Kronprinzen Erzherzogs Rudolf und Unterricht eingestellt; am 8. Februar wohnten Lehrkörper und Schü in der Studienkirche veranstalteten Trauergottesdienste bei. Nach Trauergottesdienste begab sich eine Deputation der Lehrkörper zu Sr. Ex dem Herrn Statthalter, um ihren Gefühlen der tiefsten Trauer und de furchtsvollsten Beileides Ausdruck zu geben.

Im Stande des Lehrkörpers ergab sich im J. 1889 nur dadurch ein derung, dass der Professor an der k. k. L.-B.-A., Herr Josef Schn als Nebenlehrer für den wieder aufgenommenen Unterricht in der Sno bestellt wurde.

I. Verfügungen der h. Unterrichtsbehörde.

er Erlass des k. k. L.-Sch.-R. vom 23. Nov. 1888, Nr. 1594, ordnet zur Einreichung von Gesuchen um Schulgeldbefreiung ein Termin n, nach diesem Termine von der Direction kein Gesuch mehr anzu- nd jede verspätet einschreitende Partei anzuweisen sei, ihr Gesuch r dem k. k. L.-Sch.-R. vorzulegen.

rlass des h. k. k. Min. für C. u. U. vom 14. März 1889, Z. 1865, die Ungehörigkeit des sogenannten Viaticierens, insoferne als das- iner Inanspruchnahme der öffentlichen Mildthätigkeit durch Herum- Haus zu Haus ausartet.

lass des k. k. L.-Sch.-R. vom 9. Mai 1889, Nr. 586, eine dauernde rtheilung für den katholischen Religionsunterricht vorschreibend.

lass des h. k. k. M. f. C. u. U. vom 9. Mai 1889, Z. 8774, betreff. e von neuen Schulgeldmarken vom 1. September 1889 an.

VII. Maturitätsprüfung.

r am 5. October 1888 unter dem Vorsitze des Herrn k. k. Landes- tors E. Schwammel abgehaltenen Prüfung erwarb sich der Schüler lasse Josef Starl (geboren zu Ebensee O.-Oe. am 28. October 1866, hre Schüler der Salzburger Realschule) nachträglich das Zeugniss Derselbe beabsichtigt, nach beendetem Einjährig-Freiwilligen Prä- sich dem Kanzleifache zuzuwenden.

iesjährigen schriftlichen Maturitätsprüfung unterzogen sich die der VII. Classe.

iemen für diese Prüfungen waren;

ch: Was erzählt uns der Stephansdom?

ch-Französisch: Der Mäusethurm (A. Weil's Uebersetzungsbuch, 67 u. 68).

ösisch-Deutsch: Andreas Hofer. »Napoleon écrívit à Berthier — aussitôt exécuté.« (Filek, Leçons de littérature française).

ch: The Irish Rebellion. »The two parties — Whitehall« (Ma- ory of England I. Bd. S. 103 u. 104).

matik: 1. Ein Darlehen von 200.000 fl. soll in 20 gleichen jede beim Jahresschlusse fällig, zurückgezahlt werden. Wie gross che Tilgungsquote, wenn 4½% Zinsen gerechnet werden? 2. Es rnung zwischen Paris und Petersburg aus den Längen und Breiten

dieser Orte zu berechnen. $l_1 = 0^0$, $b_1 = 48^0\ 50'\ 11''$, $l_2 = 27^0$ $b_2 = 59^0\ 56'\ 30''$. 3. Ein gerader Kegel hat an der Spitze des Ax den Winkel $\alpha = 70^0\ 40'$, die Peripherie des Grundkreises ist p Mantelfläche und Inhalt des Kegels zu berechnen. 4. Es ist ein gle liges Dreieck aus dem Winkel an der Grundlinie β und der Summe Höhen zu construieren.

Darstellende Geometrie: 1. Drei parallele Gerade sind g soll eine vierte Parellele gezeichnet werden, welche von den gege raden gleichweit absteht. 2. Ein gerader Kreiskegel ruht mit ei auf der horizontalen Projections-Ebene und wird von einer sechsse raden Pyramide durchdrungen. Diese Durchdringung ist zu constr dann sind die Netze des Kegels und der Pyramide zu zeichnen und linien in diese Netze einzutragen. 3. Ein Dreieck und ein horizon des Prisma sind in perspectivischem Bilde so anzunehmen, dass erst Schatten theilweise auf das letztere wirft. Sämmtliche Schatten d — Ein erklärender Text ist jeder Figur beizufügen.

Zu der am 1. und 2. Juli d. J. unter dem Vorsitze des Herrn k. schulinspectors E. Schwammel abgehaltenen mündlichen Maturit erschienen 14 Schüler der 7. Classe. Hievon wurde 1 auf ein Jahr und 1 für die Wiederholungsprüfung aus einem Gegenstande nach bestimmt, während die folgenden 12 das Zeugnis der Reife, u. z. F Vogl mit Auszeichnung, sich erwarben:

Name	Alter	Geburtsort	Dauer der Studien in Salzburg	Angeb
Ehrbar Friedrich . . .	16 J.	Wien	2 J.	Tech
Fally Karl	18 „	Salzburg	7 „	Kan
Gerber Arthur	18 „	Wien	3 „	Asse
Gruber Alois	19 „	Vöcklabruck	7 „	Eisen
Hofmann Franz	20 „	Pilsen	7 „	Tech
Janscheck Otto	17 „	Salzburg	7 „	Kan
Koch Albert	20 „	Salzburg	$2\frac{1}{2}$ „	
Koch Heinrich	18 „	Salzburg	7 „	
Lang August	20 „	Franzensfeste	6 „	
Nelböck Julius	18 „	Leipzig	6 „	
Oberhauser Karl . . .	21 „	Salzburg	3 „	Kan
Vogl Friedrich	17 „	Mattighofen	7 „	Lede

VIII. Statistik der Schüler.

I. Zahl.	Classe I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	Zusammen
de 1887/8	49	51	37	37	15	15	9	213
fang 1888/9	49	46	41	30	19	15	15	215
nd des Schuljahres ein-								
ten	2	—	1[1]	—	—	—	—	3
zen also aufgenommen:	51	46	42[1]	30	19	15	15	218[1]
nter:								
ufgenommen und zwar								
estiegen	48	4	1[1]	—	1	2	—	56[1]
nten	1	1	—	—	—	—	—	2
aufgenommen u. zwar								
estiegen	—	40	38	28	18	13	15	152
nten	2	1	3	2	—	—	—	8
nd des Schuljahres aus-								
ten	1†	1	1	—	2	—	—	5
zahl am Ende 1888/9	50	45	41[1]	30	17	15	15	213[1]
r: Oeffentliche Schüler	50	45	41	30	17	15	15	213
Privatisten . . .	—	—	—	—	—	—	—	—
Ausserord. Schüler	—	—	1	—	—	—	—	1
urtsort (Vaterland)								
fentlichen Schüler.								
g, Stadt	20	20	13	12	7	4	6	82
g, Land	8	8	5	6	—	1	1	29
erreich	11	5	6	4	2	5	3	36
terreich	7	5	9	3	2	4	2	32
d Vorarlberg . . .	1	1	—	2	2	—	1	7
urk	—	—	1	—	—	—	—	1
. . . . .	1	2	3	2	1	1	1	11
. . . . .	—	2	1	—	1	—	—	4
n	—	—	—	—	1	—	—	1
. . . . .	—	1	—	—	—	—	—	1
. . . . .	—	1	1	—	—	—	—	2
s Reich	2	—	2	1	1	—	1	7
Summe	50	45	41	30	17	15	15	213

III. Lebensalter.	Classe I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	s
11 Jahre	4	—	—	—	—	—	—	
12 „	25	5	—	—	—	—	—	
13 „	12	21	4	—	—	—	—	
14 „	5	13	13	6	—	—	—	
15 „	4	5	18	5	4	—	—	
16 „	—	1	4	6	5	—	1	1
17 „	—	—	1	10	3	6	2	2
18 „	—	—	1	3	4	5	6	1
19 „	—	—	—	—	1	2	2	
20 „	—	—	—	—	—	2	3	
21 „	—	—	—	—	—	—	1	
Summe	50	45	41	30	17	15	15	1

IV. Deutsche 211, Czechoslaven 2, Katholiken 189, Evangelisch A-C Helv.-C. 2, Israelitisch 5.

V. Dem Aufenthaltsorte der Eltern nach sind aus Salzburg (Sta) Salzburg (Land) 31, Oberösterreich 27, Niederösterreich 27, Tirol 1, Böm Mähren 1.

VI. Von der Schulgeldzahlung ganz befreite Schüler im I. Seme te im II. Sem. 76, halbbefreite im I. und II. Sem. je 1, das ganze Sch zahlende im I. Sem. 150, im II. Sem. 137, Betrag des Schulgeldes im I. 2257 fl. 50 kr., im II. Semester 2062 fl. 50 kr., Aufnahmstaxen 121 fl 8 Lehrmittelbeiträge und Duplicatstaxen 197 fl., Zahl der Stipendisten 9, sammtbetrag der Stipendien 780 fl., Zahl der aus dem Knabenwaisenfo de je 59 fl. betheilten Schüler 5.

VII. An dem Unterrichte in den unobligaten Gegenständen, Ge Stenographie, analyt. Chemie und Modellieren nahmen beziehungswis I. Sem. 78, 32, 3 und im II. Sem. 84, 27, 3 theil.

VIII. Classification.

Ergebnis der Classification am Ende des Schuljahres 1889							Classificat. im Vorjahre 88 dem Ergebn. d. Wieder.-Pr				
Classe	Vorzug	I. Cl.	Wiederhol.-Prüfung	II. Cl.	III. Cl.	Ungeprüft	Vorzug	I. Cl.	II. Cl.	III. C	ge
I.	12	28	3	7	—	—	7	36	6	—	
II.	6	32	3	4	—	—	7	39	5	—	
III.	5	27	6	3	—	—	6	28	3	—	
IV.	5	21	3	1	—	—	2	31	4	—	
V.	2	13	—	1	—	1	2	12	1	—	
VI.	3	12	—	—	—	—	1	14	—	—	
VII.	1	13	1	—	—	—	—	9	—	—	
Summe	34	146	16	16	—	1	25	169	19	—	
	213						213				

eichnis der öffentlichen Schüler am Schlusse des Schuljahres 1889.

I. Classe:

Otto	Koch Friedrich	Schwendtbauer Ludwig
r Leopold	Koch Walter	Spitzer Karl
Alfons	Kohlmayr Alois	Stein Karl
eopold	Lainer Karl	Steyrer Hermann
Matthäus	Lampl Franz	Stötzer Robert
ohann	Leib Josef	Stránsky Rudolf
kenzeller Karl	Lehr Josef	Ueberreiter Josef
r Hermann	Levi Julius	Ulrich Heinrich
Hermann	Lichtenegger Sixtus	Wagner Franz
erdinand	Mader Wilhelm	Watzek Johann
Franz	Mittermayer Max	Werkmann Karl
rwin	Molitor Karl	Wieninger Friedrich
arl	Pezolt Ludwig	Windischbauer Johann
Michael	R. v. Schallhammer Ernst	v. Wolfstein Geyza
rl	Schleusing Kamillo	Woska Arthur
Franz	Schmiederer Johann	Zanetti Julius.
r Franz	Schneider v. Mans-Au Osk.	

II. Classe:

rg Oskar	Leib Ferdinand	Schrems Karl
anz	Mayer Oskar	Schwab Karl
olf	Meindl August	Seeauer Ludwig
einrich	Mitterbacher Ludwig	Freiherr v. Silvatici Franz
r Theodor	Nelböck Hans	Stützel Stephan
ler Paul	Nelböck Walter	Graf v. Thun-Hohenstein J.
lf	Pirckmayer Friedr.	Tomaselli Karl
ans	Poschacher Josef	Ueberreiter Egid
Jos. Karl	Prochaska Paul	Ullrich Max
Julius	Prochaska Peter	Weilguni Ferdinand
ert	Purger Johann	Weiss Friedrich
lwig	Rehak Karl	Weitenweber Josef
Rudolf	Renner Heinrich	Wiederwald Karl
ton	Schlederer Gottfried	Würtz Michael
iedrich	Schöndorfer Josef	Ziegeleder Justus.

III. Classe:

ger Heinr.	Fürböck Rudolf	Hartmann August
sef	Gaugler Max	Herndl Wilhelm
Eduard	Glocker Ernest	Hinterhuber Paul
l	Gstirner Friedr.	Hopf Friedrich
fer Hermann	Haindl Erwin	Hoppe Josef

Kirchner Adolf	Rauber Johann	Speckmayr Friedr.
Korber Adolf	Roittner Michael	Stimpfl Edgar
Mader Benno	Sacher Franz	Stöger Ludwig
Moser Johann	Salb Oskar	Weismayr Gustav
Müller Johann	Schattauer Mathias	Welser Karl
Müller Karl	Scheibl Karl	Windischbauer Ka
R. v. Neumann Josef	Schrems Josef	Würzburger Karl
Obermayr Rudolf	Schwarz Karl	R. v. Zipperer-Arba
Pirckmayer Anton	Schweinbach Alfred	

IV. Classe:

Baldi Karl	Haagn Ernest	Morawek Heinr.
Blobel Oskar	Henoch Leo	Moyses Friedrich
Böhm August	Höcketstaller Hugo	Piesslinger Friedr
Christoph Hermann	Höller Karl	Freiherr v. Redwi
Fally Eduard	Huber Lothar	Schildt Joh.
Fugger Eberhard	Jell Emil	Thannenberger Ax.
Gallitzenstein Gabriel	Kahler Alfred	Tschallener Franz
Gassner Franz	Korber Oskar	Tschallener Rudo
Grassl Franz	König Karl	v. Wolfstein Otto
Gruber Karl	Mayr Friedrich	Zimmer Georg.

V. Classe:

Aigner Victor	Mittermayer Karl	Schweinbach Her a
Freiherr von Blittersdorff Friedrich	Petter Franz	Stadt Viktor
	Petter Rudolf	Strele Karl
Fink Raimund	Pische Rudolf	Thöny Gustav
Hueber Franz	v. Praxa Anton	Tusel Edmund
Mader Raimund	R. v. Schallhammer Frdr.	Vogl Ludwig.

VI. Classe:

Baumgartner Eduard	Hyra Gustav	Oberleitner Alois
Ebner Rudolf	Jagerspacher Karl	v. Paravicini Alfd
Fellner Ferdinand	Jesinger Franz	Riedler August
Gallistl Johann	v. Kempf Wilhelm	Sporn Emil
Hawlick Victor	Lorenz Oskar	Wanner Heinrich

VII. Classe:

Ehrbar Friedrich	Hofmann Franz	Lang August
Fally Karl	Janscheck Otto	Nelböck Julius
Gerber Arthur	Koch Albert	R. v. Neumann-Spl ar
Griessenböck Josef	Koch Heinrich	Oberhauser Karl
Gruber Alois	Konarski Karl	Vogl Friedrich.

Lehrbücher für das nächste Schuljahr 1889/90.

Classe	Titel des Werkes	Neueste approb. Auflage
I. u. II.	Mach Fr. J., Lehrb. der kath. Relig. für die I. u. II. Cl. R.	2.
III.	Dr. Fischer Fr., Gesch. d göttl. Offenbar. des alten Bundes.	5.
IV.	— Geschichte der göttlichen Offenb. des neuen Bundes.	5.
V. u. VI.	Dr. Wappler A, Kathol. Religionslehre.	8.
VII.	Dr. Kaltner B., Lehrb. der Kirchengesch. für Oberclassen.	1.
I.—IV.	Dr. F. Willomitzer, Deutsche Schulgrammatik	4.
I.	Neumann Franz, Lesebuch für die unt. u. mittl. Cl. der R. I.	3.
II.	— Dasselbe II.	3.
III.	— Dasselbe III.	1.
IV.	— Dasselbe IV.	1.
V.	Pölzl Ign., Lesebuch für die Oberclassen der Realschulen. I.	1.
VI.	— Dasselbe II.	1.
VII.	— Dasselbe III.	1.
VI.	Jauker K., Mittelhochd. Lesebuch.	2.
I. u. II.	Plötz, Elementargrammatik.	16.
III.—VII.	— Schulgrammatik.	30.
III.—IV.	Dr. E. Filek, Chrestomathie.	4.
V.—VII.	Bechtel, Chrestomathie.	3.
V.—VII.	Sachs, Wörterbuch.	
V.	Sonnenburg-Baudisch, Grammatik. Ausgabe für Oesterreich.	1.
VI. u. VII.	Sonnenburg, Grammatik.	11.
VI. u. VII.	Herrig, Classical Authors.	
VI. u. VII.	Köhler, Wörterbuch.	
I.	Kozenn-Jarz, Leitfaden I.	9.*
II.	— Dasselbe, II.	9.*
III.—IV.	— Dasselbe II.	8.

üheren Auflagen ausgeschlossen.

Lehrfach	Classe	Titel des Werkes
Geographie	IV. (2. Sem.)	Kozenn-Jarz, Leitfaden III.
	I.—IV.	Kozenn, Schulatlas.
Geschichte		Dr. E. Hannak, Lehrb. f. d. unteren Cl
	II.	a) Alterthum,
	III.	b) Mittelalter,
	IV.	c) Neuzeit.
		— Lehrbuch für Oberclassen:
	V.	a) Alterthum,
	VI.	b) Mittelalter,
	VII.	c) Neuzeit.
	VII.	Dr. E. Hannak, Vaterlandskunde f. Ober
	V.	Putzger, Histor. Schulatlas
	VI. u. VII.	event. Rhode, „
Mathematik	VI. u. VII.	Putzger, „
		event. Rhode, „
	I.	Dr. Močnik, Lehr- u. Uebungsbuch, 1. Ht
	II. u. III.	— Dasselbe, 2. und 3. Heft
	IV.—VII.	— Lehrbuch der Arithmetik u. Algeb
	V.—VII.	— Lehrb. der Geometrie f. die oberen
	V.—VII.	Dr. Heis, Beispiel-Sammlung
	II.—IV.	Dr. Močnik, Anfangsgr. d. Geometr. f. U.
Darstellende Geometrie	V.—VII.	Smolik F., Elemente.
Naturgeschichte	I.	Dr. Pokorny, Illustr. Naturg. d. Thierreichs
	II.	— Illustr. Naturgesch. d. Mineralreichs
		— „ „ d. Pflanzenreichs
	V.	Dr. V. Graber, Leitfaden der Zoologie
	VI.	Dr. Burgerstein, Leitfaden der Botanik
	VII.	Dr. Hochstetter u. Bisching, Leitf. d. Mineral.
Naturlehre	III. u. IV.	Dr. J. Krist, Anfangsgr. f. d. Untercl. d. R.
	VI. u. VII.	Dr. Wallentin Ign., Lehrb. f. d. ob. Cl. d. R.
Chemie	IV.	Dr. Kauer A., Elemente
	V. u. VI.	Dr. J. Mitteregger, Chemie

* Die früheren Auflagen ausgeschlossen.

** Die 19., 13. und 15. Auflage beziehungsweise ausgeschlossen.

ıfnahme der Schüler für das Schuljahr 1889/90.

Schuljahr 1889/90 beginnt am 18. September. Die Aufnahmsprü- die erste Classe, soferne sie nicht schon am 15. und 16. Juli statt- erden ebenso wie jene für höhere Classen und wie die Wiederholungs- am 16. und 17. September vorgenommen.

Wiederaufnahme der Schüler erfolgt am 15. bis 17. September in von 8—12 Uhr vormittags.

in die erste Classe Aufzunehmenden haben sich durch den Tauf- oder nein über das vollendete oder in dem I. Quartale des Schuljahres idung gelangende zehnte Lebensjahr auszuweisen und, falls sie eine le besucht haben, das vorschriftsmässige Frequentationszeugnis bei-

die wirkliche Aufnahme entscheidet die Aufnahmsprüfung, bei lgende Anforderungen zu stellen sind: »Jenes Mass von Wissen in ion, welches in den vier ersten Jahrescursen der Volksschule er- erden kann, Fertigkeit im Lesen und Schreiben der Unterrichts- nd eventuell der lateinischen Schrift, Kenntnis der Elemente aus nlehre der Unterrichtssprache, Fertigkeit im Analysieren einfacher, Sätze, Bekanntschaft mit den Regeln der Orthographie, Uebung in Grundrechnungsarten in ganzen Zahlen.«

er, welche von anderen Mittelschulen an die Salzburger Real- rtreten wollen, haben neben dem Tauf- oder Geburtsscheine auch Semestralzeugnis, mit der vorgeschriebenen Abmeldung versehen,

Bibliotheks-Taxe beträgt 1 fl., die nur von den neu eintretenden u zahlende Aufnahms-Taxe 2 fl. 10 kr.

Direction erfüllt eine sehr angenehme Pflicht, indem Gönnern der Anstalt, welche deren Zwecke in irgend se förderten, den gebürenden Dank ausspricht.

Siebzehnter Ausweis

des

ines zur Unterstützung dürftiger Schüler

der

k. k. Ober-Realschule und Lehrerbildungs-Anstalt in Salzburg.

Schlusse des zweiten Semesters 1889 beehrt sich der Ausschuss des zungs-Vereines den verehrten Mitgliedern den Jahres-Ausweis über tigkeit zu übergeben.

Beginn des Schuljahres stellte der Ausschuss in der ersten Sitzung ie fest, welche zur Unterstützung für dürftige und würdige Schüler hranstalten hinreichend erachtet wurde.

Summe wurde verwendet zur Anschaffung von Lehrbüchern, Zeich- d Schreib-Requisiten, zur Unterztützung in Geld, sowie zur Bezahlung gstisches.

usschuss-Sitzung vom 30. Juni erledigte den mitfolgenden Rechnungs-

ich spricht die Vorstehung des Vereines ihren ehrerbietigsten Dank taiserlichen und königlichen Hoheiten, dem durchlauchtigsten Erz- udwig Victor, dem Grossherzoge Ferdinand IV. von Toscana, enz dem Hochwürdigsten Fürsterzbischof von Salzburg Dr. Franz Albert Eder und dem Hochwürdigsten Herrn Romuald Horner tiftes St. Peter. Beiden letzteren hohen Gönnern dankt der Verein rs für die ausgiebigen und zahlreichen Unterstützungen einzelner ider Lehranstalten.

erein spricht seinen tiefgefühlten Dank aus dem wohlgebornen Herrn aullich für eine sehr namhafte Spende, der löblichen Verwaltnng chen Sparcasse in Salzburg, ferner allen Wohlthätern, welche Schüler mit Unterstützungen bedachten, den Barmherzigen rn in St. Sebastian, welche den Mittagstisch besorgten, und allen relche die Zwecke des Vereines fördern halfen.

Rechnung 1888/9.

A. Einnahmen.

1.	Activ-Capitalien vom Vorjahre:	
	a) An angelegten Werten	4723
	b) An Barschaft	78
2.	Jahresbeiträge:	
	a) Sr. kaiserl. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Ludwig Victor	50
	b) Sr. kaiserl. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Grossherzogs Ferdinand IV. von Toskana	25
	c) Sr. Hochfürstl. Gnaden und Excellenz des Hochwürdigsten Herrn Fürst-Erzbischofes Dr. Franz Albert Eder	20
	d) der ordentlichen Mitglieder	500
3.	Bezahlte Kostgelder:	
	a) der Wohlthäter	56 „
	b) der Schüler	121 „
4.	Zinsen von den angelegten Capitalien	280 „
5.	In die Sparcasse neu eingelegt	623 „
6.	Ausserordentliche Einnahmen:	
	a) Jubiläumsgabe des Herrn Angelo Saullich, Realitätenbesitzers	250 „
	b) der löblichen Sparcasse-Verwaltung	50 „
	Summe	6779 fl.

B. Ausgaben.

1.	Kostgelder an die Dienstboten-Anstalt in St. Sebastian	51 fl.
2.	An arme Schüler für Bücher, Zeichenrequisiten und Wohnung	16 „
3.	An Buchdruckerkosten	„
4.	Für verschiedene Ausgaben	„
5.	Für neu angelegte Capitalien in der Sparcasse	62 „
	Summe	131 fl.

C. Bilanz.

Werden von den Einnahmen mit		677 fl.
abgezogen die Ausgaben mit		131 „
bleibt ein Activ-Rest von		546 fl.

D. Gutmachung.

parcassebuch von	1547	fl. 15	kr.
n Donauregulierungs-Lose à 100 fl.	700	„ —	„
rente zu 4·2 %	1900	„ —	„
rente zu 5 %	1200	„ —	„
barschaft	117	„ 32	„
Gleich der obigen Summe von	5464	fl. 47	kr.

lzburg, am 6. Juli 1889.

Josef Wögerbauer,
Vorstand.

Franz Anthaller,
Cassier.

Verzeichnis

der

glieder des Vereines zur Unterstützung dürftiger Schüler der k. k. Ober-hule und Lehrerbildungs-Anstalt in Salzburg im Schuljahre 1888/9.

A.

erliche Hoheit Erzherzog Ludwig Victor.
erliche Hoheit Grossherzog Ferdinand IV. von Toscana.
llenz Fürsterzbischof Dr. Franz Albert Eder.
den der Hochwürdigste Abt Romuald Horner des Stiftes St. Peter.

B.

Ständige Mitglieder.

Karl sen., Realitätenbesitzer.
eck Philipp Graf, k. k. geh. Rath, Excellenz.
ft Mattsee.
Ev., Instituts-Director.
er Franz, Realitätenbesitzer.
az, Jur. Dr., k. k. Notar.
lthasar, Theol. Dr. und Professor, A.-M.
Müllermeister in Friedau. †
anz, Oberrealschul-Professor i. P.
nann, Wechsler. †
, Instituts-Director, A.-M.
rin, Ingenieur und Bauunternehmer.
f, Theol. Dr., p. Professor.

Seyerl Rudolf, Herrschaftsbesitzer in Stahrenberg.
Sigl Josef, Bräuer in Obertrum.
Spängler Karl, Grosshändler, kaiserl. Rath.
Schwarz August, Freiherr.
Schwarz Julius, Freiherr.
Schwarz Richard, Freiherr.
Weiss J., Banquier in Wien.
Wiest Victor, k. k. Finanzdirector.
Woegerbauer Josef, k. k. Schulrath und Director der Oberrealschule.

C.

Ordentliche Mitglieder.

Adametz Josef, k. k. Professor der O.-R.-Sch.
*Aigner Gottfried, Med. Dr., Privat.
Angermayr Josef, Ritter, Apotheker im St. Johannsspitale.
*Ainmüller Heinrich, Privat.
Alexy Therese, Advocatens-Witwe.
Amannshauser Ludwig, städt. Lehrer.
*Anthaller Franz, Religions-Professor der k. k. L.-B.-A., A.-M.
*Arenberg Sophie, Prinzessin, geb. Fürstin Auersperg.
Auböck Anna, Bräuin in Hallein.

Baldi Anton, Kaufmann.
Baudisch Johann, Professor der k. k. O.-R.-Sch., A.-M.
Bayr Wenzl, Restaurateur in Wien.
Bechinie Alex. von Lazan, k. k. Zahlamts-Controlor.
Bekk Adolf, Dr., Director und Schulrath, A.-M.
Beinkofer Josef, Kaufmann.
Biebl Marie, Private.
Binna Albert, Bergwerks-Directions-Kassier.
*Bonitzer S., Kaufmann in Wien.
*Brandner Franz, Theol. Dr. und Professor, Consist.-Rath.
Burgschwaiger Eduard, Lehrer i. P.

Cannaval Alois, Unterlehrer in N.-Oest.
Christoph Bertha, Baumeisters-Gattin.
*Collegiatstift Mattsee.
Czerny Julius, Professor der k. k. O.-R.-Sch., A.-M.

Danninger Josef, k. k. Landesgerichtsrath.
Daxberger Oswald, Dr., Relig.-Professor der k. k. O.-R.-Sch., A.-M.
Degn Johann, Professor der k. k. O.-R.-Sch.
Dieter Heinrich, k. k. Hofbuchhändler.
Dierhammer Johann, Unterlehrer in Faistenau.
*Dubsky Rosina, Gräfin, Excellenz.
*Dum Josef, Hochw., Stiftspropst in Mattsee.
*Düringer Richard, Kaufmann.
Duschl Klara, Schirmfabrikantin.

lbin, Ritter von Eschenheim, k. k. Hofrath i. P.
osef, Mühlenbesitzer in Guntramsdorf.
rfer August, k. k. Ober-Landesgerichtsrath.
Rudolf, Professor der k. k. L.-B.-A., A.-M.
Heinrich, Cafétier.
nton, k. k. Professor, Bezirksschulinspector.

Georg, Forstrath Sr. k. k. Hoh. des Grossherzogs v. Toscana.
Anna, Private.
Eberhard, k. k. Professor der O.-R.-Sch.

Anna, k. k. Hauptmanns-Gattin.
Johann, k. k. Hauptmann i. P.
stein Adolf, Realitätenbesitzer in Wien.
Andreas, Theol. Dr. und Professor, Colleg.-Custos.
Therese, Wirtin in Hallwang.
m Franz, Dechant in St. Georgen.

ulius, Kaufmann.
Friedrich, Secretär der Stadt Steyr.
win, Privat in Wien.
ier Alois, Stadtpfarrer. †
rter Josef, k. k. Lehrer der Ueb.-S. i. P.
r Simon, Instituts-Director, A.-M.
phie, Bäckereibesitzers-Gattin.
Blasius, hochw. Domcustos.
ohann, Hauptagent.
ranz, Dr. und Advokat.
Josefa, k. k. Landesgerichtsraths-Gattin.
Josef, Mozarteums-Director.

old, k. k. Hofanstreicher in Wien.
pold, Lehramtszögling.
in, Oberlehrer zu Maria Pfarr.
is, Privat.
eorg, Kaufmann.

da. Private.
ranz, Cand. jur., Assistent im Institute Rodr.
nner Therese, Handlungsbesitzerin.
Friedrich, k. k. Professor der O.-R.-Sch.
ler Joh., Dr., Domcapitular und Priesterhaus-Director.
Karl, k. k. Professor der O.-R.-Sch.
arnabas, k. k. Finanzrath.
r Johann, Kaufmann.
osef, k. k. Lehrer der L.-B.-A.
ert, Kaufmann.
ob, Selcher.
eter, Professor im f. e. Borromäum.

*Königsberger Friedrich, Abt des Stiftes Michaelbeuern.
Koidl Anton, Käsehändler.
Kofler Emil, k. k. Notar.
Krippl Karl, k. k. Oberstlieutenant a. D.

*Lang Otto, Gutsbesitzer in Rögglbrun.
Lenz Anna, Hausbesitzerin.
Lobkowitz Julie, Fürstin.
Löberbauer, Unterlehrer in Neukirchen, O.-Oest.
Loider Mathias, Buchdruckerei-Theilhaber.
Lorenz Anton, k. k. Post-Controlor in Wien.
*Luber Alois, Dr., k. k. Landesschulinspector.
Lukas Hermann, Professor der k. k. O.-R.-Sch. A.-M.

Machauer Karl, Privat.
Mark Johann, Professor der k. k. O.-R.-Sch.
Markl Martin, Fabrikant in Ried.
Mayburger Josef, Professor der k. k. O.-R.-Sch. i. P.
Mayer Moriz, Med. Dr., k. k. Stabsarzt.
*Mayr Franz, Hôtelier und Brauer.
Mayrwieser Wilhelm, Lehrer i. P.
Minnich Franz, Med. Dr. und Primar-Arzt.
Mösenbacher Jakob, städt. Lehrer.
Molitor Karl, Kaufmann.
Mooshammer Anna, Wirtin in Plain.
*Müller Johann, Realitäten-Besitzer.

Nelböck Anna, Hôteliers-Gattin.
*Neumann Franz, Ritter v., Baurath.

Ostermaier Franz, Fleischer.

Pammesberger Josef, Dr. und Realitäten-Besitzer.
Paulmichl Martin, Amtsvorstand der Consist. Buchhaltung.
Pausinger Josef, Unterlehrer in Ulmerfeld, Niederösterreich.
Petter Pauline, Private.
Petter Alexander, Dr., Museums-Director.
Pfanzelter Marie, Tapeziergeschäfts-Inhaberin.
Pick Hermann, Dr., k. k. Schulrath u. Gymnasial-Director i. P.
*Pieschel Franz, k. k. Baurath, A.-M.
Plass Kleophas, Oberförster i. P.
*Pollak Josef, Dr. und prakt. Arzt.
Purtscheller Ludwig, k. k. Turnlehrer.

*Rainer P. P., Instituts-Director, Ehrenkämmerer, f. e. g. Rath.
*Rainer Franz, k. k. Landwehr-Major.
*v. Rauchenbichler Katharina, Private.
Rigaud Bertha, Kaufmannsgattin.
Reisegger Therese, Apothekersgattin in Haag, O.-Oest.
Reizenböck Heinrich, k. k. Professor der O.-R.-Sch. i. P.

Clara, Private.
r Michael, Kaufmann.
Adolf, Dr. jur. und Advokat.
er Kajetan, Director der Andrä-Schule.

Angelo, Realitäten-Besitzer.
Ludwig, k. k. Regierungsrath.
froh Franz, Zahlmeister der städt. Sparcasse.
el August Edler v. Kühnritt, k. k. Major a. D.
ndoppler Johann, Kaufmann.
r Joh., Unterlehrer in Unterhollabrunn.
er Johann, k. k. Zahlamts-Controlor.
er Josef, Brauerei-Verwalter in Kaltenhausen.
l Franz, hochwürdigster Domdechant.
Hans, k. k. Gymn.-Professor und Bezirksschulinspector.
erer Johann, Bäckermeister in Hallein.
l Ludwig, k. k. Gymnasial-Director i. P.
er Josef, k. k Professor der O.-R.-Sch. i. P.
er v. Mans-Au, k. k. Hauptmann in St. Pölten.
: L., Bahn-Ingenieurs-Gattin.
Johann, k. k. Professor der O.-R.-Sch.
rfer Josef, Zimmermeister in Hallein.
Josef, prakt. Arzt in Hüttau.
Marie, Höllbräuers-Gattin.
Raimund, k. k. Oberrechnungsrath.
Johann, Banquier.
Georg, Unterlehrer in Bischofshofen.
Josef, Dom-Chorregent und Consist.-Rechn.-Revident.
cher Albert, Med. Dr. und Bürgermeister.
ister Josef, k. k. Professor der L.-B.-A.
Leopold, k. k. Landesgerichts-Rath.
Heinrich P., Subprior.
ach Franz, Landschaftsrath.
Heinrich, Wachshändler.
nz, Director der Bürgerschule.
ois, Kaufmann.
Marie, Baronin.
Otto, Dr., städt. Sparcasse-Director.
r Franz, Landesrechnungsrath i. P.
Hugo, Glasfabriks-Besitzer.
Theodor, Glasfabriks-Besitzer.
hann, Professor der k. k. O.-R.-Sch.
Pauline, Landesthierarztens-Gattin.

Karl, Cafétier.
riele, Gräfin.

-Stift ehrwürdiges.

o, Kaufmann.
drich, O.-R.-Schüler.

Vogl Ludwig, O.-R.-Schüler.
Vogt Karl, k. k. Professor u. Bez.-Schulinspector.
Wagner Josefine, Kaufmannswitwe.
*Wagner Hermann, k. k. Professor der L.-B.-A.
Wagner Karl, k. k. Lehrer der L.-B.-A.
Walter Alois, Mitglied des Dommusikvereins, Concertmeister.
Weickl Josef, Privat.
Weissmayr Marie, Hôtelbesitzerin.
Weinkammer Therese, Wachsgeschäfts-Inhaberin.
Welser Julius, k. k. prov. Lehrer der L.-B.-A.
Werner Karl, k. k. Landesschul-Inspector i. P.
Wiederwald Albert, Dr. u. prakt. Arzt.
*Wiesgrill Katharina, Private in Wien.
*Winkler Alois, Beneficiat, Landes-Ausschuss.
Winkler Josef, Lehrer in Neukirchen.
Wörnhart Josef, k. k. Lehrer der L.-B.-A.
*Wolf Karl, Religionsprofessor des k. k. Gymnasiums.
*v. Wolfstein Cornelia, Gutsbesitzers-Gattin.
*Worissek Emanuel, städt. Buchhalter i. P.

Zechenter Josef, Zahlmeister der Salzburger Landesanstalten.
Zeller Ludwig, Kaufmann.
Zimmer August, k. k. Hauptzollamts-Controlor.

A.-M. bedeutet Ausschuss-Mitglied.

Die mit * bezeichneten Mitglieder haben mehr als den Jahresbeitrag von 2 fl. geg

Zahl der ordentlichen unterstützenden Mitglieder: 191.

Jahresbericht

der

. k. Staats-Oberrealschule

in Laibach

ür das Schuljahr 1906/07.

Veröffentlicht durch die Direktion.

Laibach 1907.

Verlag der k. k. Staats-Oberrealschule.

Buchdruckerei von Ig. v. Kleinmayr & Fed. Bamberg.

Inhalt.

führung der Unendlichkeitsrechnung in die Mittelschule.
on *Karl Schrautzer* 1

chrichten:

sonalstand des Lehrkörpers und Lehrfächerverteilung 12
rverfassung 15
rbücher 16
s- und Schulaufgaben 18
terstützung der Schüler 21
mehrung der Lehrmittelsammlungen 26
tistik der Schüler 32
turitätsprüfungen 36
onik 37
chtigere Verfügungen der vorgesetzten Behörden 39
körperliche Ausbildung der Jugend 39
erbliche Fortbildungsschule 42
zeichnis der Schüler 45
dmachung für das Schuljahr 1907/1908 51

ır Einführung der Unendlichkeitsrechnung in die Mittelschule.

Von *Karl Schrautzer.*

Als vor ungefähr fünf Jahren die erste Hälfte der jetzt an unserer ıstalt im Gebrauche stehenden Naturlehre von Dr. Alois Höfler den en Fachlehrern der Physik zur Ansicht zugesendet wurde, hat so er Mittelschulphysiker — ich nicht ausgeschlossen — gezweifelt, ob ieses Lehrbuch behördlich zum Unterrichtsgebrauche zulässig erklärt wird, und zwar aus Gründen, in die hier nicht näher eingegangen kann. Gelänge jedoch die Genehmigung, so war es außer Zweifel, rch die Einführung dieses anscheinend schwierigen Lehrbuches der unterricht auf eine ganz andere, den modernen Anforderungen ent- nde Grundlage gestellt werden wird. Aus der Anordnung des Stoffes ıange des genannten Lehrbuches — Zusätze aus der angewandten ıatik — war aber zu vermuten, daß der Verfasser auch den Mathe- ıterricht der Mittelschule in andere Bahnen gelenkt wissen will.

)aß diese Vermutung eine richtige war, beweist der vom gleichen, Universitätsprofessor Dr. Alois Höfler in Prag verfaßte Aufsatz: Iathematische im physikalischen Unterricht“ [1], in welchem der Ver- anknüpfend an die Verhandlungen auf der Naturforscherversamm- Breslau 1904, über den mathematisch-physikalischen Unterricht an Schulen seine Ansichten über die Anwendung der Differential- und rechnung in der Mittelschule erörtert. Dieser und viele andere e über den gleichen Gegenstand haben die Sache so weit reifen lassen, bereits die Unterrichtsverwaltung berufen gefühlt hat, selbst ein- n. Der jüngste Erlaß des Unterrichtsministers, betreffend die Um- ıg des Mathematikunterrichtes an Realschulen und Gymnasien, ın, daß mit der versuchsweisen Einführung der Elemente der tial- und Integralrechnung bereits im Schuljahr 1907/1908 be- werden soll. Dadurch sind wir dem ersehnten Ziele weit näher der Gegenstand beginnt greifbare Formen anzunehmen und in o wollen wir hoffen, ist der feste Bogen gebaut, der die tiefe Kluft der Mittelschul- und der Hochschulmathematik überbrücken soll.

—

[1] eitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht, Jahrgang 18, 12.

Da nun jeder berechtigt ist, an dem Baue mitzuhelfen — ja, selbst fordert in seinem Vortrage auf der Breslauer Naturforscher lung die Mittelschule zur eifrigen Mitarbeit auf,[1] — so soll im f innerhalb bescheidener Grenzen ein kleiner Beitrag dem Gegens widmet werden.

Über die Notwendigkeit der Einführung der Unendlichkeits über den Wert und Nutzen derselben liegt so viel wertvolles Mat daß es nicht Aufgabe dieses Aufsatzes sein kann, bereits Gesc und Gesprochenes zusammenzutragen. Hier soll der Gegenstand i deren behandelt werden. Und so habe ich mir denn die Aufgab nachstehende Hauptfragen einer den praktischen Bedürfnissen ent den Behandlung zu unterziehen, teils um das Urteil anderer Fac zu erfahren, teils um der Behandlung des Gegenstandes neue Ar zu geben. Die Fragen sind:

1.) An welcher Stufe und in welcher Weise ist die „Ein vorzunehmen?

2.) In welchem Umfange ist der Gegenstand zu behandeln?

3.) Ist die Behandlung dem Physik- oder dem Mathematik übertragen?

Die Beantwortung aller drei Fragen soll sich stets auf d wärtig dem Gegenstande zur Verfügung stehende Zeit beziehe

I.

In der Einleitung zu seinem Lehrbuche: „Gemeinverständl Einführung in die höhere Mathematik“ [2] schreibt mit vollster Ber H. Leschanowsky: „daß es in der höheren[3] Mathematik vielleicht in jeder anderen Disziplin zunächst darauf ankommt, daß der L ü b e r h a u p t etwas verstehe, und daß das wissenschaftliche V erst dann einzusetzen braucht, wenn derselbe über Zweck, Ziel, M und Eigentümlichkeit des Gegenstandes eine wenigstens ungefäl tierung gewonnen hat“. Der oben angeführte Erlaß fordert „größe sichtigung von Übungsbeispielen, die sich auf das praktische Lebe andere Lehrfächer beziehen“, und Versuche „auch hinsichtlich wendung der Elemente des Differenzierens und Integrierens i unterrichte, besonders in der Mechanik“ vorzunehmen.

[1] Klein: «Die nächste Aufgabe wird nun sein, für die verschiedenen Sc Lehrgänge, die unsere Ideen verwirklichen, im einzelnen auszuarbeiten. Hie mich an Sie mit der Bitte um Hilfe. Denn hier kann der Universitätslehrer keinen Schritt mehr tun, er ist durchaus auf die Unterstützung von seitenpra Schulmänner angewiesen.» Aus A. Höflers oben angeführter Abhandlung, Seit 3.

[2] Wien und Leipzig 1907, Hof-Verlagsbuchhandlung Karl Fromme.

[3] Darunter meint der Verfasser die Differential- und Integralrechnung.

Diese beiden treffenden Anforderungen, die sich gegenseitig ergänzen, en bei der Behandlung der ersten Hauptfrage nicht außer acht gelassen en dürfen. Der mathematische Lehrstoff an unseren Mittelschulen ist t verteilt, daß es weder am Gymnasium noch an der Realschule — und liese Anstalt scheint mir das Bedürfnis nach der Differential- und ralrechnung bei weitem wichtiger — möglich wird, in der fünften e mit den einfachsten Begriffen die Einführung vorzubereiten. Da hat Mathematiklehrer übergenug Arbeit mit bedeutend elementareren n. In der sechsten Realschul- und siebenten Gymnasialklasse erfordert raktisch sehr wertvolle Trigonometrie genug — doch nicht verlorene — Wie sollte nun der Mathematikunterricht, der die Trigonometrie zu praktischen Verwertung im Physikunterrichte durcharbeitet, noch ergeben, um die für die Mechanik wertvolle Unendlichkeitsrechnung noch mitlaufen zu lassen. Es ergeben sich also zwei Notwendigkeiten: inführung der Trigonometrie, die an dieser Stufe für die Mathematik ir die Physik notwendig ist, und die Unendlichkeitsrechnung, die einst- l nur der Physik Vorteile bringt. Die Lösung der ersten Hauptfrage sich daher von selbst:

Der Physiker muß sich das Material, das er cht, selbst beschaffen, er ist berufen, den ndstein zur Unendlichkeitsrechnung zu legen.

Darüber wird der Amtsbruder Mathematiker gewiß nicht ungehalten venn ihm der Physiker eine neue Bürde, die ihm droht, mit Freuden mt. Sollte es jedoch noch jemanden unter den Amtsbrüdern geben, der inen Mathematiker von dem reinen Physiker geschieden wissen will, oll zum Troste anvertraut werden, daß der Physiker schon jetzt oft, ein Wissen, mit ihm die Bürde teilt und ihm das Tragen derselben tert, indem er die in der Mathematik gewonnenen trigonometrischen mitfestigen hilft.

Einem wichtigen Grundsatze der Unterrichtsleitung entsprechend, soll Neues unvermittelt dem Schüler dargeboten werden; um so weniger und darf mit Rücksicht auf die Geistesstufe des Schülers und die rtigkeit des Gegenstandes bei der Ersteinführung der Unendlichkeits- ng ohne gründliche Anleitung und vorsichtige Wahl der Anknüpfungs- vorgegangen werden. Beiden Anforderungen, „etwas verstehen“ und sches Auswerten“, kann durch das Anknüpfen an die Bewegungs- ollkommen entsprochen werden. Da ist gerade die Darstellung der ngslehre in Höflers Lehrbuch vorbildlich. Die Erklärungen der Ge- digkeit und der Beschleunigung nach den Gleichungen

$$v = \frac{s' - s}{t' - t} \quad \text{und} \quad w = \frac{v' - v}{t' - t}$$

führen unmittelbar zum ersten und zweiten Differentialquotient
Anwendung dieser Definitionsgleichungen auf die dem Versuche
lichen besonderen Fälle der gleichförmigen und der gleichmäßig
nigten Bewegung erleichtern das Verständnis und zeigen den pra
Nutzen der höheren Rechnung.

An die Betrachtung der Zeit-Weg-Gesetze

$$s = at, \quad s = at^2 \quad \text{und} \quad s = a \sin at$$

kann auch mit Leichtigkeit der Funktionenbegriff [1] geknüpft wer

Von den einfachen Bewegungsgleichungen ausgehend, kann m
Beobachtung der gleichen Rechnungsmethode auf das Differenzie
Potenzen mit ganzen positiven und dann zu jenen mit negativen
brochenen Exponenten, ohne der für diese Stufe notwendigen Str
Beweisführung Abbruch zu tun, übergehen.

Die dem Versuche entnommene Weg-Zeit-Gleichung für die
gende Bewegung ergibt die Differentialquotienten für die Winkelfu
sin und *cos*.

Bei der Durchübung entsprechender Beispiele — auch sol
der Mechanik [2] — wird der Lehrer genügend Zeit finden, um die be
Benennungen und üblichen Bezeichnungen zu festigen. Die Unt
zwischen den Differentialquotienten und dem Differential werden ei
erörtert werden müssen. Es ist, das sei an dieser Stelle bemerkt, de
für das sogenannte Nichtverstehen der Mathematik [3] — trotz viele
des Lehrers — in dem Nichtvertrautsein der Schüler mit den
begriffen und Bezeichnungen sehr häufig zu suchen.

Sobald nun die Schüler Vertrautheit mit dem Differenzierer
durchgeführten Übungsbeispielen zeigen, dürfte sich erst die allg
Fassung des Differentialquotientbegriffes durch den Grenzwert

$$lim \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}, \quad \text{für} \quad \triangle x = 0$$

empfehlen.

Aus diesem können nach Bedarf und mit Rücksicht auf die ve
Zeit Differentiationen anderer komplizierterer Funktionen hergeleet
den, so z. B. für Produkte und Quotienten von Funktionen, für die
und ähnliches; den Logarithmus und die *e*-Funktion kann man un
weglassen.

[1] Dürfte sich schon früher bei der Besprechung von quadratischen Gle
dem Vorjahre an Realschulen empfehlen, da die Schüler durch die darstellende
mit dem Koordinatenbegriffe vertraut werden.

[2] Auch die Bestimmung des zweiten Differentialquotienten notwendig.

[3] So mancher Fachgenosse wird mir beipflichten, daß man mit vielen Sch
mathematisch sprechen kann, es ist ihnen die Sprache der Mathematik, da
mathematischen Begriffe, vollkommen fremd.

Schließlich sei noch bemerkt, daß man beim Durchüben des Differen-
s der für die Anwendungen wichtigen Bezeichnungen Weg-, Zeit-,
en-, Massen-, Arbeitselement usw. gedenken wird. Besonders wird es
uch empfehlen, die einfachste Form der Differentialgleichung zu
chen, insbesondere aus dem Grunde, weil meines Erachtens nach,
Einflechten gleichzeitig den Übergang zur Integralrechnung bilden
)as Bedürfnis nach der Einführung des Integralbegriffes ergibt sich
von selbst bei der Besprechung der mechanischen Arbeit für ver-
iche Kräfte. Anknüpfend daran sind aus den bereits bekannten
formeln der Differentiation jene für die Integration zu gewinnen.
hier wird ebenso wie bei der Differentialrechnung die Formeln-
ung keine reichhaltige zu sein brauchen.

Nachdem einige Beispiele durchgeübt worden sind, soll gleich wieder
wonnene auf das ausgiebigste ausgenützt werden. Die Auflösung der
oben zu besprechenden Differentialgleichungen soll unter Berück-
ung der einfachsten Annahmen, gestützt auf bekannte Lösungen
r Geometrie und Physik, sofort einsetzen. So kann z. B. aus dem
nelemente die Kreisfläche (Lösung dem Schüler bekannt) oder aus
rägheitsmomente des Flächenelementes das Trägheitsmoment der
äche usw. bestimmt werden. Die Bestimmung des Potentials für
ıtionskräfte wird hier auf kürzer erreichbarem Wege vorgenommen
können.

)ie praktische Auswertung ist — auch schon an dieser Stufe —
is, in keinem Gebiete der Mathematik, eine so reichhaltige, wie
Integralrechnung. Durch die Lösung vieler Aufgaben wird das
se des Schülers einerseits geweckt; anderseits aber erkennt er den
eichlich hohen Nutzen der Unendlichkeitsrechnung.

itzt der Stoff fest, so wird es dem Lehrer ohne Schwierigkeiten
ı, die Begriffe: das bestimmte Integral, das zweifache und, wenn
lig, das dreifache Integral den Schülern verständlich zu machen.
Zeit in diesem ersten Einführungsjahre vorhanden, so können auch
elnen Beispielen die mehrfachen Integrale praktisch ausgewertet
Wenn nicht, so liefert das Vorhandene genügend Übungsmaterial,
Schüler, wie man sieht, mit wenig Mitteln dauernd zu beschäftigen.

II.

as Bedürfnis der Mittelschulphysik bezüglich der Infinitesimal-
ist, wie sich aus dem Vorhergehenden ergibt, ein sehr bescheidenes;
kann sogar behaupten, daß auch die höhere, theoretische Physik mit
Ausnahmen, die sich auf ganz besondere Gebiete beschränken,
r besonders mehr erfordert. Die Beantwortung der Frage nach

dem „Wieviel?“ erscheint daher im früher behandelten Abschnitte die Anknüpfungspunkte zur Ersteinführung besprochen werden, t schon erledigt. Das Festsetzen der oberen Grenze für den durchzuarb Lehr- und Übungsstoff gliedert sich daher naturgemäß unmittelbar früher Besprochene an.

Im zweiten Jahre, in der siebenten Realschulklasse, dient die Rechnung fast ausschließlich nur dem mathematischen Lehrstoff. Erfordernissen der Physik genügt vollkommen die bei der Behandlu ersten Frage gezogene Grenze für das Ausmaß des durchzunehmend stoffes. Handelt es sich jedoch um ein halbwegs planmäßiges Einfüh Unendlichkeitsrechnung, was ja unbedingt angestrebt werden muß, Stoff in einer für sich abgerundeten Form dargeboten werden soll, o mit dem im ersten Jahre durchgenommenen Gegenstande nicl gemacht werden. Der Lehrstoff muß im zweiten Jahre in Form der holung gefestigt, erweitert und sozusagen methodisch geordnet e Dabei ist wieder der Grundsatz: „Nicht zu viel“ obenan zu stell

Der Lehrer wird die Formelnsammlung über das Differenzie Integrieren wiederholen und durch Formeln, die ihm für dies geeignet erscheinen und die sich für den Mathematikunterricht i Klasse als notwendig erweisen, ergänzen. Durch Einführung ei sprechend gewählten Übungsmaterials, teils der Wiederholun anderen Gebieten entnommen — so z. B. die unbestimmten Form Maximum- und Minimumaufgaben, — wird der Lehrer die Schüler bringend beschäftigen, bis er dann, bei der analytischen Geome gekommen, die Differential- und Integralrechnung auf das ausg ausnützen kann. Die Anwendung der Infinitesimalrechnung soll nit die Behandlung der Kegelschnittslinien hinaus ausgestreckt Erstens hat das Besprechen anderer Kurven für die Mittelschule ga Wert und zweitens ermüdet die Vornahme der immer gleichblei Operationen, wenn auch mit anderen Zahlenwerten, die Schüler. Bei Flächenberechnung der Kegelschnitte soll die höhere Mathematik in Mittelschule abschließen.

Aus dem Gesagten geht also hervor, daß sich die U lichkeitsrechnung nur auf die Bedürfnisse d mentaren Physik und Geometrie der Mittels beschränken soll.

Schließlich wird bei einer halbwegs vollständigen Behandlung zweiten Hauptfrage naturgemäß auch das Ausmaß der wöchentli Stundenzahl für den Gegenstand selbst und die Wahl eines Le in Erwägung zu ziehen sein.

---

[1] Analytische Geometrie.

Im heurigen Schuljahre, in welchem ich das zweitemal Gelegenheit ɔt habe, nach der Naturlehre von Höfler in der sechsten Klasse zu richten, habe ich, angeregt durch das Lehrbuch und den Gegenstand, Versuch unternommen, die Unendlichkeitsrechnung einzuführen, und mit den Schülern, die sich freiwillig dazu gemeldet haben. Hätte ich ıt, welche Dinge bezüglich der höheren Mathematik die Unterrichts-de vorbereitet, so hätte ich mir gewiß leicht die Arbeit so eingerichtet, ɔhne Schädigung des Physikunterrichtes und ohne in irgend welcher e einen Zwang auszuüben, allen Schülern dieser Klasse Vorteile ɔhsen wären. Dadurch wären wir schon im nächsten Jahre in die ɛehme Lage versetzt worden, von bereits gemachten Erfahrungen und gen sprechen zu können. Die Zuhörerschaft bei diesen „Vorlesungen" eine zahlreiche,[1] doch eine gewählte, da sich in den oberen Klassen zu Freigegenstande nur Schüler, die für den Gegenstand besondere Lust Vorliebe besitzen, melden. Der Lehrvorgang war genau so, wie er im Abschnitte dieses Aufsatzes gekennzeichnet ist. Bei dieser geringen ıl aufmerksamer und fleißiger Schüler war es möglich, den vor-hneten Lehrstoff in etwa 14 Stunden durchzunehmen und durch-n. Und der Erfolg? Ich muß gestehen: um die Arbeit und die Mühe r nicht leid!

Bei gutem Schülermaterial und geringer Teilnehmerzahl ist die , wie es die Erfolge bei diesem ersten Versuche zeigen, nicht so ndlich. Soll jedoch mit der höheren Rechnung als Pflichtgegenstand etzt werden, so muß für dieses Fach eine wöchentliche Stundenzahl ɛetzt und auch festgehalten werden. Und da glaube ich, wird eine Gegenstande allein gewidmete Lehrstunde in Woche ausreichen, um den Lehrstoff in dem beschriebenen, idenen, den Bedürfnissen der Mittelschule entsprechenden Rahmen ɪarbeiten. Eine Mehrbelastung der Schüler, besonders an der Real-würde wohl nicht ratsam erscheinen.

Von den Lehrbüchern über die sogenannte elementare Einführung in ıendlichkeitsrechnung liegen mir drei vor, und zwar: das bereits ıte Lehrbuch von H. Leschanowsky, dann von Dr. R. Schröder, or der Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde, Anfangsgründe der ntialrechnung und Integralrechnung,[2] und von dem Realschul-or in Olmütz L. Tesař, Elemente der Differential- und Integral-ng.[3] Für die Mittelschulzwecke kommen von diesen Büchern nur die letzteren in Betracht, da das Lehrbuch Leschanowskys nach der

[1] Am Schlusse nur 10 Schüler, am Anfange haben sich mehrere gemeldet.
[2] Leipzig und Berlin, Teubner, 1905.
[3] Leipzig und Berlin, Teubner, 1906.

ganzen Anlage für die Ersteinführung in die höhere Mathemat
Studierenden an der Technik und Universität bestimmt ist.

Was die beiden für die Mittelschule bestimmten Lehrbüch
Schröder und Tesař betrifft, kann weder das eine noch das andere k
heutigen Stande der Lehrstoffverteilung an der Mittelschule eing
beziehungsweise mit Nutzen verwendet werden, da sie trotz der V
die in der leichtfaßlichen Darstellung des Gegenstandes bestehen, z
angelegt sind.

Es liegt mir dabei natürlicherweise ganz ferne, an den
Büchern Kritik zu üben; im Gegenteile sind wir Mittelschullehr
besonders in Österreich — infolge der einsichtsvollen, oben ange
behördlichen Verfügung den Verfassern zu Dank verpflichtet, da
denjenigen Lehrern, die im nächsten Schuljahre mit der versuch
Einführung der Differential- und Integralrechnung betraut werden
durch die bereits vorhandenen Lehrbehelfe viel Mühe zur Sammlu
Sichtung des durchzuarbeitenden Lehrstoffes erspart werden wird. n
beiden Büchern erscheint so viel wertvollles Material mit besonderer Sor
zusammengetragen, daß jeder Lehrer das ihm kostbar scheinende
enthalten findet.[1] Die beiden angeführten Bücher werden bei dem hu
Stande der Dinge dem Lehrer ganz besondere Dienste leisten; dem sch
dagegen dieselben in die Hand zu geben, wäre meines Erachtens na
verfrüht.[2] Die Gründe, die zu dieser Behauptung führen, sind n
liegend. Erstens einmal lehrt die Erfahrung, daß die Schüler, bon
die aufgeweckteren, den Reiz der Neuheit genau zu schätzen wis
liegt daher die Gefahr sehr nahe, daß diese Schüler durch den neuen
stand, der doch nur innerhalb engerer Grenzen behandelt werde
von ihrer Pflichtarbeit, welche die Schule zur Erlangung der allge
Bildung von ihnen verlangen muß, abgelenkt werden. Dabei s
bemerkt, daß der Nutzen, der den Schülern beim Selbststudium der
erwächst, kein besonderer ist, da sie doch zum genauen Verständn
Gegenstandes der Anleitung durch den Lehrer, die aber in diese
ausbleiben muß, bedürfen. Ein zweiter Grund, der die obige Behau
bekräftigen soll, liegt darin, daß viele schwächere Schüler durch d
des vollkommen fremden Lehrstoffes abgeschreckt werden und dadu
zu erhoffende Erfolg bedeutend abgeschwächt wird. Außer diesen
Gründen werden sich gewiß noch andere finden lassen.

Bei der versuchsweisen Einführung der Unendlichkeitsrechnung
der im nächsten Schuljahre begonnen werden soll, wird sich, insofe
nichts Neues geschaffen werden kann und die Lehrstoffverteilu

[1] Bei Schröder eine sorgfältig zusammengestellte, reichhaltige Aufgabensamm
Lösungen, bei Tesař viele Anwendungen aus der Geometrie und Physik.

[2] Nach der Reifeprüfung überlasse ich ihnen die Bücher mit Freuden.

ung erfährt, empfehlen, den Gegenstand ohne Lehrbuch[1] vor-
nen und den Schüler nur auf seine Aufschreibungen
nmerkungshefte zu verweisen.

Schließlich darf doch nicht des Dankes vergessen werden, der den
sern, trotzdem sie bei der Abgrenzung des Lehrstoffes derzeit zu weit
olt haben, dafür gebührt, daß sie mit oder ohne Absicht der künftigen
chule, die, den modernen Bedürfnissen entsprechend, unbedingt auf
giebigere Pflege der Naturwissenschaften bedacht sein muß, den Weg
iten. Es ist doch selbstverständlich, daß an dieser neuen Mittelschule,
e vielleicht auch schon einheitliche Mittelschule heißen, der Mathe-
nterricht, besonders aber die Anwendung der in dem Mathematik-
chte gewonnenen Sätze, in den Vordergrund rücken muß.

III.

)ie dritte Frage, ob dem Lehrer der Mathematik oder dem der
die Behandlung des Gegenstandes übertragen werden soll, erscheint
ch schon erledigt. Die Ersteinführung durch die Physik obliegt, wie
rständlich, dem Physikunterrichte, die Festigung und der metho-
oder besser der wissenschaftlichere Ausbau des Gegenstandes dem
atikunterrichte. Daher werden sich auch, wenn der Mathematik-
ysikunterricht nicht in einer Hand vereinigt ist, was an der Real-
ur in seltenen Fällen vorkommen kann, die Lehrer die Arbeit bei
ng der gestellten Aufgabe teilen müssen.

emnach besorgt der Physiker die Erstein-
ng in den Gegenstand und der Mathematiker
estigung des durch die Physik gewonnenen
ials.

llte ich mit dieser neuen Behauptung wieder auf den etwa vor-
n Widerspruch des Amtsbruders Mathematikers stoßen, der ja
end mit Recht verlangen wird, daß der reine mathematische Lehr-
die Differential- und Integralrechnung — dem Unterrichte in der
lathematik anzugliedern ist, so muß dem entgegengehalten werden,
Mechanik genau so wie die Geometrie als ein besonderer Abschnitt
wandten Mathematik zu betrachten ist, und daher es als vollkommen
tig erscheinen wird, ob wir durch die Geometrie oder durch die
x die Einführung der Unendlichkeitsrechnung besorgen. Für uns
littelschule wird es sich nur darum handeln, zu erwägen, welcher
beiden zu betretenden Wegen erstens die Arbeit erleichtert und
mit größerem Nutzen für die Schüler zum gewünschten Erfolge
—

[1] sdrücklich Lehrbuch, Hilfsbücher, Aufgabensammlungen, sind darunter nicht

führt. Und da muß die Wahl des einzuschlagenden Vorganges ga
schieden zugunsten der Mechanik ausfallen, und zwar aus dem
weil sie in der vorletzten Mittelschulklasse schon über bedeutend
Hilfsmittel verfügt als die Geometrie, bei der nur nach vorherg
Besprechung der Kurven die Einführung einsetzen kann.

Möge aber auch durch dieses Eingreifen des Physikers in die
des Mathematikers diesem ein kleiner Gegendienst dafür erwiesen
daß er die Schüler in nicht ganz müheloser Weise in die ebene und sph
Trigonometrie, die für den Physikunterricht von überaus schätzbarer
ist, einführt.

Es mag sein, daß mich zu der angeführten Auffassung der Sc
das persönliche Interesse zum Gegenstande drängt. Mag sein, doch
schließe ich mich auch nicht der gegenteiligen Meinung, die vielleh
streng wissenschaftliches Einführen der Unendlichkeitsrechnung
Mittelschule fordert; doch möchte ich zu bedenken geben, ob wir nh
Geisteskräfte unserer sechzehn- bis siebzehnjährigen Schüler übersiä
wenn wir ganz gesondert von jedem anderen Gegenstande die höhere M
matik, ähnlich so wie es auf der Hochschule der Fall ist, mit den Sh
durcharbeiten wollten. Ich glaube, wir müssen auch in diesem Gegs
auf der mittleren Stufe die Methode, nach der wir vorgehen sollh,
Alter der Schüler entsprechend einrichten, wenn wir nicht die Gru
des modernen Unterrichtes über den Haufen werfen wollen.

Das Einflechten der höheren Mathematik in die Physik, o
ein engerer Anschluß der reinen Mathematik an die übrigen vera
Lehrgegenstände bewirkt wird, entspricht aber auch ganz der Absht
bis jetzt noch viel zu theoretisch behandelte Mittelschulmathematikin
angewandte, den praktischen Bedürfnissen angepaßte Mathemak
zugestalten.

Wenn ich nun schließlich meinem persönlichen Eindrucke, le
höhere Mathematik auf mich gemacht hat, Raum gebe, so muß ich st
daß ich erst durch die Mechanik, die ich an der technischen Hchs
betrieben habe, in die höhere Mathematik eingeführt worden in
dadurch ihren unvergleichlich hohen Wert kennen und schätzen ge
habe. Sollte es bei unseren Schülern anders sein? Darüber hege ich
berechtigte Zweifel!

Mit diesen Ausführungen erscheint der Gegenstand, wie eingeg
war, erledigt. Es erübrigt nur noch eine kurze Zusammenfassung der
den Betrachtungen sich ergebenden Gesichtspunkte, nach welche de
bei der Einführung der Unendlichkeitsrechnung etwa vorzugehn

Die Antworten auf die eingangs angeführten drei Hauptfragen er-
sich daher nachstehend:

1.) Hat die Einführung der Unendlichkeits-
nung im vorletzten Mittelschuljahre zu er-
en; diese Einführung soll dem Physikunter-
te vorbehalten werden.

2.) Ist der Umfang des Lehrstoffes bei je einer
de mehr wöchentlichen Unterrichtes in den
en obersten Klassen unter Ausschluß eines
nderen Lehrbuches auf die Bedürfnisse der
entaren Physik und Geometrie zu beschränken.

3.) Soll die Einführung der Unendlichkeits-
nung im ersten Schuljahre dem Physik-, im
ten Schuljahre dem Mathematikunterrichte
gliedert werden.

Mit diesem kleinen Aufsatze habe ich mich, wie schon in der Ein-
hervorgehoben wurde, an die Fachgenossen gewendet, um deren
und Meinung über den Gegenstand zu erfahren. Daher bitte ich
lie hier festgelegten Grundzüge einer der Sache nur nützenden
ung zu unterziehen, damit wir auf dem Wege, den wir nun be-
n, rüstig vorwärts streben. Trägt jeder etwas bei, so
ler Bau gelingen!

Schulnachrichten.

I. Personalstand des Lehrkörpers; Lehrfächerverte

a) Veränderungen während des Schuljahres 1906/0

Der Herr Minister für Kultus und Unterricht hat den Probek Dr. Ludwig **Gauby** mit dem Erlasse vom 29. August 1906, Z. 33.24 provisorischen und mit dem Erlasse vom 9. April 1907, Z. 12.950, zu lichen Lehrer an dieser Anstalt ernannt. — Für die Zeit der Beurlaub Professors Albin **Belar** wurde der Lehramtskandidat Karl **Breuer** zum Su bestellt (Landesschulrats-Erlaß vom 18. März 1907, Z. 1362). — Der A assistent Wilhelm **Fischinger** kam in gleicher Eigenschaft an die Staa realschule in Teplitz-Schönau; diese Stelle wurde durch den akademischen Peter **Šmitek** (**Žmitek**) besetzt (Landesschulrats-Erlaß vom 19. Dezemb Z. 6516). — Der Lehramtskandidat Dr. Guido **Sajovic** wurde zur Prü an dieser Anstalt zugelassen und dem Professor Josef **Wentzel** zur Eff in das praktische Lehramt zugewiesen (Landesschulrats-Erlaß vom 8 F 1907, Z. 646).

b) Beurlaubungen.

Professor Albin **Belar** wurde zur Ausführung wissenschaftlicher Ar für das zweite Semester des Schuljahres 1906/07 beurlaubt (Ministe vom 16. Februar 1907, Z. 4817). — Die Lehrverpflichtung des Pro Dr. Josef Julius **Binder** wurde behufs Leitung der deutschen Privat-Leh Bildungsanstalt auf fünf bis sechs wöchentliche Unterrichtsstunden (Mi Erlaß vom 6. August 1906, Z. 25.445) und die des Professors Dr. Max **Mandl** zum Zwecke der Verfassung eines wissenschaftlichen Werkes auf Stunden wöchentlich auf die Dauer des Schuljahres 1906/07 herabge Kaiserlicher Rat Professor Johann **Franke** wurde vom 8. April 1907 a bis Schlusse des Schuljahres krankheitshalber beurlaubt (Ministerial-Erlaß vo 2 1907, Bl. 17.131).

c) Personalstand am Schlusse des Schuljahres 1906/07

Direktor.

1.) Dr. Rudolf **Junowicz** (VI. Rgkl.), Schulrat, Mitglied des k. L schulrates, lehrte Naturgeschichte in I. b., VI., wöch. 4 St., und Stenogra Freigegenstand, wöch. 3 St.

Professoren und Lehrer.

2.) Justus **Baroni**, k. k. prov. Lehrer, Klassenvorstand der V. a., lehrte Sprache in V. a., VI., VII., italienische Sprache in V. a., VI., VII., wöch. 1 St Italienisch als Freikurs im I. Kurse, wöch. 2 St.

3.) Albin **Belar**, k. k. Prof. (VIII. Rgkl.), k. k. Bezirksschulinspektor für die ien Volksschulen in Laibach, Weißenfels, Domžale, Görtschach und Josefstal für die Bürgerschule in Gurkfeld, k. k. Leutnant i. d. E. des 23. L.-I.-R. Kustos der chem. Lehrmittelsammlung, Prüfungskommissär bei der Prüfungs- sion für Bewerber zum Einjährigfreiwilligendienste, Korrespondent der anstalt für Meteorologie und Geodynamik, Leiter der Erdbebenwarte, it der Erdbebenkommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften (für ien), beeideter Gerichtschemiker, lehrte im ersten Semester Chemie in IV. a., V. a., V. b., VI. und analytische Chemie als Freigegenstand im I. und se, wöch. 18 Stunden, im zweiten Semester beurlaubt.

.) Dr. Josef Julius **Binder**, k. k. Prof. (VII. Rgkl.), Kustos der Lehrer- ek, Leiter der deutschen Privat-Lehrerinnenbildungsanstalt, lehrte bei minderter Lehrverpflichtung Geographie und Geschichte in V. a., V. b., St.

.) Dr. Ludwig **Gauby**, k. k. wirkl. Lehrer, Klassenvorstand der III. a., lehrte e Sprache in III. a., III. b., IV. b., Französisch in III. a., wöch. 17 St.

.) Johann **Franke**, kaiserlicher Rat, k. k. Prof. (VII. Rgkl.), Kustos der tel für das Freihandzeichnen, Konservator der Kunst- und historischen ler im Herzogtume Krain, lehrte bis zum 8. April Freihandzeichnen in b., I. c., IV. a., IV. b., VI., wöch. 21 St.

) Friedrich **Juvančič**, k. k. wirkl. Lehrer, Besitzer des kaiserlich persischen und Löwenordens III. Klasse, Prüfungskommissär für die franz. Sprache Prüfungskommission für allgemeine Volks- und Bürgerschulen, beeideter ch der franz. Sprache beim Landesgerichte in Laibach, Klassenvorstand b., lehrte franz. Sprache in III. b., IV. a., IV. b., V. b., wöch. 16 St.

) Franz **Keller**, k. k. Prof. (VII. Rgkl.), Kustos der Programmsammlung, skommissär für geometrisches Zeichnen bei der Prüfungskommission für ie Volks- und Bürgerschulen, Klassenvorstand der VI., lehrte Mathematik V. a., VI., geometrisches Zeichnen in II. a., II. c. und darstellende Geo- a VI., wöch. 19 St.

) Dr. Maximilian **Mandl**, k. k. Prof. (VIII. Rgkl.), lehrte bei herab- ter Lehrverpflichtung Mathematik und Physik in VII., wöch. 9 St., und als Freigegenstand, wöch. 4 St.

Josef **Mazi**, k. k. wirkl. Lehrer, Klassenvorstand der V. b., lehrte geo- s Zeichnen in III. a., III. b., IV. a., IV. b., darstellende Geometrie in V. a., II., wöch. 18 St., und Slowenisch als Freigegenstand im I. Kurse, St.

Michael **Opeka**, k. k. Prof. (Phil. und Theol. Doktor der Gregorianischen ät in Rom), lehrte kath. Religion in I. a., I. b., I. c., II. a., IV. a., IV. b., ., VI., VII. und hielt die Exhorte für die oberen Klassen ab, wöch. 21 St.

Milan **Pajk**, k. k. Prof., Kustos der geographischen Lehrmittelsammlung, rstand der VII., lehrte Geographie und Geschichte in III. b., IV. a., IV. b., wöch. 18 St.

Dr. Andreas Otto **Puschnig**, k. k. wirkl. Lehrer, Klassenvorstand der rte deutsche Sprache in II. a., V. a., V. b., VI., VII., wöch. 17 St.

Karl **Schrautzer**, k. k. Prof., k. k. Leutnant i. d. E. des 27. L.-I.-R. Kustos der Lehrmittelsammlung für Physik, Klassenvorstand der IV. b., thematik in V. b., Physik in III. a., III. b., IV. a., IV. b., VI., wöch. 19 St.

15.) Alois **Tavčar**, k. k. Prof. (VIII. Rgkl.), Kustos der slowenischen bibliothek, Klassenvorstand der II. c., lehrte slowenische Sprache in II. c. IV. b., V. b., VI., VII., wöch. 17 St., und Slowenisch als Freigegenstand im II wöch. 3 St.

16.) Josef **Wentzel**, k. k. Prof. (VIII. Rgkl.), (Phil. Doktor der U in Straßburg), Kustos der Naturhistorischen Lehrmittelsammlung, lehrte geschichte in I. a., I. c., II. a., II. b., II. c., V. a., V. b., VII., wöch. 17 S

17.) Karl **Werner**, k. k. Prof., lehrte Freihandzeichnen in II. b., III. V. a., V. b., VII., wöch. 22. St. und vom 8. April noch in der IV. b., wöc

18.) Franz **Brunet**, k. k. Prof., unterrichtete das Turnen in allen wöch. 28 St.

Supplenten.

19.) Karl **Breuer**, lehrte im zweiten Semester Chemie in IV. a., IV. V. b., VI. und analytische Chemie als Freigegenstand im I. und II. Kurse, wö

20.) Anton **Koželj**, Klassenvorstand der II. b., lehrte Freihandzei II. a., II. c., geometrisches Zeichnen in II. b. und Schönschreiben in I. a., I II. c., wöch. 16 St. und vom 8. April noch IV. a., VI., wöch. 22 St.

21.) Karl **Kunc**, Probekandidat und Supplent, lehrte Arithmetik I. c., wöch. 8 St.

22.) Dr. Karl **Lončar**, Klassenvorstand der I. b., lehrte slow. Sprach I. c., II. b., deutsche Sprache in I. b., I. c., wöch. 20 St., und Slowenisch gegenstand im II. Kurse, wöch. 3 St.

23.) Walther **Obrist**, Klassenvorstand der IV. a., lehrte Geogra Geschichte in II. a., II. b., II. c. und deutsche Sprache in I. a., IV. a., wö

24.) Dr. Heinrich **Svoboda**, Kustos der Schülerbibliothek, Klasse der I. c., lehrte Geographie in I. a., I. b., I. c., Geographie und Geschichte und deutsche Sprache in II. b., II. c., wöch. 21 St.

25.) Franz **Vajda**, k. u. k. Leutnant i. d. R. d. k. u. k. Inf.-R. Nr. 17 K vorstand der I. a., lehrte Arithmetik in I. a., II. b., II. c., III. a., III. b., IV. wöch. 22 St.

26.) Dr. Josef **Jerše**, Domvikar, lehrte kath. Religion in II. b., II. III. b. und hielt die Exhorte für die unteren Klassen ab, wöch. 10 St.

Hilfslehrer.

27.) Dr. Ottmar **Hegemann**, evangelischer Pfarrer, lehrte evan Religionsunterricht als Privatunterricht in zwei Kursen zu je 2 St.

Assistenten.

28.) Johann Josef **Klein**, Assistent beim Zeichenunterrichte in I. c., IV. a., IV. b., VI., wöch. 22 St.; vom 8. April in II. a, IV. a., VI. un in I. a., I. b., I. c., wöch. 22 St.

29.) Peter **Šmitek**, Assistent beim Zeichenunterrichte in II. b., III. V. a., VII. und vom 8. April noch in I. a., IV. b., wöch. 24 St.

Nebenlehrer.

30.) Josef **Pavčič**, Volksschullehrer, aus Gesang für Mittelschule lehrte Gesang als Freifach, wöch. 4 St.

Dienerschaft.

Schuldiener: Johann **Skubè** und Josef **Simončič**; Hausmeister: Ant

II. Lehrverfassung.

a) Obligate Lehrgegenstände.

er Unterricht in den obligaten Lehrgegenständen wurde nach dem mit ialverordnung vom 23. April 1898, Z. 10.331 (M. V. Bl. Nr. 14), kund- en **Normallehrplane** erteilt; nur der Lehrplan für die **französische Sprache** it dem Erlasse des k. k. Landesschulrates vom 24. Februar 1899, Z. 504, k. k. Staats-Oberrealschule in Laibach, den hiesigen Verhältnissen angepaßt, nd von dem **Normallehrplane,** dahin abgeändert, daß mit dem Unterrichte anzösischen Sprache erst in der dritten Klasse begonnen werde. Der aus- Lehrplan wurde in dem Jahresberichte für das Schuljahr 1898/99 ver- t.

s **Slowenische** wurde in dem bisherigen Stundenausmaße gelehrt.

b) Freie Lehrgegenstände.

Slowenische Sprache für Nicht-Slowenen. Um Schülern, für welche das he kein obligater Gegenstand ist, Gelegenheit zu bieten, sich die Kenntnis nischen Sprache anzueignen, hat das k. k. Min. f. K. u. U. mit dem Erlasse September 1880, Z. 13.777, die Errichtung eines slowenischen Freikurses, aus 3 Jahrgängen mit je 3 Unterrichtsstunden wöchentlich, angeordnet Lehrplan genehmigt.

Italienische Sprache. Das k. k. Min. f. K. u. U. hat mit dem Erlasse vom nber 1901, Z. 33.575, genehmigt, daß für Schüler slowenischer sprache von der IV. bis VII. Klasse ein Freikurs für den italienischen terricht in 3 aufsteigenden Abteilungen zu je 2 wöchentlichen Stunden werde und daß die Eröffnung dieses Freikurses vom Schuljahre 1902/03 ssive zu erfolgen hat.

Englische Sprache. Laut Erlaß des k. k. Min. f. K. u. U. vom 16. Oktober 24.853, wurde im Schuljahre 1902/03 der Freikurs für die englische in 2 Abteilungen mit je 2 wöchentlichen Unterrichtsstunden genehmigt.

Gesang. Dieser Unterricht wurde in 4 Stunden wöchentlich erteilt. Hievon Stunden auf den I. Kurs, je 1 Stunde auf den II. Kurs A (Knabenchor), rchor), A und B zusammen (gemischter Chor).

Stenographie. I. Kurs: Wortbildungs- und Wortkürzungslehre, mit Lese- ibübungen verbunden, in 2 Abteilungen, wöch. je 2 Stunden; II. Kurs: gslehre, wöch. 1 Stunde.

Analytische Chemie. Infolge der Verordnung des k. k. Min. f. K. u. U. uli 1894, Z. 1352, werden zu diesem Unterrichte Schüler der drei letzten er Oberrealschule zugelassen.

Infinitesimalrechnung. In etwa 12 bis 14 Unterrichtsstunden haben r der VI. Klasse an Vorträgen des Professors Karl Schrautzer über l- und Integralrechnung freiwillig teilgenommen. Anschließend an die echanik gewonnenen Begriffe wurde der Lehrstoff, der im ersten Ab- s Jahresberichtsaufsatzes festgesetzt erscheint, behandelt. Der Unterricht keine besonderen Verfügungen der Unterrichtsbehörde eintreffen, im chuljahre fortgesetzt werden.

Stundenübersicht

nach den genehmigten Lehrplänen für die k. k. Staats-Oberrealschule in Lai

Lehrgegenstände	Wöchentliche Stundenzahl in der										
	I. a.	I. b., c.	II. a.	II. b., c.	III. a.	III. b.	IV. a.	IV. b.	V. a.	V. b.	VI.
	Klasse										
Religion	2	4	2	4	2	2	2	2	2	2	2
Deutsche Sprache	4	8	4	8	4	4	4	4	3	3	3
Slow. Sprache (obligat)	—	8	—	8	—	2	—	2	—	3	3
Französische Sprache	—	—	—	—	5	5	4	4	3	3	3
Italienische Sprache	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	3
Geographie	3	6	2	4	2	2	2	2	—	—	—
Geschichte	—	—	2	4	2	2	2	2	3	3	3
Mathematik	4	8	3	6	3	3	3	3	5	5	4
Darstellende Geometrie	—	—	—	—	—	—	—	—	3	3	3
Naturgeschichte	2	4	2	4	—	—	—	—	2	2	2
Physik	—	—	—	—	3	3	2	2	—	—	4
Chemie	—	—	—	—	—	—	3	3	3	3	2
Geometrie und geometrisches Zeichnen	—	—	2	4	2	2	3	3	—	—	—
Freihandzeichnen	4	8	4	8	4	4	4	4	3	3	2
Schönschreiben	1	2	1	2	—	—	—	—	—	—	—
Turnen	2	4	2	4	2	2	2	2	2	2	2
Zusammen	22	52	24	56	29	31	31	33	32	32	36

III. Lehrbücher,

welche mit Genehmigung des k. k. Landesschulrates vom 23. Mai 1907, Z. 38, im Schuljahre 1907/08 beim Unterrichte benützt werden.

Der Gebrauch anderer als der unten angegebenen Auflagen ist urc nicht gestattet.

In der **I. Klasse**: Großer Katechismus. — Veliki Katekizem. — Wi Deutsche Grammatik. 12. bis 9. Aufl. — Neumann Fr., Deutsches Les Unterrealschulen. I. Teil. 5. und 4. Aufl. — Sket, Janežičeva slov. slovna. 9. Aufl. — Sket, Slov. čitanka za I. razr. I. del. Nur 2. Aufl. — Supan, der Geographie für die österr. Mittelschulen. 11. bis 9. Aufl. — Kozenn phischer Atlas für Mittelschulen. 41. bis 39. Aufl. — Močnik, Arithmetik Unterrealschulen. 1. Heft 24. bis 22. Aufl. — Menger, Geometrische Fore 5. und 4. Aufl. — Pokorny, Tierreich. 28. Aufl. — Pokorny, Pfla 24. Aufl.

In der **II. Klasse**: Großer Katechismus. — Veliki Katekizem. — W Deutsche Grammatik. 11. bis 9. Aufl. — Neumann Fr., Deutsches Les Unterrealschulen. II. Teil. 5. und 4. Aufl. — Sket, Janežičeva slov. slov 9. Aufl. — Sket, Slov. čitanka za II. razr. II. del. 2. Aufl. — Supan, der Geographie. 11. bis 9. Aufl. — Gindely, Altertum. 13. bis 10. Aufl. — Geographischer Atlas für Mittelschulen. 41. bis 39. Aufl. — Schuber Historisch-geographischer Schulatlas, Ausgabe für Realschulen. — Močn metik für Unterrealschulen. 2. Heft. 22. und 21. Aufl. — Menger, Grun Geometrie. 7. und 6. Aufl. — Pokorny, Tierreich. 28. Aufl. — Pokorny, reich. 24. Aufl.

der III. Klasse: Fischer, Geschichte der göttlichen Offenbarung des Alten 10. bis 7. Aufl. — Willomitzer, Deutsche Grammatik. 11. bis 9. Aufl. — ı Fr., Deutsches Lesebuch für Unterrealschulen. III. Teil. 3. und 2. Aufl. Janežičeva slov. slovnica. 8. Aufl. — Sket, Slov. čitanka za III. razr. — Weitzenböck, Lehrbuch der französischen Sprache. I. Teil. 6. bis 2. Aufl. n, Lehrbuch der Geographie. 11. bis 9. Aufl. — Gindely, Mittelalter. 1. Aufl. — Kozenn, Geographischer Atlas für Mittelschulen. 39. und 38. Aufl. ert-Schmidt, Historisch-geographischer Schulatlas. Ausgabe für Realschulen. ik, Arithmetik für Unterrealschulen. 3. Heft, 21. und 20. Aufl. — Menger, re der Geometrie. 7. und 6. Aufl. — Mach-Habart, Grundriß der Natur- die unteren Klassen der Mittelschulen, Ausgabe für Realschulen. 4. Aufl. der IV. Klasse: Fischer, Geschichte der göttlichen Offenbarung des Neuen 10. bis 8. Aufl. — Willomitzer, Deutsche Grammatik. 10. und 9. Aufl. — Fr., Deutsches Lesebuch für Unterrealschulen. IV. Teil. 3. und 2. Aufl. Janežičeva slov. slovnica. 8. Aufl. — Sket, Slov. čitanka za IV. razr. — ck, Lehrbuch der französischen Sprache in 2 Teilen. 5. bis 2. Aufl. — ehrbuch der Geographie. 10. und 9. Aufl. — Gindely, Neuzeit. 11. und — Kozenn, Geographischer Atlas für Mittelschulen. 39. und 38. Aufl. — Schmidt, Historisch-geographischer Schulatlas. Ausgabe für Realschulen. — , Arithmetik und Algebra für die oberen Klassen der Mittelschulen. 5. Aufl. czka, Übungsbuch der Arithmetik und Algebra für die oberen Klassen lschulen. 7. bis 4. Aufl. — Menger, Grundlehre der Geometrie. 7. und — Mach-Habart, Grundriß der Naturlehre für die unteren Klassen der len, Ausgabe für Realschulen. 4. und 3. Aufl. — Hemmelmayer und Lehrbuch der Chemie und Mineralogie. 2. und 1. Aufl.

ler V. Klasse: Fischer, Kirchengeschichte. 8. bis 6. Aufl. — Jauker und sches Lesebuch für die oberen Klassen der Realschulen. I. Teil. 5. und — Sket, Janežičeva slov. slovnica. 8. Aufl. — Sket, Berilo za V. in 3. Aufl. — Weitzenböck, Lehrbuch der französischen Sprache. 2. Teil. Aufl. — Plötz, Schulgrammatik der französischen Sprache. 33. und Ausgabe für Österreich. — Marchel, Italienische Grammatik. 3. und Supan, Lehrbuch der Geographie. 10. und 9. Aufl. — Rebhann, Zeehes der Geschichte des Altertums für die oberen Klassen der Realschulen. Aufl. — Stieler, Schulatlas. 72. und 71. Aufl. — Schubert-Schmidt, geographischer Schulatlas, Ausgabe für Realschulen. — Gajdeczka, Übungsbuch in der Arithmetik und Algebra wie in der IV. Klasse. — ehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen. 2. Aufl. r, Leitfaden für den Unterricht in der darstellenden Geometrie. 2. Aufl. ko, Vorschule der Botanik. 7. und 6. Aufl. — Hemmelmayer, Lehrbuch nischen Chemie. 3. bis 1. Aufl.

er VI. Klasse: Kühnl, Lehrbuch der katholischen Religion für die ssen der Realschulen. I. Teil. Glaubenslehre. 8. Aufl. — Jauker und sches Lesebuch. II. Teil. 6. und 5. Aufl. — Jauker und Noë. Mittel- es Lesebuch für Oberrealschulen. 4. bis 2. Aufl. — Lessing, Mina von nd Emilia Golotti. — Shakespeare, Julius Cäsar. — Sket, Janežičeva a. 8. Aufl. — Sket, Berilo za V. in VI. razr. 3. Aufl. — Sket, Slov. VII. in VIII. razr. 2. Aufl. — Pajk, Izbrane narodne srbske pesni z do- «Smrti Smail-age Čengijića». — Bechtel, Französische Chrestomathie. Aufl. — Plötz, Schulgrammatik der französischen Sprache. 33. und Ausgabe für Österreich. — Marchel, Italienische Grammatik. 3. Aufl.

— Marchel, Letture italiane. 2. Aufl. — Supan, Lehrbuch der Geographie. 9. Aufl. — Rebhann, Zeehes Lehrbuch der Geschichte des Mittelalters für oberen Klassen der Realschulen. 2. und 1. Aufl. — Stieler, Schulatlas. 71. Aufl. — Schubert-Schmidt, Historisch-geographischer Schulatlas, Ausg Realschulen. — Gajdeczka, Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik und wie in der IV. Klasse. — Hočevar, Geometrie und Übungsaufgaben wie V. Klasse. — Schiffner, Leitfaden für den Unterricht in der darstellenden Ge 2. Aufl. — Woldřich, Zoologie. 9. und 8. Aufl. — Höfler, Naturlehre für stufe der Gymnasien, Realschulen und verwandter Lehranstalten. — Hemm Lehrbuch der organischen Chemie. 3. bis 1. Aufl.

In der **VII. Klasse**: Kühnl, Lehrbuch der katholischen Religion f oberen Klassen der Realschulen. II. Teil. Sittenlehre. — Jauker und Noë, Le Lesebuch. III. Teil. 6. und 5. Aufl. — Goethe, Hermann und Dorothea und hi auf Tauris. — Lessing, Laokoon. — Schiller, Don Karlos. — Grillparze Ottokars Glück und Ende. (Schulausgabe Graeser.) — Sket, Janežičeva slov. o 8. Aufl. — Sket, Slov. čitanka za VII. in VIII. razr. 2. Aufl. — Bechte zösische Chrestomathie. 5. und 4. Aufl. — Plötz, Schulgrammatik der fran Sprache. 33. und 32. Aufl., Ausgabe für Österreich. — Marchel, Ita Grammatik. 2. Aufl. — Marchel, Letture italiane. 2. Aufl. — Supan, Lehrb Geographie. 10. und 9. Aufl. — Hannak, Österr. Vaterlandskunde für di Klassen. 14. bis 11. Aufl. — Rebhann-Zeehes Lehrbuch der Geschichte zeit für die oberen Klassen der Realschulen. 1. Aufl. — Stieler, Schulatlas. 71. Aufl. — Putzger, Historischer Schulatlas. 21. und 20. Aufl. — Gi Lehr- und Übungsbuch wie in der VI. Klasse. — Hočevar, Geometrie und buch wie in der V. Klasse. — Schiffner, Leitfaden für den Unterricht in darstellenden Geometrie. 2. Aufl. — Hochstetter und Bisching, Mineralo Geologie. 19. bis 15. Aufl. — Höfler, Naturlehre wie in der VI. Klasse.

Für **nicht obligate** Lehrfächer: Lendovšek, Slowenisches Elementa deutsche Mittelschulen und Lehrerbildungsanstalten. (Für den I. und II. Kurs Lendovšek-Štritof, Slowenisches Lesebuch für Deutsche an Mittelschu Lehrerbildungsanstalten, hiezu ein slowenisch-deutsches Wörterbuch. (für III. Kurs.) — Scheller, Lehr- und Lesebuch der Gabelsbergerschen Stenogra 11. bis 7. Aufl. — Wilhelm Svoboda, Elementarbuch der englischen Sp Realschüler. I. Teil. School for scandal, Lustspiel von Sheridan. — Ita Italienische Grammatik. 2. Aufl. — Mussafia, Italienische Sprachlehre. 7.

IV. Haus- und Schulaufgaben

zur schriftlichen Bearbeitung gegeben im Verlaufe des Schuljahres 1906.

In deutscher Sprache.

(Die Schularbeiten sind durch ein Sternchen bezeichnet.)

V. a. Klasse.

1.) Anakreon, die Verkörperung des griechischen Volksgeistes. — 2.)* Darstellung der Seelenvorgänge in Lenaus «Polenflüchtling». — 3. *a)* Brun und Dornröschen. *b)* Die religiöse Grundlage des Sigurdmythus. — 4.)* künstlerische Aufbau in Greinzens Novelle: «Das fünfte Rad am W

uengestalten bei Homer. — 6.)* Welche Gründe veranlassen Sokrates, den erwarten? — 7.) Die Macht des Liedes. (Vergleich der Stoffe in Balladen s, Goethes und dem Kudrunliede.) — 8.)* Ein Märchen. (Nachempfindung hlands Ballade «Bertran de Born» und Böcklins Gemälde «Die Toteninsel».) Die grîsen hânt michs überkomen, - Diu werlt gestüende trûreclîcher Und hete an fröiden abgenomen, - Doch streit ich zorneclîchen wider rie.) — 10.)* Der Begriff des Volksliedes ist an W. Müllers Gedicht rschaft» zu erläutern.

V. b. Klasse.

) Ein Tag aus dem Leben eines alten Römers. (Nach Horaz.) — 2.)* Das närchen in Lenaus «Primula veris». — 3.) Die Eigenart der Geschichtng Herodots. — 4.)* Kurts Lebensschicksale. (Nach Paul Heyses Novelle rlorene Sohn».) — 5.) Die Seelenvorgänge bei Hektors Abschied. — crates' Leben nach Platons Dialog «Kriton». — 7.) Was zieht uns auf e? — 8.)* Eine Sage. (Freie Erzählung in Anlehnung an Uhlands Ballade gers Fluch» und Böcklins Gemälde «Der Überfall».) — 9.) «Mensch sein, mpfer sein.» Goethe. (Chrie.) — 10.)* Charakteristik von Mosens Gedicht ompeter an der Katzbach».

VI. Klasse.

Die Treue als Angelpunkt des altgermanischen Sittenlebens. — 2.)* Gebeim Anblicke verfallener Ritterburgen. — 3.) Die Weltlage um das). — 4.)* Ein höfisches Fest im Mittelalter. (Situationszeichnung nach elungenliede.) — 5.) Wort und Münze. — 6.)* Das Naturgefühl in den Walthers von der Vogelweide. — 7.) Die Anpassung der Tierwelt an die mgebung. — 8.)* Der Widerstreit in Macbeths Seele vor dem Königsmorde. ie Gespensterszenen in Shakespeares «Macbeth». — 10.)* Klopstock als r der neuen Gefühlsdichtung.

VII. Klasse.

* Die Schönheit als das höchste Gesetz der griechischen Kunst. («Laokoon».) Bedeutung des Mittelmeeres in der Weltgeschichte. — 3.)* «In deiner d deines Schicksals Sterne.» («Wallenstein» II, 963.) — 4.) Die tragische Goethes «Egmont». — 5.)* Goethes Lyrik in Weimar, ein Spiegelbild lenwandlung. — 6.)* Goethes Erzählerkunst in «Hermann und Dorothea». eines Vortrages.) — 7.) Die Wandlung in der Beurteilung der franRevolution bei Schiller und Goethe. — 8.)* Tell: «Ein jeder steht nur r sich selbst.» Stauffacher: «Verbunden werden auch die Schwachen — 9.) Natur und Mensch in der Auffassung der Romantik. — Menschheitsideal in der deutschen klassischen Dichtung (Maturitätsarbeit).

Freie Vorträge.

Allgemeines aus dem Bereiche der Literatur: Geschichte des deutschen — Die Wandlung der Naturauffassung in der Literatur vom XVII. Jahris Goethe. — Slowenische Sagenstoffe in der deutschen Dichtung. — dere Themen der Literatur: Der künstlerische Aufbau von Lessings alotti». — Klingers «Zwillinge». — Sturm und Drang in Goethes - Die Frauen in Goethes Leben und Dichtung. — Friederike Brion. itsideen in Schillers Jugenddramen. — 3.) Naturwissenschaft: Goethe

als Naturforscher. — Die naturwissenschaftliche Forschung am Beginne XIX. Jahrhunderts und Charles Darwin. — 4.) Allgemeine Lebensgebiete; moralische Bewertung des Krieges. — Die Entstehung der Oper aus Oratorium.

In slowenischer Sprache.

V. b. Klasse.

1.) Življenje človeško podobno je vodi, ki vsaka po svoji strugi hodi. (redba.) — 2.) Asan-Aginica. (Izvirnik in prevodi.) — 3.) Mutec osojski. (Z vinska podstava.) — 4.) Vsaka ptica rada tja leti, kjer se je izvalila. (Razp — 5. *a)* Božični običaji v domačem kraju. *b)* Sveti večer. — 6.) Kaj nudi ljanu snežna odeja. — 7.) V veliki nevarnosti. (Dogodek.) — 8.) Jabolko ne daleč od drevesa. (Razprava.) — 9.) Rešitev cesarja Friderika III. — 10.) «J je spet zelena, - jasen spet je strop neba.» — 11.) Bitka pri Sisku 1593.

VI. Klasse.

1.) «Na tleh leže Slovenstva stebri stari, - v domačih šegah vtrjene postave 2.) Krst in slovo Črtomirovo. — 3.) Ob pesnikovem grobu. (Razmišljanje 4.) Ugodnosti in neprilike življenja po mestih. — 5.) Zima umetnica. — 6.) slovanske države in njih usoda. — 7.) «Mogla umreti ni stara Sibila, - prinesli ji z doma prstí; - ena se tebi je želja spolnila: - v zemlji doma truplo leži.» (Razlaga te primere.) — 8.) Kakšne prednosti in prijetnosti pr primorcem bližina morja. (Razprava.) — 9.) Zakon prirode je tak, da iz nle raste veliko. (Razprava.) — 10.) Domovine slava in moč vnema rodoljubu s mu dviga ponos. — 11.) Tragična krivda Orestova.

VII. Klasse.

1.) «Viharjev jeznih mrzle domačije - bile pokraj'ne naše so, kar, Sa tvoj duh je 'zginil, kar nad tvojo jamo - pozabljeno od vnukov, veter brije.» R prava z ozirom na najstarejše zgodovinske priče o usodi karantanskih Slovenc 2.) Človekova borba s prirodo. (Razprava.) — 3.) «Truplo tvoje pač strohni v gori ali čaša tvojih del ostane!» (Ob smrti Gregorčičevi.) — 4.) Brzojav in njega za človeško družbo. — 5.) Kdo je najblagodejneje vplival na razvoj našega sl koncem osemnajstega in v začetku devetnajstega stoletja. — 6.) Napoleonova in njega padec. — 7.) Kateri črkopis je rabil v pojedinih dobah novosloven slovstva. — 8.) «Oj mati moja, domovina, - ljubezen moja ti jedina!» — 9.) «Po ljena iz dnu srcá, — glasnica čuvstev in željá, - v veselju radostna spremi v bridkosti žalna tolažnica!» — 10.) Naravne in umetne vodne ceste. — 11. lostni izpit: Zgodovinski spomini z Ljubljanskega Gradu.

Vaje v prostem govoru.

1.) Viktor Bäbler: Komponisti Prešernovih uglasbenih pesni. — 2.) Legat: Baumbach-Funtkov in Aškerčev «Zlatorog». — 3.) Ivan Mačko Mart in njega prebivalci. — 4.) Fran Boris Tavčar: Potovanje v R 5.) Gustav Unschuld: Prebivalstvo evropske Turčije. — 6.) Josip Miroslav Vilhar - prebuditelj slovenske zavednosti in vrl domoljub. — 7.) Polak: Razvoj slovenske dramatike do Cojzove smrti. — 8.) Ivan Misli o turistiki in moja pot v Grintavcih.

V. Unterstützung der Schüler.

a) Stipendien.

Name des Stiftlings	Klasse	Name der Stiftung	Verleihungs-Dekret	Betrag in Kronen	Anmerkung
Kotnik Franz	I. b.	Gefälls-Strafgelder-Überschüsse	K. k. Fin.-Min. 26. I. 07, Z. 2964	200·—	
Bocak Karl	II. a.	Kaiser Franz Josef	Krain. Spark. 14. XII. 06, Z. 3701	100·—	
?oltnig Heinrich	II. a.	Kaiser Franz Josef	Krain. Spark. 6. VI. 06, Z. 792	100·—	
Fink Leo	II. b.	Georg Mauritz	K. k. Land.-Reg. 19. III. 07, Z. 26.037	60·—	
Gozani Renè Marquis v.	III. a.	Felix Marquis v. Gozani	K. k. Land.-Reg. 18. V. 04, Z. 8394	140·—	
Bischof Viktor	IV. a.	Kaiser Franz Josef	Krain. Spark. 8. XI. 04, Z. 4091	100·—	
Ebner Walter	IV. a.	Kaiser Franz Josef	Krain. Spark. 8. XI. 04, Z. 4091	100·—	
?isenhut Alfred	IV. a.	Kaiser Franz Josef	Krain. Spark. 20. I. 06, Z. 366	100·—	
oprivec Johann	IV. a.	Josef Mayer-hold 1. Pl.	K. k. Land.-Reg. 13. I. 06, Z. 25.095	60·—	
Kusold Adolf	IV. a.	Kaiser Franz Josef	Krain. Spark. 10. I. 06, Z. 2877	100·—	
ırchhart Heinr.	IV. a.	Kaiser Franz Josef	Krain. Spark. 14. XII. 06, Z. 3701	100·—	
Dolgan Franz	IV. b.	Johann Kallister 4. Pl.	K. k. Land.-Reg. 18. IV. 07, Z. 3003	496·—	
ıgritsch Ernst	VI.	Kaiser Franz Josef	Krain. Spark. 13. I. 02, Z. 3079	100·—	
ržina Ladislaus	VI.	Josef Gorup 9. Pl.	K. k. Land.-Reg. 26. I. 05, Z. 1593	500·—	
alleger Albin	VI.	Kaiser Franz Josef	Krain. Spark. 26. XI. 00, Z. 3333	100·—	
interlechner Franz	VI.	Kaiser Franz Josef	Stadtm. Laibach 4. I. 07, Z. 320	100·—	
ıibil Leopold	VI.	Kaiser Franz Josef	Stadtm. Laibach 14. III. 06, Z. 9856	100·—	
			Fürtrag . .	2556·—	

Post-Nr.	Name des Stiftlings	Klasse	Name der Stiftung	Verleihungs-Dekret	Betrag in Kronen	Anmer
				Übertrag . .	2556·—	
18	**Tavčar** Cyrill	VI.	Franz Knerler 2. Pl.	K. k. Land.-Reg. 23. X. 02, Z. 11.240	200·—	
19	**Hohn** Anton	VII.	Kaiser Franz Josef	Krain. Spark. 14. XII. 06, Z. 3701	100·—	
20	**Juvanc** Milan	VII.	Kaiser Franz Josef	Stadtm. Laibach 25. V. 05, Z. 13.478	100·—	
21	**Sterlekar** Johann	VII.	Kaiser Franz Josef	Stadtm. Laibach 23. IV. 04, Z. 24.137	100·—	
22	**Weinberger** Friedrich	VII.	Franz Knerler 7. Pl.	K. k. Land.-Reg. 25. XII. 05, Z. 24.044	200·—	
			Kaiser Franz Josef	Krain. Spark. 10. I. 06, Z. 2897	100·—	
				Summe . .	3356·—	

b) Lokales Unterstützungswesen.

Unterstützungsverein für arme Realschüler.

Dieser Verein hat die Unterstützung dürftiger, gesitteter und fleißiger Rea h durch Beischaffung von Schulbüchern, Zeichenrequisiten, Kleidungsstücken, Bezahl g Wohnungsmiete usw. zum Zwecke.

Seine Wirksamkeit ist aus dem nachstehenden, der Generalversammlu 8. Februar 1907 vorgelegten Jahresabschlusse zu ersehen.

Nr.		K	h
	Einnahmen:		
1	Kassarest vom Jahre 1905	601	96
2	Geschenk der Krainischen Sparkasse	400	—
3	Couponerlös	113	60
4	Mitgliederbeiträge	322	—
5	Spenden von Nichtmitgliedern	58	08
	Summe . .	1495	64
	Ausgaben:		
1	Für Kleider	369	20
2	» Schuhe	57	40
3	» Speisemarken	7	—
4	» Schulbücher	515	63
5	» das Einbinden alter Schulbücher	18	—
6	» das Einkassieren der Mitgliederbeiträge	12	—
7	» die Versendung von Beitrittseinladungen, die Zustellung der Jahresberichte an die Mitglieder u. dgl.	15	60
8	Kassarest	500	81
	Summe . .	1495	64

Vereinsvermögen.

Acht Fünftellose vom 1860er Anlehen à 200 K, und zwar:

1.)	Serien-Nr.	656,	Gew.-Nr.	15,	Abt.-Z.	II,
2.)	„	1.972,	„	7,	„	IV,
3.)	„	2.420,	„	12,	„	V,
4.)	„	12.108,	„	13,	„	V,
5.)	„	17.944,	„	14,	„	I,
6.)	„	17.944,	„	14,	„	III,
7.)	„	18.288,	„	8,	„	V,
8.)	„	18.452,	„	11,	„	III.

Zwei Staatsschuldverschreibungen, und zwar:

1.) Nr. 81.409 vom 1. Mai 1892 über 400 K mit Mai- und November-Coupon.
2.) Nr. 170.624 vom 1. August 1892 über 800 K mit Februar- und August-Coupon.
Die Obligationen repräsentieren einen Nennwert von 2800 K.
Das Sparkassebuch der Krainischen Sparkasse Nr. 207.705 enthält 522 K 52 h, 149 1376 K 50 h und Nr. 281.135 466 K 79 h (davon wurden 561 K im Buche .149 gelegentlich der Feier des fünfzigjährigen Bestandes der Laibacher Realschule :stausschusse zur Gründung eines Stipendiums gewidmet). Die Sparkassebücher 705 und 279.149 sowie die Obligationen sind vinkuliert.

Verzeichnis der P. T. Mitglieder des Unterstützungsvereins.

bezeichneten Mitglieder sind gründende, d. h. sie erlegten den einmaligen Betrag von 30 K. Bei den-dentlichen Mitgliedern, die mehr als den Mitgliederbeitrag von 2 K bezahlen, ist der Jahresbeitrag angegeben.

:etto Jakob, Maurermeister.
fons Graf Auersperg, k. u. k. Linienschiffsleutnant i. R.
iche Aushilfskasseverein.
lar Albin, k. k. Oberrealschulprofessor und Bezirksschulinspektor.
. Binder Josef Julius, k. k. Oberrealschulprofessor und Direktor der Deutschen ivat-Lehrerinnenbildungsanstalt des Laibacher Schulkuratoriums.
ıdamante Franz, Kaufmann in Pola.
ınet Franz, k. k. Oberrealschulprofessor.
:hal Ludwig, k. k. Oberhüttenverwalter in Idria.
'onin Czörnig-Terkuc Marianne, Canale bei Görz (10 K).
ıleva Max, Grundbesitzer in Britof-Vrem.
enc Eduard, Gutsbesitzer in Nußdorf bei Adelsberg (10 K).
:ke Edler von Niedenthal Ludwig, k. u. k. Generalmajor i. R.
ert Julius, Kaufmann (5 K).
gelsberger Rupert, Kaufmann in Gurkfeld.
ılisch Oskar, Ingenieur, Bauinspektor und Bahnerhaltungs-Sektionsvorstand der . österr. Staatsbahnen, n. a. k. k. Hauptmann (5 K).
nke Johann, kaiserlicher Rat, k. k. Oberrealschulprofessor.
zarolli Edler von Thurnlack Viktor, Gutsbesitzer in Präwald.
m Karl, Gutsbesitzer in Weinhof bei Rudolfswert (10 K).
Firma Giontini (5 K).
esda-Prossinagg Josefine, Hotelbesitzerin.
ken Julius, Fabrikant in Neumarktl.
nwald Jakob, Handelsmann in Graz.
ıann C. J., Kaufmann (3 K).

Herr Hauffen Josef, k. k. Landesgerichtsrat.
* „ Graf Hoyos Ludwig, k. u. k. Rittmeister.
„ Huttmann Julius, Heizhauschef in Franzdorf.
„ Janesch Johann, Privatier (4 K).
* „ Jelovšek Gabriel, Kaufmann und Grundbesitzer in Oberlaibach.
„ Dr. Jerše Josef, Domvikar und Religionslehrer.
„ Schulrat Dr. Junowicz Rudolf, k. k. Oberrealschuldirektor.
* „ Jurca Franz, Fabrikant in Adelsberg.
„ Juvančič Friedrich, k. k. Oberrealschulprofessor.
„ Kagnus Josef, Sparkassekassier i. R.
* „ Kantz Julius, Fabrikant in Laibach.
* „ Kantz Viktor, Hausbesitzer in Gleinitz.
„ Keller Franz, k. k. Oberrealschulprofessor.
„ Kenda Heinrich, Kaufmann.
„ Klein Hans, Assistent an der k. k. Oberrealschule.
Löbliche Firma Ig. v. Kleinmayr & Fed. Bamberg (20 K).
*Herr Klinar Anton, Landesbaurat.
„ Klusemann Otto, Gewerbekammerpräsident in Graz.
„ Lachnik Konrad, Bauunternehmer (3 K).
„ Lorber Josef, Fabriksdirektor i. R. (8 K).
* „ Luckmann Anton, Fabriksbesitzer.
„ Mahr Artur, Inhaber und Direktor der Handelslehranstalt, Besitzer des gle
Verdienstkreuzes mit der Krone (5 K).
„ Majdič Vinko, Dampfmühlenbesitzer in Krainburg (4 K).
* „ Mally Karl, Fabrikant in Neumarktl.
„ Dr. Mandl Maximilian, k. k. Oberrealschulprofessor.
* „ Mayr Maurilius, Brauhausbesitzer in Krainburg.
„ Mazi Josef, k. k. Oberrealschulprofessor.
„ Mikusch Lorenz, Kaufmann (4 K).
„ Mühleisen Artur, Handelsmann (4 K).
„ Nagy Stephan, Kaufmann.
„ Oberwalder Jakob, Fabrikant in Domžale (5 K).
* „ Ogorelec Johann, Handelsmann.
„ Opeka Michael, Dr. der Gregorianischen Universität in Rom, k. k. Oberrealschulpress
„ Orožen Franz, Professor an der k. k. Lehrerbildungsanstalt.
„ Pajk Milan, k. k. Oberrealschulprofessor.
„ Pammer Camillo, Direktor der Krainischen Baugesellschaft (4 K).
* „ Dr. Papež Franz, Advokat.
* „ Petech Karl, Dampfmühlenbesitzer in Gimino (Istrien).
„ Pirc Gustav, Direktor der Krainischen Landwirtschaftsgesellschaft.
„ Pirker Heinrich, k. k. Oberrealschulprofessor i. R.
„ Pleiweiß Josef, Fabriksbesitzer (4 K).
„ Pollak Ludwig, Fabrikant in Neumarktl.
„ Premrou Josef, Holzhändler in Fiume.
„ Dr. Puschnig Andreas Otto, k. k. Oberrealschulprofessor.
„ Richter Franz, Bergwerksdirektor in Zenica (Bosnien).
* „ Rieger Simon, Fabriksdirektor in Oberferlach.
„ Samassa Albert, Besitzer des gold. Verdienstkreuzes mit der Krone, Privatier 10 K
* „ Samassa Max, Fabriksbesitzer.
* „ Dr. Schoeppl Anton, Ritter von Sonnwalden, Direktor der Krainischen Sparkasse.

chrautzer Karl, k. k. Oberrealschulprofessor.
)r. Schuster Julius, Sanitätsrat, Ritter des Franz-Josef-Ordens.
chwickert Juliane, Gutsbesitzerin in Wippach (4 K).
eunig Johann, Lederfabrikant †.
imonetti Ferdinand, Hausbesitzer und Juwelier.
kaberne Adele, Kaufmannswitwe.
bliche Krainische Sparkasse.
liche priv. Spinnfabriksgesellschaft (4 K).
)r. Srebre Guido, Advokat in Rann.
acul Anton, Kaufmann (3 K).
r. Starè Josef, Adjunkt bei der k. k. Finanzprokuratur und Hausbesitzer.
r. Svoboda Heinrich, k. k. Oberrealschulsupplent.
antner Franz, Schuhwarenfabrikant (5 K).
ıvčar Alois, k. k. Oberrealschulprofessor.
r. Tavčar Ivan, Advokat, Landtagsabgeordneter und Mitglied des krainischen Landes-
sschusses (10 K).
ttel Klemens, Generaldirektor der Papierfabrik Gratwein.
man Felix, Steinmetzmeister (4 K).
Firma Tönnies Gustav (10 K).
reo Wilhelm, Baumeister und Architekt.
lenčič Ivan, Gutsbesitzer in Dornegg.
gierungsrat Dr. Valenta Alois, Edler von Marchthurn, k. k. Professor und Direktor
Landes-Wohltätigkeitsanstalten i. R. (3 K).
lkavrh Johann, k. u. k. Oberleutnant i. R. und Hausbesitzer.
sel Josef, Professor an der k. k. kunstgewerblichen Fachschule.
četić Stephan, k. u. k. Oberst des 27. Infanterie-Regiments †.
Waldherr Josef, Institutsvorsteher i. R.
ntzel Josef, Dr. der Universität in Straßburg, k. k. Oberrealschulprofessor.
rner Karl, k. k. Oberrealschulprofessor.
tt Jakob, Inhaber eines Herren-Modegeschäftes.
lfling Hedwig in Veldes.
chko Albert, Handelsmann (10 K).
chko Valentin, Privatier (10 K).
far Alois, Gutsdirektor auf den Brionischen Inseln bei Pola.

Spenden von Nichtmitgliedern.

tssammlung der III. b. Klasse (Nachtrag aus dem Jahre 1905) . . .	K 6·50
ann Gasperitsch, Privatier	„ 20·—
ie Morawetz, Ingenieursgattin, anläßlich des Hinscheidens ihres Sohnes	
ann, gewesenen Realschülers	„ 10·—
ert Zuffar, Techniker auf den Brionischen Inseln bei Pola	„ 12·24
er J. Ogorelec (VII. Klasse)	„ 1·—
er B. Srebre (VI. Klasse)	„ 2·—
er der I. c. Klasse für einen lizitierten Nikolo	„ 1·10
se beim Verkaufe von Schülerheften	„ 5·02
s Kleingeld, gefunden im Schulhause	„ 0·22
Summe . . .	K 58·08

löbliche Krainische Sparkasse hat auch im Jahre 1906 zur Unterstützung Realschüler den Betrag von 400 K bewilligt.

Der Vereinsausschuß besteht aus folgenden Mitgliedern: Schulrat Dr. Rudolf Jurwi k. k. Oberrealschuldirektor, Obmann; Dr. Maximilian Mandl, k. k. Oberrealschulpro sso Obmannstellvertreter und Vereinssekretär; Milan Pajk, k. k. Oberrealschulprofessor, Vein kassier; Dr. Heinrich Svoboda, k. k. Oberrealschulsupplent, Bücherwart; kaiserlich R Johann Franke, k. k. Oberrealschulprofessor; Franz Brunet, k. k. Oberrealschulpro sso Michael Opeka, Dr. der Gregorianischen Universität in Rom, k. k. Oberrealschulpro sso

Der Verein spricht im Namen der unterstützten Schüler allen Woh tätern den verbindlichsten Dank aus und erlaubt sich, den Verein lle edlen Freunden der Jugend bestens zu empfehlen.

VI. Vermehrung der Lehrmittelsammlungen.

I. Bibliothek.

a) Lehrerbibliothek.

Neue Anschaffungen: Zeitschriften: Verordnungsblatt für 1907. — Zeit schrift für das Realschulwesen 1906. — Österreichische Mittelschule 190 — Literaturblatt für germanische und römische Philologie 1906. — Jagić, Arch für slawische Philologie 1906. — Mitteilungen des Musealvereines und Izvestja muzejskeg društva, 1906/07. — Petermanns Mitteilungen 1906. — Petermanns Ergänzungs hefte 150—152. — Westermanns Monatshefte 1905, 1906. — Ljubljanski zvon 1906. — Mitteilungen der deutschen Erziehungs- und Schulgeschichte, Jahrg. 906 — Österreichische Blätter für Stenographie 1906/07. — Letopis slovenske matice za leto 1906. Laibach. — Tille, Deutsche Geschichtsblätter 1906. — Belar Erd bebenwarte 1906. — Fries und Menge, Lehrproben und Lehrgänge 190 — Daničić, Rječnik 24. — Körper und Geist 1906. — Slovan, Jahrgang 19 /06 Laibach. — Archiv der Mathematik und Physik 1906/07. — Zeitschri für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 1906/07. — Österreichi Rundschau 1907.

Bücher: Badstüber, Hagedorns Jugendgedichte. Wien 1904. Pichlers itwe — Bezold, Ninive und Babylon. Leipzig 1903. — Cook, Südpolarnacht. Kopten 1903. — v. Gratzy Dr. O., Quellenbuch für den Geschichtsunterricht. Wien 905 — Holzmüller, Elemente der Stereometrie. Leipzig 1900. — Kiepert, Integral Rechnung. Hannover 1903. — Mayer, Deutsche Stilistik. München 190 — Morsch, Das höhere Lehramt in Deutschland und Österreich. Leipzig 190 — Peisker, Beziehungen der Slaven zu Türkotataren und Germanen. Stuttgart 905 — Pfalz Anton, Sammlung historischer Schriften, 1—7, F. Mareis, Linz 196. — Poincaré, Wissenschaft und Hypothese. Leipzig 1906. — Radics, Anastasius Grün, Verschollenes und Vergilbtes. Leipzig 1879. — Schubert, Auslese aus einer Unterrichts- und Vorlesungspraxis. 2 Bände. Leipzig 1905. — Simonič Slov. bibliografija, III. sn. Laibach 1905. — Strakosch-Grassmann, Geschich des österreichischen Unterrichtswesens. Wien 1905. — Wittner, Österreichisch Porträts und Charaktere. Wien 1906. — Adler, Theorie der geometrischer Konstruktionen. Leipzig 1906. — Cranz, Das apollonische Berührungsproblem. Stuttgart 1891. — Fiedler, Cyklographie. Leipzig 1882. — Fisher, Kurze Anitung in die Differentiale und Integral-Rechnung. Leipzig 1906. — Fournier, Napoleon Wien, Tempsky 1906. 3 Bände. — Hilbert, Grundlagen der Geometrie. ipzig

— Hilschers Werke, herausgegeben von Schams. Leitmeritz 1906. — Knackinstlermonographien, 70—78. — Quiehl, Französische Aussprache. Marburg — Schriften des I. österreichischen Kinderschutzkongresses. Wien 1907. iubert, Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesepraxis. 3 Bände. — Elemente der Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1906. — Wolfdia v., Kindermißhandlungen. Wien 1907.

Geschenke: Vom k. k. Ministerium für Kultus und Unterricht: Johann Gabriel Seidl. Wien 1904. — Hock, Eduard v. Bauernfeldts elte Aufsätze. Wien 1905. — L'enseignement en Hongrie. Budapest 1900. er, Grillparzers Gespräche. Wien 1904. — Chronik des Wiener Goethe-, XIX. Band. — (Vom Volksschullehrer Herrn Fr. Bersin:) Treutlein, ite unserer Zahlzeichen. Karlsruhe 1875. — (Von Herrn Professor Milan Pajk D. Johann, Praktische Philosophie. Wien 1896. — (Von Frz. , Realschüler der III. Kl.:) Berlič, Grammatik der illyrischen Sprache. 1842. — Murko, Deutsch-slowenisch und slowenisch-deutsches Handich. Graz, Ferstl 1833.

Gegenwärtiger *Stand der Lehrerbibliothek:* 3360 Bände, 397 Hefte, ter, 2 Bilder in Rahmen, 1 Landkarte, 1 Gedenkmünze.

b) Schülerbibliothek.

Neue Anschaffungen: Gaudeamus IX. Jahrgang, in 2 Exemplaren. — Kräie Beziehungen der Tiere zu einander und zur Pflanzenwelt. — Sannhardt, enden Webstuhl der Zeit. — Merckel, Bilder aus der Ingenieurtechnik; igen der Ingenieurtechnik der Neuzeit. — Hahn, die Eisenbahnen. — Prinz Eugen von Savoyen. — Weltpanorama, Band V. — Das neue Uni-26. Band. — Wiesbadener Volksbücher, Nr. 64 bis 70. — Wojnovich, Kämpfe ika, Kroatien und Dalmatien. — Meško, Mir Božji. — Kleist, Michael . — Wiesenberger, Ernstes und Heiteres. — Schwab, Herzog Ernst. — Katzensilber. — Zvonček, Jahrgang 1904 u. 1905. — Danica 1907. — ličkih vrleti; Poučni razgovori I. — Klarič, Iz dobra bruma iganzlca. — Kako je susjed Razumovič gojio svinje. — Roth, Charakterbilder aus schen Geschichte, I. u. II. Band. — Knötel, Vesuvius, der Feuerberg; im tomobil. — Franzl, Das Liebesleben der Pflanzen. — Meyer, Die Rätsel ole. — Bölsche, Im Steinkohlenwald. — Zvonček, Jahrgang 7. — Vrtec, 36. — Dom in Svet, Jahrgang 1906, in zwei Exemplaren. — Weltjahr-6. — Dahn, Herzog Ernst; Vater und Söhne; Fredeyundis; Bataver; Bissula; broin; vom Chiemgau. — Medved, Poezije. — Koledar družbe sv. Mohorja Zgodbe sv. Pisma, 13. sn. — Lah, Uporniki, Slov. Večernice, 58. zv. — Pri severnih Slovanih. — Stritar, Lešniki. — Letopis sl. Matice 1906. — knjižnica, 13. zv. — Zabavna knjižnica 18. zv. — Pintar, Zbornik 8. zv. lj, Slovenske narodne pesmi, 10. sn. — Vošnjak, Spomini. — Govekar-Moč teme. — Ilešič, Hrvatska knjižnica. — Deutscher Jugendfreund, — Harald, Der schwarze Ritter. — Garlepp, Halbmond und Griechenkreuz. ntes, Don Quijote. — Wenfeld, In Ketten des Kalifen. — Rothenberg, Häuptling. — Geyer, Der Flottenoffizier. — Scherrer, Reise der österFregatte Novara. — Schweiger-Lerchenfeld, Der Orient. — Rječnik lovenski. — Marušić, Liječnikovi zapisci. — Ujevič, Dokonice. — Novak, é. — Horvat, Najnovije doba hrvatske povjesti. — Ilešič, Cvieće slovensničtva. — Bazala, Povjest filozofije. — Hrvatsko kolo. — Gangl und

Trošt, Knjižnica za mladino 31. — Braun, Sarajevo 1878. — Bässler, Di Fr
jofsage; Der Nibelungen Not; Gudrun; Die Rolandsage; Die Alexandersa
Cook, Die erste Südpolarnacht 1898/99. — Heyse, Neues Novellenbu
Stelzhammer, Gedichte. — Weltjahrbuch 1907. — Schaffsteins Volksbüc r
die Jugend: Bd. 3, Till Eulenspiegel; Bd. 4, Gullivers Reisen; Bd. 5, (7
Spohr, Tausend und eine Nacht; Bd. 9, 10, 11, Musäus, Volksmärch
Deutschen; Bd. 16, Bürger, Münchhausen; Bd. 4, Chamisso, Peter Schlemihls In
bare Geschichte; Bd. 24, Möricke, Ausgewählte Gedichte; Bd. 25, Möricl,
Stuttgarter Hutzelmännlein; Bd. 28, 43, Gerstäcker, Seefahrergeschichten, I.
II. Teil; Bd. 30, 31, 32, Hauff, Märchen I., II., III. Teil; Bd. 36, Was die Ins
keit raunt; Bd. 37, Gotthelf, Kurt v. Köppingen; Bd. 38, Fouque, Undine; d.
Grillparzer und Stifter, Geschichte aus der Wienerstadt; Bd. 40, Droste Hsh
Judenbuche; Bd. 41, Brentano, Gockel, Hinckel und Gackeleia; Bd. 42, Fisc r
Mugge, Treue in der Not. — Berdrow, Jahrbuch der Weltreisen 1907; J rb
der Naturkunde 1907. — Francé, Streifzüge im Wassertropfen. — Veltze, Ins
Truppen in Bosnien und der Herzegovina 1878. I. u. II. Band. — Deutsche Ju
risten. — Kleist, Michael Kohlhaas. — Novellenbuch. — Nießen, Maximili I.
Elden, Jahrbuch der Erfindungen, Jahrg. 1907. — Sydow, Taschenbuch d wi
tigeren eßbaren und giftigen Pilze.

Geschenke: Krobath, Veldens Ehrenbuch, geschenkt vom Verschönrun
Vereine Velden am Wörthersee.

Gegenwärtiger Stand der Schülerbibliothek. Am Schlusse des Sch jah
1905/06 wies die Schülerbibliothek einen Stand von 3128 Bänden und 522 Heft
auf; da sie im Schuljahre 1906/07 um 146 Bände vermehrt wurde, ·geg
20 Bände ausgeschieden wurden, beläuft sich der Stand am Schlusse des Sch jah
1906/07 auf 3254 Bände und 522 Hefte. Bei der Bücherausgabe unterstüte d
Verwalter der Schülerbibliothek Professor Alois Tavčar, der die Entlehnig d
slowenischen Bücher leitete.

2. Die geographisch-historische Lehrmittelsammlun

erhielt im Jahre 1906/07 folgenden Zuwachs an Lehrmitteln und Lehrbelfe

a) Durch **Ankauf**: Dr. Karl Schobers Schulwandkarte der Österr hisc
ungarischen Monarchie (Maßstab 1 : 700.000. Verlag des k. k. militärgeograph
schen Instituts.) — Hübner-Juraschek, Geographisch-statistische Tabellen ir d
Jahr 1906. — Mitteilungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wie Jah
gang 1906. — Zeitschrift für Schulgeographie, Jahrgang 1905/06. — Zeschri
des Deutschen und Österreichischen Alpenvereins, Jahrgang 1906. — Mittlung
des Deutschen und Österreichischen Alpenvereins, Jahrgang 1906. — Iunins
Vestnik, Jahrgang 1906.

Die *Sammlung von Stereoskopbildern* wurde vermehrt um 30 rain
Landschaftsbilder (angefertigt vom Photographen Ražun in Littai).

b) Durch **Geschenke**: Vom Herrn k. u. k. Oberst i. R. Karl Edlen v. Hlegh
ein Relief von Afrika (40 cm × 49 cm). — Vom Herrn Professor Walte Obris
ein Album mit 32 Pariser Ansichten. — Von den Schülern: Oskar leisn
(VII. Kl.): vier selbstgemalte krainische Landschaftsbilder: die Steiner Alpen (Aquarel
das Pišnicatal, der Mangart mit dem zweiten Weißenfelser See und ein Motiv a
der Wochein (Ölgemälde) sowie ein chinesischer Originalbrief. — Ante Hol
(VII. Kl.): fünf Bilder für den geographischen und zwei für den kunsthis rische

cht. — Milan Juvanc (VII. Kl.): zwei Landschaftsbilder aus den Ostalpen. šan Tomšič (V. b. Kl.): drei Photographien von Moorlandschaften aus der ung von Bevke. — Bruno Klauer (IV. a. Kl.): vier Photographien aus dem gebiete. — Erwin Landau (IV. a. Kl.): Photographie des Peričnikfalles. — ıtin Kunay (III. b. Kl.): eine lithographische Platte. — Alfred Rogl (III. b. Kl.): ma der Pariser Weltausstellung. — Josef Klopčič (I. a. Kl.): eine japanische , gefunden in China. — Alte Bücher historischen Inhaltes schenkten der : Stanislaus Hoffmann (VI. Kl.) und Franz Makovic (IV. a. Kl.).

Die *Münzsammlung* wurde vermehrt durch Geschenke des Handelsschülers Domicelj sowie der Realschüler Karl Kavšek (VII. Kl.), Franz Petrič .) und Stephan Jarec (III. b. Kl.). Sie umfaßt 476 Stück, davon 158 römische berne) sowie 20 Banknoten (meist österreichisches Papiergeld des 19. Jahrs).

Gegenwärtiger Stand der Sammlung: 148 Wandkarten, 13 Reliefkarten, nten, 16 Pläne, Tafeln und Handkarten, 125 historische, 244 geographische 3 Globen, 2 Tellurien, 208 Bücher, 19 Hefte, 232 Stereoskopbilder, inzen, 20 Banknoten, 29 prähistorische, römische und neuere Gefäße, tücke und Schmuckgegenstände sowie eine geographische Produktensammt 200 Stücken.

3. Die naturgeschichtliche Lehrmittelsammlung

im Schuljahre 1906/07 durch **Ankauf** folgenden Zuwachs: Einen roten n (Mycetes seniculus [L.] Kühl.), eine Zieselmaus (Spermophilus citillus gn.), ein Alpenmurmeltier (Arctomys marmota Schreb.), einen Lemming lemmus Pall.), ein gemeines Stachelschwein (Hystrix cristata L.), ein aninchen (Lepus cuniculus L.), eine Beutelratte mit Jungen (Didelphys sp.), inkauz (Athene noctua Gray.), eine Haubenlerche (Galerita cristata Boie.), tengrasmücke (Sylvia hortensis Bechst.), eine Blaumeise (Parus coeruleus L.), emeinen Papiernautilus (Argonauta argo L.), ein Becken des Menschen sapiens L.), ein Augenpräparat vom Hausrinde (Bos taurus L.), ein präparat von Homo sapiens L.

ırch **Schenkung**: Vom Herrn kaiserlichen Rate Prof. Johann Franke: eine nsel (Cinclus aquaticus Briss.); von den Schülern: Anton Hohn (VII. Kl.): lertartigen Stachelschwamm (Hydnum gelatinosum Scop.); Rudolf Schwickert): einen Seestern (Asteracanthion glacialis L.); Walther Blumauer (II. b. Kl.): ı Katzenhai (Scyllium sp.); Josef Klopčič (I. a. Kl.): einen Kirschkernbeißer austes vulgaris Pall.), einen Grottenolm (Proteus anguinus Laur.); Rudolf . a. Kl.): einen Eichelhäher (Garrulus glandarius L.), einen Eisvogel ispida L.), ein gemeines Eichhörnchen (Sciurus vulgaris L.); Richard .a. Kl.): Säge vom Sägefisch (Pristis antiquorum Lath.), eine Meerspinne uinado Latr.), eine Leopardennatter (Coluber leopardinus Bonap.). Kon-Insekten, Korallen und Mineralien schenkten die Schüler: Anton Hohn , Amadeo Bolaffio (II. a. Kl.), Rudolf Schwickert (II. a. Kl.), Franz Čuk , Leo Fink (II. b. Kl.), Leopold Kernc (II. b. Kl.), Karl Barrier (I. a. Kl.).

Handbibliothek erhielt durch **Ankauf**: Verhandlungen der k. k. zootanischen Gesellschaft in Wien. Jahrgang 1906. — Jahrbuch und Ver-n der k. k. geologischen Reichsanstalt in Wien. Jahrgang 1906. — ische botanische Zeitschrift. Jahrgang 1906. — Dr. L. Rabenhorst, nenflora von Deutschland, Österreich und der Schweiz. 2. Auflage

(Fortsetzung). — Th. Zell, Streifzüge durch die Tierwelt. Stuttgart 19(. Dr. F. Kossmat, Geologische Karte der österreichisch-ungarischen Monarchie Bl Haidenschaft und Adelsberg. Wien 1905. — Dr. W. Amont, Die Seele des nd Stuttgart 1906. — Dr. G. Jaeger, Das Leben im Wasser und das Aquriu 2. Auflage. Stuttgart 1906. — R. H. Francé, Das Pflanzenleben Deutschlan u seiner Nachbarländer. Stuttgart 1906. — Spuler, Schmetterlinge Europas Fo setzung). — R. H. Francé, Streifzüge im Wassertropfen. Stuttgart 19(. Dr. F. Klockmann, Lehrbuch der Mineralogie. 4. Auflage. Stuttgart 19(. Dr. F. E. Geinitz, Die Eiszeit. Braunschweig 1906. — Wilh. Bölsche, Im ste kohlenwald. Stuttgart 1906.

Gegenwärtiger Stand der Sammlung.

Zoologie: Wirbeltiere 420, wirbellose Tiere 17.218, Skelette und Sele teile, anatomische Präparate und Modelle 141.

Botanik: Herbarium Plemelianum (12 Faszikel); Thuemen, Mythe universalis (23 Zenturien); Kerner, Flora exc. Austrio-Hungarica (20 Zentrien Kryptogamen (6 Faszikel); Samen-, Früchte- und Drogensammlung 226; sisti botanische Gegenstände 118.

Mineralogie und Geologie: Naturstücke 985; Edelsteinnachahmungi 3 Kristallformen 138.

Abbildungen und Karten 366; Geräte 23; technologische Gegenstän 5 Bücher 1046, Hefte und Blätter 657.

4. Die physikalische Lehrmittelsammlung

erhielt folgenden Zuwachs durch **Ankauf**: Thermoskop nach Kolbe m de zugehörigen Nebenapparaten.

Die *Handbibliothek* wurde vermehrt durch **Ankauf** der Werke: 'osk Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht. — Hann, Meorc logische Zeitschrift. — Poske, Sonderhefte zur Zeitschrift für den physikasche und chemischen Unterricht. — Winkelmann, Handbuch der Physik, Bände V. 2 III., V. 1, VI. 2.

Die physikalische Sammlung zählt gegenwärtig 463 Nummern mit 853 Stücken 109 Bücher, 8 Hefte.

5. Chemische Lehrmittelsammlung.

Angeschafft wurde: Eine Wasserstrahl-, Saug- und Gebläsepumpe (Eg). — Ein Achsenkreuz nach Nessler. — Graduierte Meßzylinder.

Die *Handbibliothek* wurde vermehrt durch: Fischer-Wagner, Jahresbericht der chemischen Technologie. Jahrgang 1906. — Musprath, Technische hemie (Fortsetzung). — Fresenius, Zeitschrift für analytische Chemie. Meyer, urnal für praktische Chemie. — Novicky, Flüssige Luft. — Dannemann, Leitfa(n fü den Unterricht im chemischen Laboratorium.

Gegenwärtiger Stand der Sammlung: Größere Apparate 195, Büch 282 Hefte 83.

Geschenke: Von Schülern der beiden vierten Klassen wurden hrere Mineralien gespendet.

6. Lehrmittelsammlung für das Freihandzeichnen.

ugewachsen durch **Ankauf**: 9 glasierte Gefäßformen. — 10 Gegenstände tall. — 2 Gegenstände aus Glas. — 8 unglasierte Gefäße. — 6 ver- e Holzwaren. — 6 ausgestopfte Vögel.

eschenk vom Schüler der IV. a. Kl. Schollmayer: 1 Eule und 1 Häher.

egenwärtiger Stand: 14 Vorlagewerke. — Modelle: I. Serie: *A.* 12 Stück;) Stück; *b)* 28 Stück; *c)* 863 (kleine). — II. Serie: 13 Stück. — III. Serie: ück; *B.* 7 Stück. — IV. Serie: *a)* 8 Stück; *b)* 12 Stück; *c)* 7 Stück; tück; *e)* 15 Stück. — V. Serie: *A.* 33 Stück; *B.* 8 Stück; *C.* 28 Stück; ück. — Holzwaren, 71 Stück. — Verschiedene Vasen, 39 Stück. — rlinge, 10 Stück. — Schädel, 1 Stück. — Säugetiere, 5 Stück. — Köpfe getieren, 3 Stück. — Vögel, 29 Stück. — Reptilien, 3 Stück. — Fische, — Pflanzenpräparate, 5 Stück. — Muscheln, 8 Stück. — Künstliche 12 Stück. — Tonfliese, 47 Stück. — Verschiedenes, 59 Stück.

VII. Statistik der Schüler.

Die rechts beigesetzten kleineren Ziffern bezeichnen die Privatisten und mit * außerordentliche Schüler.

	Klasse															Zusammen
	I.			II.			III.		IV.		V.		VI.		VII.	
	a.	b.	c.	a.	b.	c.	a.	b.	a.	b.	a.	b.	a.	b.		
1. Zahl.																
Zu Ende 1905/1906	53	34	37	45	30	30	43	42	42	43	32	35	27	24	41	558
Zu Anfang 1906/1907	51	42	50	47	32	31	35	43	41	44	33	26	47		45	567
Während des Schuljahres eingetreten	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1	—		1	3
Im ganzen also aufgenommen	51	42	50	47	32	31	36	43	41	44	33	27	47		46	570
Darunter:																
Neu aufgenommen, und zwar:																
Auf Grund einer Aufnahmsprüfung	47	42	43	4	1	1	3	—	2	—	—	—	1		1	145
Aufgestiegen	—	—	—	—	—	—	3	—	—	2	2	1	—		1	9
Repetenten	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—		—	1
Außerordentliche Schüler	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		—	—
Wieder aufgenommen, und zwar:																
Aufgestiegen	—	—	—	40	29	24	26	41	28	29	21	20	40		38	336
Repetenten	4	—	7	3	2	6	3	2	11	13	10	6	6		5	78
Freiwillige Repetenten	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		1	1
Während des Schuljahres ausgetreten	7	5	8	7	1	1	5	2	1	2	4	5	6		—	50
Schülerzahl Ende 1906/1907	44	38	41	40	31	30	31	41	40	42	29	22	41		46	516
Darunter:																
Öffentliche Schüler	44	38	41	40	31	30	31	41	40	42	29	22	41		45	515
Privatisten	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		1	1
Außerordentliche Schüler	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		—	—
Summe	44	37	42	40	31	30	31	41	41	42	29	22	41		46	516
2. Geburtsort.																
Laibach und unmittelbare Umgebung	17	14	18	17	12	8	13	14	18	13	11	12	16		17	200
Krain mit Ausschluß von Laibach	9	14	23	12	16	17	2	24	7	22	6	6	12		14	184
Steiermark	7	—	1	3	1	4	8	1	4	2	2	1	4		5	43
Kärnten	1	—	—	1	—	—	1	—	2	—	1	1	3		3	13
Dalmatien	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		—	—

Ungarn	1	—	—	—	1	—	—	—	—	—	2	—	1	—	7
Bosnien und Herzegowina	2	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1	1	—	—	4
Italien	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5
Bayern	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
Württemberg	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1
Deutschland	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1
Summe	44	37	42	40	31	30	31	41	40	42	29	22	41	45+1	515+1
3. Muttersprache.															
Deutsch	44	1	—	38	—	—	29	1	38	1	26	—	17	17+1	212+1
Slowenisch	—	34	42	—	31	30	—	40	—	41	—	22	21	24	285
Italienisch	—	—	—	2	—	—	1	—	1	—	3	—	2	4	13
Tschechisch	—	1	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	2
Kroatisch	—	1	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1	—	3
Summe	44	38	41	40	31	30	31	41	40	42	29	22	41	45+1	515+1
4. Religionsbekenntnis.															
Katholisch des latein. Ritus	42	38	41	36	31	30	29	41	38	42	25	22	41	44+1	500+1
Evangelisch, Augsb. Konf.	—	—	—	2	—	—	1	—	1	—	2	—	—	—	6
Israelitisch	2	—	—	2	—	—	—	—	1	—	2	—	—	1	8
Konfessionlos	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1
Summe	44	37	42	40	31	30	31	41	40	42	29	22	41	45+1	515+1
5. Lebensalter.															
11 Jahre	15	6	6		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	26
12 »	12	10	13	12	7	2	—	—	—	—	—	—	—	—	56
13 »	9	13	11	10	10	5	5	—	—	—	—	—	—	—	63
14 »	6	6	8	9	5	11	7	4	7	2	—	—	—	—	65
15 »	2	2	3	9	6	9	12	14	16	12	4	2	—	—	92
16 »	—	—	1	—	3	2	6	12	7	10	3	3	—	—	47
17 »	—	—	—	—		1	1	9	8	10	7	8	5	8	57
18 »	—	—	—	—	—	—	—	2	1	4	10	2	13	15	47
19 »	—	—	—	—	—	—	—	—	1	4	4	6	8	7	30
20 »	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	10	11	23
21 »	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	3+1	7+1
22 »	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2
Summe	44	37	42	40	31	30	31	41	40	42	29	22	41	45+1	515+1

	Klasse															Zusammen
	I.			II.			III.		IV.		V.		VI.		VII.	
	a.	b.	c.	a.	b.	c.	a.	b.	a.	b.	a.	b.	a.	b.		
6. Nach dem Wohnorte der Eltern.																
Ortsangehörige	30	21	31	28	21	16	21	24	31	24	15	11	23		27	323
Auswärtige	14	16	11	12	10	14	10	17	9	18	14	11	18		18+1	192+1
Summe	44	37	42	40	31	30	31	41	40	42	29	22	41		45+1	515+1
7. Klassifikation.																
a) Zu Ende des Schuljahres 1906/1907.																
I. Fortgangsklasse mit Vorzug	1	1	—	2	1	3	2	3	2	—	—	1	2		2	20
I. Fortgangsklasse	31	28	33	30	20	18	18	18	33	27	12	13	17		32	330
Zu einer Wiederholungsprüfung zugelassen	3	4	1	3	5	4	1	9	1	5	4	2	6		—	48
II. Fortgangsklasse	7	3	5	4	4	5	6	8	2	10	5	2	12		9	82
III. Fortgangsklasse	2	1	3	1	1	—	2	2	2	—	4	2	1		1	22
Zu einer Nachtragsprüfung krankheitshalber zugelassen	—	—	—	—	—	—	2	1	—	—	4	2	3		1+1	13+1
Summe	44	37	42	40	31	30	31	41	40	42	29	22	41		45+1	515+1
b) Nachtrag zum Schuljahre 1905/1906.																
Wiederholungsprüfungen waren bewilligt	9	6	6	7	2	3	9	9	12	9	10	5	7	3	10	107
Entsprochen haben	7	5	4	7	2	3	6	6	12	7	7	5	6	3	9	89
Nicht entsprochen haben	—	—	2	—	—	—	3	1	—	1	3	—	—	—	1	11
Nicht erschienen sind	2	1	—	—	—	—	—	2	—	1	—		1	—	—	7
Nachtragsprüfungen waren bewilligt	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—	—	2
Entsprochen haben	—	—	—	—	—	—	—	-	—	—	—	—	—	—	—	—
Nicht entsprochen haben	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—		--	--	—	1
Nicht erschienen sind	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1
Somit *Endergebnis* für 1905/1906:																
I. Fortgangsklasse mit Vorzug	4	1	2	2	4	2	4	2	—	1	2	1	—	1	—	26
II. »	20	27	22	26	23	19	25	25	27	24	18	21	20	18	36	374
III. »	4	2	3	6	1	2	2	4	5	3	3	4	1	1	—	41
Ungeprüft blieben	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Zur Hälfte befreit waren:															
im ersten Semester	—	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—	—	2	—	4
im zweiten Semester	1	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	3
Ganz befreit waren:															
im ersten Semester	13	21	19	20	20	16	15	29	16	18	6	12	26	26	257
im zweiten Semester	21	25	30	18	20	18	9	24	14	21	7	10	15	22	254
Das *Schulgeld* betrug im ganzen:															
im ersten Semester . . . . . K	1360	680	1000	1040	460	600	780	560	1000	1000	1040	560	800	800	11680
im zweiten Semester . . . . . »	940	520	480	880	420	480	820	720	1080	840	920	560	1040	920	10620
Summe . K	2300	1200	1480	1920	880	1080	1600	1280	2080	1840	1960	1120	1840	1720	22300
Aufnahmstaxen zahlten	47	42	45	4	1	1	6	—	2	2	2	1	1	1	155
im Gesamtbetrage von K 651·—															
Lehrmittelbeiträge zahlten	51	42	50	47	32	31	36	43	41	44	33	27	47	46	570
im Gesamtbetrage von 1140 K															
Die *Taxen für Zeugnisduplikate* betrugen 18 K.															
Beiträge für Jugendspiele . . . . K	39	27	37	34	22	25	26	31	29	32	25	22	33	39	421
9. Besuch der nicht obligaten Lehrfächer.															
Slowenische Sprache . . . I. Kurs	20	—	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	23
II. »	—	—	—	11	—	—	2	—	2	—	—	—	—	—	15
III. »	—	—	—	—	—	—	4	—	3	—	—	—	—	—	7
Englische Sprache . . . . I. »	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	2	4	1	14
II. »	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	12	13
Italienische Sprache . . . I. »	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	—	1	—	4
Gesang . . . . . I. »	6	5	5	1	1	2	—	—	—	—	—	—	—	—	20
II. »	—	—	1	4	2	1	2	—	—	—	—	—	1	7	18
Stenographie . . . . . I. »	—	—	—	—	—	—	—	—	16	14	—	1	1	1	33
II. »	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	7	8	16
Analytische Chemie . . . I. »	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	7	—	—	10
II. »	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	2	—	3
10. Stipendien.															
Anzahl der Stipendisten	—	1	—	2	1	—	1	—	6	1	—	—	6	3	21
Gesamtbetrag der Stipendien 3356 K.															

VIII. Maturitätsprüfung.

Im *Herbsttermine* 1906 wurde die Reifeprüfung am 27., 28. und 2 S tember mit 20 und im Februartermine 1907 mit 4 Abiturienten unter de V sitze des Herrn k. k. Landesschulinspektors Franz *Hubad* abgehalten.

Verzeichnis

jener Abiturienten, welche bei der im Herbsttermine 1906 und im Fe ua termine 1907 abgehaltenen Maturitätsprüfung approbiert worden sid.

Zahl	Name	Geburtsort	Geburtstag	Studien-dauer	Gewähl Ber
1.	Drassal Heinrich	Laibach	24. Juli 1888	7 Jahre	unbestimt
2.	Drovenik Theodor	Laibach	2. Oktober 1887	8 Jahre	unbestimt
3.	Juran Leopold	Laibach	30. Juni 1887	8 Jahre	unbestimt
4.	Justin Karl	Großlaschitz, Krain	29. Dezemb. 1885	7 Jahre	unbestimt
5.	Klusemann Karl	Voitsberg, Steierm.	5. Mai 1886	10 Jahre	Techn er
6.	Kotnik Paul	Laibach	19. Februar 1887	9 Jahre	unbestimt
7.	Kralj Rudolf	Laibach	17. März 1889	7 Jahre	unbestimt
8.	Lušin Alois	Hrib, Krain	16. Juni 1887	7 Jahre	Bodenkultur
9.	Pajer Heinrich	Lustthal, Krain	9. Juli 1886	7 Jahre	Techn er
10.	Perles Johann	Laibach	28. Sept. 1888	8 Jahre	Milit
11.	Pustoslemšek Franz	Leutsch, Steiermark	25. April 1886	7 Jahre	unbestimt
12.	Schulz Ferdinand	Laibach	1. Juli 1889	7 Jahre	unbestimt
13.	Skerbinšek Emil	Marburg, Steierm.	19. Februar 1886	7 Jahre	unbestimt
14.	Vičič Johann	Sava bei Littai	26. August 1887	8 Jahre	unbestimt
15.	Weberitsch Siegfried	St. Veit a. d. Glan	17. Dezemb. 1885	9 Jahre	Techn er
16.	Wölfling Otto	Veldes	9. August 1887	8 Jahre	Milit
17.	Zemljič Johann	Marburg, Steierm.	8. Dezemb. 1885	7 Jahre	Bahnbeute
18.	Tornago Joh., Edl. v.	Laibach	4. August 1888	8 Jahre	Techn er

Im heurigen *Sommertermine* meldeten sich zur Reifeprüfung 45 öffe liche Schüler und 1 Externist.

Zur schriftlichen Prüfung, welche in den Tagen vom 22. bis 27. M ab gehalten wurde, erhielten dieselben folgende Aufgaben zur Bearbeitung:

Aus der deutschen Sprache: «Das Menschheitsideal in der deutschen klassischen Dichtung».

Aus der slowenischen Sprache: «Zgodovinski spomini z Ljubljanskega Gradu».

Übersetzung aus dem Deutschen ins Französische: «Sedaines Jugendjahre».

Übersetzung aus dem Französischen ins Deutsche: «Découverte de la vapeur» (Duruy).

Übersetzung aus dem Italienischen ins Deutsche: «L' Olanda» (De Amicis).

Aus der Mathematik: 1.) Jemand macht eine Automobilfahrt von 240 km ıer sanft ansteigenden Straße. Da die Rückfahrt bergab geht, so legt er r Stunde 2 km mehr zurück und erspart dadurch eine halbe Stunde Fahr- ie lange hat die Hinfahrt gedauert und wieviel km hat er dabei per Stunde gelegt? — 2.) Welches ist der geometrische Ort aller Punkte in der Ebene, nen aus die Parabel $y^2 = 2px$ unter einem Sehwinkel von 90° erscheint? Bei wieviel Versuchen kann man billigerweise 1 gegen 1 wetten, aus einem spiel (mit 54 Karten) mindestens einmal den Pagat zu ziehen, wenn jedes- ır eine Karte gezogen und wieder in das Spiel zurückgelegt wird? — Triester Straße in Laibach geht von Nordost nach Südwest und bildet mit d- Südrichtung einen Winkel von 67°. Am 21. März um $3^h\ 57^m\ 55^s$ nach- fallen daselbst die Schatten der Straßenlaternen genau in die Richtung der Wie groß ergibt sich hieraus die geographische Breite von Laibach?

.us der darstellenden Geometrie: 1.) Durch die Punkte A (0, 1, 2) und ł, 5) gehen zwei Kugeln, welche Π_1 und Π_2 berühren. Stelle die beiden dar. — 2.) Von einem im ersten Raume liegenden gleichseitigen Dreh- , dessen Basiskreis in Π_3 liegt und durch den Punkt P (0, 2, 4) geht, vei Berührungsebenen E und Φ gegeben [E enthält den Punkt R !·5) und ist parallel zur Symmetrieebene, Φ geht durch den Punkt Q) und ist parallel zur Koinzidenzebene]. Es ist der Schnitt des Zylinders r Ebene zu bestimmen, welche die Punkte R und Q enthält und senkrecht Koinzidenzebene steht. — 3.) Eine Kugelzone ($h = 2·5$), welche zu einer nit dem Mittelpunkte M (— 2, 6, 4·5) und dem Halbmesser $r = 4·5$ ınd deren oberer Grenzkreis durch M parallel Π_1 geht, wird unten durch reisring von der Breite $b = 1$ abgeschlossen. Alle Schatten für die ge- e Parallelbeleuchtung sind zu ermitteln.

e *mündliche Prüfung* fand unter dem Vorsitze des Herrn k. k. Landes- ıektors Franz *Hubad* vom 6. bis 13. Juli statt.*

IX. Chronik.

ı 15. Juli v. J. fand die Aufnahmsprüfung für die Schüler in die *erste* statt; sie wurde am 16. September fortgesetzt und gleichzeitig auch für ler in die höheren Klassen der Anstalt vorgenommen.

s Schuljahr wurde am 18. September mit einem feierlichen Gottesdienste hierauf begann der ordnungsmäßige Schulunterricht.

der Feier des Allerhöchsten Geburtsfestes Seiner kais. und königl. chen Majestät des Kaisers am 18. August beteiligte sich der Lehrkörper n der Domkirche abgehaltenen feierlichen Hochamte.

s Anlaß des Allerhöchsten Namensfestes Seiner kais. und königl. Apostoli- jestät des Kaisers wurde am 4. Oktober in der St. Florianskirche ein Schulgottesdienst abgehalten, an dem die Realschüler in Begleitung des ers teilnahmen.

as Verzeichnis der Abiturienten wird in dem nächsten Schuljahre veröffentlicht

Am 19. November wurde aus Anlaß des Namensfestes weiland Ihrer Maje der Kaiserin Elisabeth für die Schuljugend in Begleitung des gesamten Le körpers eine Gedächtnismesse veranstaltet.

Bei dem Trauergottesdienste für weiland Seine Majestät den Kais König Ferdinand I. am 1. Juli war der Lehrkörper vertreten.

Professor Albin **Belar** wurde in die VIII. Rangklasse befördert (and schulrats-Erlaß vom 9. Juli 1906, Z. 3527).

Dem Professor Franz *Brunet* wurde die dritte (Landesschulrats-Erl v 25. September 1906, Z. 5093), dem Professor Albin *Belar* die zweite (and schulrats-Erlaß vom 3. November 1906, Z. 5939) und dem Professor Jo *Wentzel* die dritte Quinquennalzulage (Landesschulrats-Erlaß vom 11. Jänn 1907) zuerkannt.

Der wirkliche Religionslehrer Michael **Opeka** wurde im Lehramte «fini bestätigt und ihm der Titel «Professor» verliehen (Landesschulrats-Erla vo 10. Dezember 1906, Z. 6501).

Schulrat August *Němeček,* k. k. Realschulprofessor d. R. in Graz, wu 19. August 1847 zu Josefsstadt in Böhmen geboren. Nach Absolvierung de Gym nasialstudien in Königgrätz besuchte er dortselbst zwei Jahre die theologisch Studien, widmete sich dann durch fünf Semester den juridischen Studien in Pra unterzog sich der rechtshistorischen Staatsprüfung, verließ jedoch diese Rhtu und legte nach drei Semestern an der philosophischen Fakultät die Lehramt prüfung aus der französischen und deutschen Sprache in Wien ab.

Am 3. März 1875 wurde er zum Supplenten an der Realschule in Mrbu bestellt und mit dem Erlasse des k. k. Unterrichtsministeriums vom 29. Juli 187 Z. 12.186, zum wirklichen Lehrer daselbst ernannt. Mit dem Ministerial-Erlas vom 10. März 1889, Z. 3941, wurde er in gleicher Eigenschaft an die Staat realschule in Trautenau versetzt und mit dem Ministerial-Erlasse vom 9. Augu 1898, Z. 24.238, an der Staats-Oberrealschule in Laibach angestellt.

Zufolge Erlasses des k. k. Unterrichtsministeriums vom 24. Mai 190 Z. 14.753, wurde er krankheitshalber beurlaubt und, nachdem sein Gesundheit zustand ihm die Wiederaufnahme der Lehrtätigkeit nicht gestattete, wurde er m dem Erlasse des k. k. Ministeriums vom 10. März 1906, Z. 8863, in de bleibenden Ruhestand versetzt.

Seine k. u. k. Apostolische Majestät haben mit Allerhöchster Entschließun vom 6. März 1906 ihm aus diesem Anlasse taxfrei den Titel eines Schulrate allergnädigst zu verleihen geruht.

Er war während seiner mehr als dreißigjährigen Dienstzeit rastlo tätig Neben seiner Lehrverpflichtung erteilte er auch noch in der französischen und englischen Sprache, sowie im Gesang als unobligaten Lehrgegenstand den Unter richt. Nach dieser jedenfalls anstrengenden Lehrtätigkeit widmete er die übrige Zeit zahlreichen literarischen Arbeiten, die auch vielfach Anerkennung gefunden hatten.

Nach seiner Pensionierung übersiedelte er nach Graz, wo er am 7. Februar nach langem schweren Leiden gestorben ist.

Den Schülern war er stets ein wohlwollender Lehrer und Erzieher, den Kollegen ein treuer Freund, von den Vorgesetzten war er hochgeachtet. Er ruhe sanft im Frieden.

Das I. Semester wurde am 8. Februar beendet, das II. am 13. Februar begonnen.

Das Schuljahr wurde am 6. Juli mit einem Dankgottesdienste geschlossen

Wichtigere Verfügungen der vorgesetzten Behörden.

Mit dem Erlasse vom 21. Juli 1906, Z. 14.831 ex 1905, hat das k. k. Mi-um für Kultus und Unterricht Weisungen betreffend die einheitliche ng des Vorganges bei Vidierung der Bezugsquittungen für Studentenstipendien n.

Erlaß des k. k. Ministeriums für Kultus und Unterricht vom 28. Dezember 1906, 184, betreffend die bei außerordentlichen Prüfungen der Mittelschüler zu tende Taxe.

Erlaß des k. k. Ministeriums für Kultus und Unterricht vom 28. März 1907, 6, mit dem der k. k. Landesschulrat ermächtigt wird, die Rückzahlung des ffentlichen Schülern der Staatsmittelschulen für ein Semester bezahlten ldes über Ansuchen der beteiligten Partei ausnahmsweise in dem Falle zu n, wenn der betreffende Schüler vor Ablauf des Semesters krankheitshalber r Schule ausgetreten oder vor dem bezeichneten Zeitpunkte gestorben ist.

Erlaß des k. k. Ministeriums für Kultus und Unterricht vom 4. Mai 1907, 9, betreffend die Bedeutung der Noten aus dem obligaten Freihandzeichnen m Schönschreiben für die Zuerkennung der Fortgangsklasse mit Vorzug.

XI. Die körperliche Ausbildung der Jugend.

ürs *Baden,* beziehungsweise *Schwimmen,* herrschen günstige Verhältnisse. üler genießen bei Lösung von Badekarten im städtischen Bade »Kolesia« günstigung einer weitgehenden Preisermäßigung, im Bade der Militär-nschule sind die Badekarten sehr billig; außerdem bieten die Bäche Klein- und Gradašca gefahrlose Badegelegenheit. Auch im Winter brauchen selbst sten Schüler des für die Gesundheit so notwendigen Bades nicht zu ent- denn einerseits hat das städtische Volksbad für Wannen- und Duschbäder drige Preise, anderseits gewährte auch heuer, wie schon seit mehreren die Besitzerin des Bades »Zum Elefanten«, Frau Gnesda, in hochherziger reibadekarten für arme Realschüler. Für diesen Akt der Wohltätigkeit hier der wärmste Dank ausgesprochen.

ir den *Eislauf* war der Winter sehr günstig, drei Monate konnte sich end dieser gesunden körperlichen Bewegung hingeben. Der Vorrat der enden Schlittschuhe betrug 22 Paare.

e *Jugendspiele* wurden im Schulhofe nach der bisherigen Weise betrieben. allgemeinen Spielen hatten die oberen Klassen freie Wahl des Spieles, en spielten unter der Führung der Vorspieler, welche in je einer Stunde ich die nötige Unterweisung erhielten. Die Teilnahme von seiten der Schüler rege. Gespielt wurde in der für jeden Mittwoch und Samstag fest- Zeit. Die Schüler der höheren Klassen benützten auch sonst, eingeteilt in pielgesellschaften, die freie Zeit zum Croquet-, Lawn-Lennis-, Fußball-, - und Schleuderballspiel. Solche Gesellschaften gab es 12; 5 für Lawn- 4 für Croquet, 1 für Fußball, 1 für Faust- und 1 für Schleuderball. Gesellschaft waren je 2 Tage zu je 2 Stunden bestimmt.

Aus folgenden Tabellen ist die Anzahl der Schwimmer, Eisläufer und Radfahrer sowie die Durchführung der Jugendspiele und die Beteiligung an denselben ersichtlich.

I.

Schulklassen	Zahl der Schüler	Von den Schülern der Anstalt sind						An den Jugendspielen beteiligten sich	
		Schwimmer	in %	Eisläufer	in %	Radfahrer	in %		
I. a.	44	21	47·7	35	79·5	14	31·8	40	91
I. b.	38	23	60·5	22	57·9	11	28·9	32	83
I. c.	42	27	64·3	27	64·3	18	42·9	34	80·9
II. a.	40	26	65	24	60	13	32·5	37	92·5
II. b.	31	21	67·7	23	74·2	12	38·7	24	77·4
II. c.	30	23	76·6	20	66·7	16	53·3	28	93·3
III. a.	31	27	87·1	21	67·7	17	54·8	21	67·7
III. b.	42	33	78·6	33	78·6	30	71·4	34	80·8
IV. a.	41	35	85·3	36	87·8	28	68·3	32	78
IV. b.	42	36	85·7	33	78·6	31	73·8	30	71·4
V. a.	29	29	100	26	90·3	23	79·3	18	62
V. b.	20	19	95	17	85	13	65	13	65
VI.	41	39	95·1	34	82·9	38	92·7	25	60·9
VII.	45	44	97·8	38	84·4	42	93·3	18	40
14	516	403	78·1	389	75·2	306	59·3	386	74·5

II.

Datum	Spielzeit	Anwesend	Klasse	Spiele
1906 3. Okt.	3—5	69	IV.—VII.	Schleuderball; Faustball; Schlagball; Croquet; Stelzen; Boccia.
6. Okt.	3—5	85	II. a., b., c. III. a., b.	Jägerspiel; Diebschlagen; Stehball; Schleuderball; Stelzen; Boccia.
10. Okt.	3—5	68	I. a , b., c.	Katze und Maus; Jägerspiel; Seilziehen; Hexentanz; Wettlaufen.
13. Okt.	3—5	77	III.—VII.	Schlagball; Sauball; Urbär; Schleuderball; Croquet; Lawn-Tennis; Boccia.
17. Okt.	2½—4½	74	II. a., b., c.	Jägerspiel; Fuchs aus dem Loch; Schlagball; Sauball; Boccia; Stelzen.
20. Okt.	2—4	70	I. a., b., c.	Jägerspiel; Stehball; Fuchs aus dem Loch; Zeck mit Freimal; Goldene Brücke; Hexentanz.
24. Okt.	2—4	68	III.—VII.	Drittenabschlagen; Stehball; Sauball; Schleuderball; Croquet; Boccia.
7. Nov.	2—4	74	II. a., b., c.	Schwarzer Mann; Diebschlagen; Seilziehen; Schleuderball; Stehball.
1907 13. Apr.	3 - 5	68	I. a., b., c.	Das letzte Paar vorbei; Jägerspiel; Steinball; Strickziehen; Hexentanz; Wettlaufen.
20. Apr.	3—5	72	III.—VII.	Schlagball; Jägerspiel; Drittenabschlagen; Schleuderball; Boccia; Croquet; Pfeilschießen; Stelzen.
24. Apr.	3—5	64	II. a., b., c.	Jägerspiel; Diebschlagen; Zeck mit Freimal; Boccia; Schleuderball.
27. Apr.	3—5	70	I. a., b , c.	Fuchs aus dem Loch; Holland und Seeland; Katze und Maus; Schleuderball; Hexentanz.

m	Spielzeit	Anwesend	Klasse	Spiele
ai	3—5	67	II. a., b., c.	Jägerspiel; Stehball; Schleuderball; Boccia; Hexentanz.
ai	4—6	81	III.—VII.	Faustball; Schlagball; Sauball; Pfeilschießen; Stelzen; Croquet; Lawn-Tennis.
ai	4½—6½	73	II. a., b., c.	Urbär; Stehball; Sauball; Schleuderball; Boccia.
ai	4½—6½	70	I. a., b., c.	Jägerspiel; Reifen; Doppelte Birne; Hexentanz; Strickziehen.
ai	4½—6½	69	III.—VII.	Schlagball; Drittenabschlagen; Urbär; Boccia; Schleuderball; Croquet; Lawn-Tennis.
ai	4½—6½	71	II. a., b., c.	Diebschlagen; Sauball; Prellball; Boccia; Stelzen.
ai	4½—6½	68	I. a., b., c.	Diebschlagen; Holland und Seeland; Jakob, wo bist du? Hexentanz; Wettlaufen; Schleuderball.
ai	4½—6½	58	III.—VII.	Schleuderball; Prellball; Sauball; Boccia; Croquet.
i	4½—6½	64	II. a., b., c.	Diebschlagen; Stehball; Prellball; Boccia; Stelzen; Hexentanz.
ai	4½—6½	62	I. a., b., c.	Kreisfußball; Doppelte Birne; Schleuderball; Reifenspiel.
ai	4½—6½	71	III.—VII.	Urbär; Jägerspiel; Prellball; Sauball; Schleuderball; Boccia; Croquet.
ai	4½—6½	59	II. a., b., c.	Jägerspiel; Kreisball; Schleuderball; Reifenspiel; Boccia.
i	4½—6½	70	I. a., b., c.	Wanderball; Gefangene befreien; Zielreißen; Reifenspiel; Schleuderball.
ai	4½—6½	60	III.—VII.	Schleuderball; Faustball; Boccia; Croquet; Tamburinball; Stelzen.

Schülerausflüge:

n 17. April vormittags besichtigten 29 Schüler der VII. Klasse unter Leitung essors Pajk das Museum des Oberlandesgerichtsrates i. R. Ritter v. Strahl in bei Bischoflack; nachmittags gingen sie über Ehrengruben nach Krainburg.
n 4. Mai nachmittags führte Professor Pajk die IV. b. Klasse von der tation Preserje über den Trauerberg (Žalostna gora) nach Freudenthal und ch, wo die Laibachquellen besichtigt wurden.
n 7. Mai nachmittags besichtigten die Schüler der VI. Klasse unter Führung lenten Karl Breuer die Koslersche Bierbrauerei.
n 11. Mai unternahm die IV. a. Klasse unter Führung der Professoren Obrist, Pajk und Schrautzer einen Ausflug nach Drenovgrič, besichtigte stich zwischen dem genannten Dorfe und Bevke und ging von Bevke tna Brezovica und Sinjagorica zu den Laibachquellen bei Oberlaibach.
III. a. Klasse unternahm am 16. Mai unter Leitung des Klassenvorstandes ig Gauby einen Ausflug nach Oberlaibach. Man fuhr bis Franzdorf, te von dort nach Oberlaibach, besah den Ort und besichtigte die Bier- deren Inhaber, Herr Fröhlich übernahm selbst in liebenswürdiger Weise

das Amt des Führers und Erklärers. Hierauf bewirtete er die Schüler freigebig, die bis zur Heimfahrt nach Laibach noch im Garten spielten.

Am 18. Mai (Pfingstsamstag) fuhren zirka 20 Schüler der beiden Klassen unter Führung des Supplenten Karl Breuer um 7 Uhr 15 Min. nac und besuchten daselbst vormittags die Glasfabrik, die elektrischen Anlagen Zinkhütte. Nach eingenommenem Mittagsmahl in der Werksrestauration die Anlagen des Kohlenbergbaues in Augenschein genommen. Die Rückfah Laibach erfolgte um 7 Uhr 43 Min. abends.

Die III. a Klasse unternahm am 22. Mai unter Leitung des Klassenvor Dr. Ludwig Gauby einen Ausflug nach Laverca. Man brach um halb 2 U und zog über den Golouz nach Laverca, wo man um halb 5 Uhr ankam einer Stärkung im Gasthause Lenče vergnügten sich die Knaben mit Schle und anderen Spielen. Um 7 Uhr kehrte man in fröhlicher Stimmung Landstraße nach Laibach zurück.

Am 25. Mai nachmittags machten 38 Schüler der I. b. und I. c. unter Führung des Supplenten Dr. Karl Lončar einen Ausflug nach Oberi um die Quellen des Laibachflusses zu besichtigen.

Am 1. Juni unternahm die II. a. Klasse unter Führung des Klassenvor Dr. Puschnig einen Ausflug auf den St. Jodociberg und stieg nach Krnb hinab, wo Bewegungsspiele getrieben und Lieder gesungen wurden.

Am 2. Juni fuhren 16 Schüler der VII. Klasse unter Führung d fessoren Opeka und Pajk mit dem ersten Morgenzuge nach Lees-Veldes. Insel des Veldeser Sees las Professor Opeka eine Messe. Hierauf fuh Schüler unter Leitung des Professors Pajk mit dem Wocheiner Zuge nach W Feistritz, von da mit Wagen an das Ende des Sees und besichtigten den fall. Sodann gingen sie am Nordufer des Sees nach St. Johann und in d Wocheiner Tal nach Mitterdorf, von da auf dem «Wiesenwege» («črez senožeti nach Wocheiner Feistritz. Mit dem Mitternachtszuge langten sie in Laib

Am 4. Juni unternahmen 34 Schüler der III. b. Klasse unter der eitu des Klassenvorstandes Friedrich Juvančič einen Nachmittagsausflug von über den Großgallenberg nach Zwischenwässern. Gerastet wurde in Tam auf dem Gipfel des Großgallenberges, woselbst auch Spiele veranstaltet urde Mit dem Abendzuge trafen die Ausflügler wieder in Laibach ein.

Am 15. Juni wanderte die II. a. Klasse mit ihrem Klassenvorstand über alte brunn nach Josefsthal, wo sie dank dem Zuvorkommen der Direktion und be des Herrn Bureauchefs Poche, der die Führung übernahm, die großen Anla Papierfabrik besichtigte.

XII. Gewerbliche Fortbildungsschule.

Diese Lehranstalt wurde im Jahre 1856 als gewerbliche Sonnta schul errichtet; im Jahre 1872 wurde sie reorganisiert.

Der Verordnung des Ministers für Kultus und Unterricht vom 17. Mä 190 Z. 41.575 ex 1902, entsprechend, wurde mit Beginn des Schuljahres 19 /190 der neue Normallehrplan für allgemeine gewerbliche Fortbildungsschulen ein führ

Der Lehrkörper bestand aus folgenden Mitgliedern:

1.) K. k. Realschuldirektor Schulrat *Dr. Rudolf Junowicz,* Schulle r.

2.) Lehrer an der k. k. kunstgewerblichen Fachschule Ingenieur *Jrosla Foerster,* lehrte mechanische Technologie in der III. M. Klasse, wöch. 1 .

.) K. k. Übungsschullehrer *Viktor Jaklič,* Vorstand der II. B. Klasse, Ab- für das Baugewerbe, lehrte das Fachzeichnen für das Baugewerbe, in der röch. 4 St.

.) Volksschullehrer *Matthias Janežič* lehrte Geschäftsaufsätze in der I. c., St.

) Volksschullehrer *Karl Javoršek* lehrte gewerbliches Rechnen in der ɔch. 2 St.

) Volksschullehrer *Johann Jeglič,* Vorstand der II. M. Klasse, Abteilung mechanisch-technische Gewerbe, lehrte gewerbliches Rechnen in der I. c., ıd gewerbliche Buchführung in der II. M., wöch. 5 St.

) Professor *Franz Keller,* Vorstand der III. B. Klasse, Abteilung für das rbe, lehrte das Fachzeichnen für das Baugewerbe in der III. B., wöch. 4 St.

) Realschulsupplent *Anton Koželj,* Vorstand der III. Z. Klasse, Abteilung Kunstgewerbe, lehrte das Fachzeichnen für das Kunst- und Kleingewerbe I. Z. und III. Z., wöch. 8 St.

Realschulsupplent *Karl Kunc,* Vorstand der II. Z. Klasse, Abteilung für stgewerbe, lehrte gewerbliches Rechnen und gewerbliche Buchführung in ., wöch. 3 St.

Oberlehrer *Anton Likozar* lehrte gewerbliches Rechnen, gewerbliche ung und Geschäftsaufsätze in der II. B., wöch. 4 St.

Volksschullehrer *Franz Marolt* lehrte Geschäftsaufsätze in der I. a. und ɔch. 3 St.

Realschullehrer *Josef Mazi,* Vorstand der III. M. Klasse, Abteilung für ıanisch-technische Gewerbe, lehrte das Fachzeichnen für das mechanisch- e Gewerbe in der II. M. und III. M., wöch. 8 St.

Volksschullehrer *Wendelin Sadar,* Vorstand der I. c. Klasse, lehrte Geo- ıd Projektionslehre, sowie geometrisches Projektions- und Freihandzeichnen c., wöch. 4 St.

Professor *Karl Schrautzer* lehrte Motorenkunde in der III. Klasse, St.

Volksschullehrer *Anton Smerdelj,* Vorstand der I. a. Klasse, lehrte und Projektionslehre, geometrisches, Projektions- und Freihandzeichnen rerbliches Rechnen in der I. a., wöch. 6 St.

Volksschullehrer *Franz Škulj* lehrte Geschäftsaufsätze in der I. b., ɔch. 3 St.

Werkmeister an der k. k. kunstgew. Fachschule *Johann Tavčar,* assistierte es Fachzeichnens für das Kunst- und Kleingewerbe beim Realschulsupplenten želj.

Volksschullehrer *Karl Wider,* Vorstand der I. b. Klasse, lehrte Geometrie ktionslehre, sowie geometrisches, Projektions- und Freihandzeichnen in wöch. 4 St.

Konzeptsadjunkt der Handels- und Gewerbekammer *Dr. Franz Windischer* Gesetzkunde in allen drei Abteilungen der III. Kl., wöch. 1 St.

Schuljahre 1906/1907 wurden 328 Lehrlinge als Schüler aufgenommen ihren Vorkenntnissen und Gewerben verteilt, und zwar: I. a. Kl. 57,), I. c. Kl. 52; II. Kl., Abteilung für das Kunst- und Kleingewerbe 44, für das Baugewerbe 26 und Abteilung für das mechanisch-technische

Gewerbe 37; III. Kl., Abteilung für das Kunst- und Kleingewerbe 37, A
für das Baugewerbe 12 und für das mechanisch-technische Gewerbe 24.

Von den Schülern am Ende des Schuljahres waren ihrer Muttersprac
262 Slowenen, 21 Deutsche, 1 Italiener, und 1 Kroate, dem Glaubensbeke
nach 285 Katholiken.

Die am Ende des Schuljahres verbliebenen Schüler verteilten sich auf
Gewerbegruppen: auf das Baugewerbe 61, mechanisch-technische Gewerl
Kunstgewerbe 58, Nahrungs- und Genußmittel-Gewerbe 5, Bekleidungs- un
Gewerbe 44 und andere Gewerbe 6 Lehrlinge.

Der *Schulausschuß* setzte sich aus folgenden Herren zusammen:

Herr *Ivan Hribar,* Bürgermeister der Landeshauptstadt Laibach, als Vors

» *Dr. Robert Praxmarer,* k. k. Bezirkshauptmann, Vertreter der Untri verwaltung.

» *Julius Springer,* k. k. Fachschulprofessor, Vertreter der Unterrichtver

» *Johann Sbrizaj,* landschaftl. Oberingenieur, Vertreter des Landesaus

» *Jakob Dimnik,* Oberlehrer, Gemeinderat, Vertreter der Stadtgemei

» *Franz Grošel,* Handelsmann, Gemeinderat, Vertreter der Stadtgem

» *Josef Vidmar,* Regenschirmfabrikant, Vertreter der Handels- und kammer, Kassier.

» *Engelbert Franchetti,* Friseur, Vertreter der Gewerbetreibenden.

Zur Bestreitung des Kostenaufwandes erhielt die Schule im Jah
folgende Subventionen:

Staatssubvention	4600
Subvention der Stadtgemeinde Laibach	1150
Subvention aus dem krainischen Landesfonds	800
Subvention der Handels- und Gewerbekammer in Laibach .	400
Beitrag aus der Kaiser-Franz-Josef-Stiftung für die gewerblichen Fortbildungsschulen Krains	530

Die Stadtgemeinde Laibach und das Land Krain stellten die Beheizg
Beleuchtung der Schulräume bei.

Von diesen Beiträgen wurden die Remunerationen für Unterrichtserte
Leitung, für Kanzlei-Erfordernisse, Lehrmittel usw. bestritten und für die
Lehrbücher, Schreib- und Zeichenrequisiten gekauft.

Die *gewerbliche Fortbildungsschule* ist mit einer reichhaltigen Le
sammlung versehen. Auch die Lehrmittel der Oberrealschule stehen
Unterricht in den einzelnen Lehrgegenständen zur Verfügung.

Die *Lehrmittelsammlung* erhielt in diesem Schuljahre folgenden

Durch *Ankauf:* Zentralblatt für das gewerbliche Unterrichtswesen
reich, Jahrgang 1906. — Wohnräume, Lieferung 10 bis 13. — Kersten,
Entwürfe künstlerischer Bucheinbände, Band II, Lieferung 5 und 6. —
und Lehmann, Vorlagen für Schuhmacher. — Fiala, Vorlagen für Schn
15 Modelle zur Vorlagensammlung für das Maschinenzeichnen von G. Hei
F. Mayer. — 16 Modelle nach M. Dirlam und M. Šimerka. — 22 Mo
Vorlagewerke für Schmiede nach Böckl. — 2 Uhrwerke in leicht zergba
Zustande. — 3 Nullenzirkel. — 1 Kurvenfeder. — Geschenkt hat das L
bureau für kunstgewerbliche Lehrstellen am k. k. österr. Museum in Wien 1
von Lehrmittelvorlagen.

Verzeichnis der Schüler

am Schlusse des Schuljahres 1906/1907.

(Namen der **Vorzugsschüler** sind mit **fetter** Schrift gedruckt.)

I. a. Klasse.

er Karl, Wien.
likt Ludwig, Laibach.
Vinzenz, Möttling.
ta Heinrich, Laibach.
er Adolf, St. Jakob, Defreggen, ol.
Julius, Laibach.
Heinrich, Laibach.
tschnig Franz, Neumarktl.
Jakob, Laibach.
Augustin, Laibach.
Johann, Schönstein, Steiermark.
vič Stanislaus, Unter-Šiška.
Aloïs, Laibach.
Johann, Unter-Šiška.
č Josef, Laibach.
as Hans, Banjaluka.
Albin, Oberlaibach.
lini Jakob, Vordernberg, Steier-k.
lini Martin, Vordernberg, Steier-k.
Karl, Steinbrück, Steiermark.
er Hermann, Knittelfeld, Steier-k.
22. Papst Josef, Michalkowitz, Schlesien.
23. Perles Franz, Laibach.
24. Pitschmann Ernst, Olmütz.
25. Poche Karl, Kirchenviertel, Steiermark.
26. **Pollak Stanislaus,** Neumarktl.
27. Richter Adolf, Zenica, Bosnien.
28. Roßmanith Josef, Laibach.
29. Rudesch Alfred, Radmannsdorf.
30. Smerdu Wilhelm, Josefstal.
31. Strauß Leopold, Wampersdorf, Niederösterreich.
32. Spalek Johann, Perovo bei Stein, Krain.
33. Tischler Michael, Wöllan, Steiermark.
34. Trummler Wilhelm, Warnsdorf, Böhmen.
35. Uanschou Viktor, Hermagor, Kärnten.
36. Ulm Anton, Klingenfels, Krain.
37. Unger Rudolf, Laibach.
38. Waibl Johann, Laïbach.
39. Walla Alois, Laibach.
40. Wenig Richard, Laibach.
41. Woračz Josef, Laibach.
42. Zhuber v. Okrog Erich, Schloß Ainödt, Krain.
43. Zoratti Eugen, Gradiska.
44. Žižkovsky Franz, Budapest.

I. b. Klasse.

Anton, Laibach.
Rudolf, Laibach.
Josef, Soběslau, Böhmen.
ć Viktor, Ravnagora, Kroatien.
Johann, Laibach.
ž Veit, Laibach.
Josef, Laibach.
ugust, Görjach, Krain.
Johann, Aich.
Franz, Altlack.
Stanislaus, Grič bei Landstraß.
Adolf, Littai.
Alois, Pola.
Milan, Pola.
duard, Töplitz-Sagor.
Gottlieb, Adergaz bei Michelen, Krain.
Franz, St. Peter, Krain.
Anton, Bischoflack.
19. Jamar Christian, Abbazia.
20. Jančigaj Johann, Laibach.
21. Junz Stanislaus, Laibach.
22. Justin Anton, Gleinitz.
23. Kalan Josef, Zauchen bei Bischoflack.
24. Keßler Alfons, Laibach.
25. Koch Dušan, Laibach.
26. Kotnik Franz, Groß-Mannsburg.
27. Lauter Josef, Laibach.
28. Likar Boleslaus, Laïbach.
29. Del Linz, Hruševje.
30. Logar Viktor, Laibach.
31. Lončar Rudolf, Laibach.
32. Mahorčič Josef, Littai.
33. Matelič Josef, Velika Gorica, Kroatien.
34. Merhar Vinzenz, Niederdorf bei Reifnitz.
35. Nachtigal Friedrich, Franzdorf.
36. Naglas Viktor, Laibach.
37. Ogrizek Felix, Adelsberg.

I. c. Klasse.

1. Pardubsky Josef, Laibach.
2. Pečnik Johann, Stoschce.
3. Petek Leo, Sachsenfeld, Steiermark.
4. Pibernik Johann, Laibach.
5. Pirkovič Johann, Unter-Šiška.
6. Planinšek Egon, Laibach.
7. Plehan Kasimir, Laibach.
8. Pohlin Maximilian, Stein, Krain.
9. Poljanc Karl, Krainburg.
10. Pravst Josef, Laibach.
11. Proft Viktor, Laibach.
12. Rainer Josef, Laibach.
13. Remic Leopold, Laibach.
14. Rojic Augustin, Adelsberg.
15. Sirc Vinzenz, Gorenja Sava.
16. Skale Johann, Laibach.
17. Skušek Franz, Reifnitz.
18. Smola Rudolf, Ragovo bei Rudolfswert.
19. Spindler Rudolf, Hrastje bei St. Peter.
20. Strah Johann, Unter-Dobrova.
21. Suhadolec Felix, Laibach.
22. Svetek Franz, Udmat.
23. Šešek Wladimir, Vigaun bei Le.
24. Šibenik Anton, Adelsberg.
25. Šinkovec Friedrich, Idria.
26. Šircelj Friedrich, Laibach.
27. Šket Vinzenz, Seisenberg.
28. Šteh Johann, Malivas bei Gurk d.
29. Šubic Stanislaus, Laibach.
30. Tavčar Alois, Laibach.
31. Tavčar Anton, Laibach.
32. Tomšič Friedrich, Treffen.
33. Tršar Johann, Planina.
34. Vidic Johann, Dule.
35. Vovk Josef, Neumarktl.
36. Wisjak Engelbert, Laibach.
37. Zalokar Anton, Podgora bei St7eit
38. Zalokar Karl, Strug.
39. Zupan Anton, Laibach.
40. Zupan Johann, Dolsko.
41. Zupanc Peter, Lanzovo bei Ranan dorf.
42. Žitko Vinzenz, Verd bei Oberlaach

II. a. Klasse.

1. Arhar Franz, Weixelburg.
2. Bahč Josef, Laibach.
3. Biener Friedrich, Mitrovitz, Kroatien.
4. **Bocak Karl,** Neumarktl, Krain.
5. Bolaffio Amadeo, Unter-Šiška.
6. Deutsch Reinhold, Wien.
7. Dietinger Friedrich, Gottschee.
8. **Englisch Kamillo,** Laibach.
9. Favai Paul, Laibach.
10. Favai Peter, Unter-Šiška.
11. Filipčič Johann, St. Leonhard b. Rann.
12. Fugina Adalbert, Laibach.
13. Gatsch Albert, Landstraß.
14. Goldstein Paul, Laibach.
15. Hočevar Georg, Laibach.
16. v. Hollegha Walter, Cilli.
17. Kenda Heinrich, Laibach.
18. Kleinlercher Friedrich, Domžale.
19. Koïsser Heinrich, Laibach.
20. Kollaritsch Franz, Graz.
21. Krauland Franz, Maierle.
22. Lilleg Erwin, Sittich.
23. Luschützky Anton, Franzdorf.
24. Mesec Josef, Penzberg, Baiern.
25. Oberwalder Heinrich, Ober-Dožale
26. Paar Othmar, Bleiburg.
27. Pečak Norbert, Unter-Šiška.
28. Poltnig Heinrich, Stein, Krain.
29. Pontello Fortunat, Cavasso N vo Udine.
30. Pospischill Oskar, Thomasroit Ob österreich.
31. Rauber Wilhelm, Rauschengrün, Böhmen.
32. Schwickert Rudolf, Wippach.
33. Spreitzer Johann, Laibach.
34. Stampfel Karl, Laibach.
35. Udir Viktor, Ratschach, Oberkin.
36. Verhovec Theodor, Laibach.
37. Waibl Hermann, Laibach.
38. Wollautschnigg Paul, Unter-Šiška.
39. Zelinka Emanuel, Triest.
40. Zolli Eduard, Unter-Šiška.

II. b. Klasse.

1. Baraga Eugen, Adelsberg.
2. Bartl Johann, St. Martin bei Littai.
3. Biber Josef, Laibach.
4. Blumauer Walter, Laibach.
5. Bolha Franz, Altdörfel, Steiermark.
6. Bremec Franz, Laibach.
7. Breznikar Josef, Fiume.
8. Buchta Theodor, Treffen.
9. Burdych Ottokar, Möttling.
10. **Burger Silvin,** Landstraß.
11. Burja Friedrich, Unter-Šiška.
12. Černe Josef, Unter-Šiška.
13. Čretnik Viktor, Aßling.
14. Čuk Franz, Wippach.
15. Ditrich Anton, Adelsberg.
16. Fink Leo, Laibach.
17. Grabrijan Stanislaus, Wippac
18. Hieng Hermann, Rakek,
19. Jankovič Alois, Laibach.
20. Kavšek Johann, Laibach.

ıc Leopold, Oberloitsch.
tzky Raimund, Cittavecchia, Dal-
atien.
r Franz, Laibach.
ine Wladimir, Tschernembl.
tner Paul, Laibach.
26. Lovšin Alfons, Weinitz.
27. Mesesnel Johann, Wippach.
28. Moljk Josef, Unc.
29. Mušič Wladimir, Loitsch.
30. Oražem Josef, Laibach.
31. Paulin Raimund, Laibach.

II. c. Klasse.

ni Stanislaus, Seisenberg.
n Stanislaus, Praßberg.
zzi Stanislaus, Lipe.
c Karl, Selo bei Jauchen.
er Method, St. Michael b. Rudolfs-
ert.
čar Johann, Laibach.
čnik Johann, Bischoflack, Krain.
elč Bogomir, Laibach.
ovšek Blasius, Hohenegg.
Maximilian, Laibach.
Ferdinand, Hrastnik.
Rudolf, Pettau.
o Anton, Unter-Planina.
ller Raimund, Hrastje b. St. Peter.
nčič Anton, Rudolfswert.
16. Sterlekar Viktor, Laibach.
17. Svetličič Wladimir, Rakek.
18. Šimec Ferdinand, Neumarktl.
19. Tomšič Alexander, Illyrisch-Feistritz.
20. Trošt Augustin, Podgraje, Küstenland.
21. Turk Wilhelm, Laibach.
22. **Vidic Ignaz,** Petelinje.
23. Virant Ratislav, Rudolfswert.
24. Visjak Felix, Unter-Šiška.
25. Volčič Franz, Krainburg.
26. Vremšak Emil, Stein.
27. Vrtovec Matthias, St. Veit bei Wippach.
28. Zaveršnik Felix, Unter-Šiška.
29. Zorc Josef, Hof bei Seisenberg.
30. Zupančič Cyrill, Laibach.

III. a. Klasse.

er Anton, Unter-Šiška.
ak Paul, Laibach.
al Hubert, Laibach.
ni René, Marquis v., Laibach.
ht Franz, Povir, Küstenland.
sch Siegmund, Prag.
Edmund, Münster, Westfalen.
Johann, Laibach.
Hugo, Laibach.
sky Karl, Lemberg.
nčič Albert, Triest.
Paul, Marburg a/D.
včič Emil, Laibach.
a Anton, Graz.
Ignaz, Bleiburg, Kärnten.
Karl, Laibach.
17. Polla Markus, Pola.
18. Rosner Alfred, Laibach.
19. Sartory Anton, Eisenerz.
20. Schuster Hermann, Laibach.
21. Schwarz Guido, Canfanaro, Istrien.
22. Simončič Franz, Lichtenwald, Steiermark.
23. Smerdu Rudolf, Laibach.
24. Soppe Norbert, Graz.
25. Stöckl Josef, Trifail.
26. Škorjanec Alfons, Marburg a/D.
27. Turnšek Friedrich, Trifail.
28. Uanschou Otto, Dobe bei Landstraß.
29. Wishiak Friedrich, Laibach.
30. Wölfling Leo, Laibach.
31. **Zoratti Ferdinand,** Gradisca.

III. b. Klasse.

Leopold, Laibach.
k Viktor, Gurkfeld, Krain.
Peter Felix, Laibach.
šek Martin, Töplitz-Sagor, Krain.
Karl, Möttling.
oj Boleslaus, St. Martin ob Groß-
lenberg, Krain.
Anton, Laibach.
a Max, Britof, Krain.
Eduard, Nußdorf, Krain.
Josef, Nußdorf, Krain.
n Viktor, Tarvis, Kärnten.
ranz, Laibach.
lois, Maunitz, Krain.
14. Gregorič Otto, Landstraß.
15. Jarec Stephan, Dobrava, Krain.
16. Jeran Franz, Laibach.
17. Klinar Anton Hermann Heinrich, Laibach.
18. Kolenec Valentin, Čemšenik, Krain.
19. Kuhelj Stanislaus Johann, Laibach.
20. Kunay Konstantin Augustin, Brünn, Mähren.
21. Leitgeb Albin, Tschernembl.
22. Levstik Eduard Franz, Gonobitz, Steiermark.
23. Lindtner Friedrich, Rašica, Krain.
24. Lindtner Leo, Laibach.

25. Pavlič Franz, Laibach.
26. Plemelj Alois, Veldes.
27. Poljanšek Ignaz Johann, Rann, Steiermark.
28. Rogl Alfred Anton, Stein.
29. Sekovanič Ferdinand, Grad bei Veldes.
30. Serše Valentin, Laibach.
31. Stumberger Friedrich Karl, Zadrže, Steiermark.
32. Šest Josef, Möttling.
33. Šibenik Theodor Andreas, Ade...
34. Šmid Paul, Gehsteig bei Krain...
35. Šubic Wladimir Johann Wilh..., Laibach.
36. Šustar Otmar, Sagor.
37. Tavčar Johann, Unter-Šiška.
38. Turek Hugo, Planina.
39. Urbanc Stanislaus Franz Josef, ...
40. Wisiak Anton, Laibach.
41. Ženko Johann, Josefstal.

IV. a. Klasse.

1. Bischof Viktor, Laibach.
2. Bremec Melchior, Laibach.
3. Dežman Felix, Laibach.
4. Ducke Edler von Niedenthal, Ludwig, Laibach.
5. Ebner Walter, Laibach.
6. Eisenhut Alfred, Göriach, Kärnten.
7. Engelsberger Rupert, Gurkfeld.
8. Goeken Wilhelm, Neumarktl, Krain.
9. Klauer Bruno, Laibach.
10. Koisser Karl, Graz.
11. Koprivec Johann, Villach.
12. Kortus Josef, Schluckenau, Böhmen.
13. Krisper Erich, Laibach.
14. Kupfer Karl, Wien.
15. Kusold Adolf, Neumarktl, Krain.
16. Landau Erwin, Laibach.
17. Linhart Leopold, Wien.
18. Ločniker Paul, Waitsch bei Laibach.
19. Loos Josef, Laibach.
20. Makovic Franz, St. Peter bei Laak, Steiermark.
21. Marchhart Heinrich, Laibach.
22. Markelj Leopold, Ježca, Krain.
23. Miklavčič Rudolf, Laibach.
24. Moller Rudolf, Laibach.
25. Novak Johann, Videm, Steierm...k.
26. Pitschmann Karl, Znaim, Mähn.
27. Rauber Walter, Mühlhausen am ...eck Württemberg.
28. Repousch Franz, Albona, Küstlan...
29. Schiffer Franz, Laibach.
30. Schönbucher Kuno, Duboštica, ...sni...
31. Schollmayer-Lichtenberg Ethbi Schneeberg, Krain.
32. Sonvico Rudolf, Innsbruck.
33. Stacul Johann, Laibach.
34. Stampfl Franz, Laibach.
35. Tönnies Gustav, Unter-Šiška.
36. Trost Johann, Vodice.
37. Ulrich Wladimir, Laibach.
38. Vater Rudolf, Wien.
39. Wenger Karl, Oberburg, Steierm...rk.
40. Wollautschnigg Julius, Unter-Šiška.

IV. b. Klasse.

1. Acetto Viktor, Laibach.
2. Babnik Wilhelm, Rojano bei Triest.
3. Beltram Otto, Divača, Küstenland.
4. Biber Alfred, Pola.
5. Debelak Richard, Treffen.
6. Dimnik Stanislaus, Adelsberg.
7. Dolgan Franz, Ober-Košana.
8. Dollenz Heinrich, Triest.
9. Ferjančič Srečko, Laibach.
10. Ferline Bogdan, St. Marein bei Erlachstein, Steiermark.
11. Gilly Alfons, Kropp.
12. Gröbner Albert, Grčarjevec, Krain.
13. Havliček Cyrill, Opčina, Küstenland.
14. Heren Friedrich, Laibach.
15. Jankovič Franz, Laibach.
16. Jarec Johann, Laibach.
17. Jeras Felix, Laibach.
18. Jerin Alois, Töplitz-Sagor.
19. Jernejčič Jakob, Unter-Loitsch, Krain.
20. Kolbe Franz, Watsch, Krain.
21. Levičnik Johann, Laibach.
22. Mayr Maurilius, Krainburg.
23. Mikuž Wladimir, Laibach.
24. Molka Viktor, Stein.
25. Oražem Jakob, Reifnitz.
26. Osole Franz, Stein.
27. Peruzzi Johann, Laibach.
28. Pikel Bogomir, Adelsberg.
29. Ranzinger Ignaz, Töplitz-Sago...
30. Rupnik Anton, Schwarzenberg Krai...
31. Ružička Johann, Adelsberg.
32. Senica Rudolf, Sachsenfeld, Sterma...
33. Šinkovec Gottfried, Krainburg
34. Tauber Josef, Laibach.
35. Tauber Karl, Laibach.
36. Verbič Augustin, Adelsberg.
37. Verbič Zlatko, Dolje, Krain.
38. Vončina Josef, Laibach.
39. Zadnik Franz, St. Veit bei W...ach.
40. Zupan Josef, Laibach.
41. Žebre Wilhelm, Planina.
42. Žitko Stanislaus, Verd bei Ob...aibac...

V. a. Klasse.

holzer Franz, Fürnitz.
ıc Josef, Laibach.
ffio Eugen, Unter-Šiška.
:u Friedrich, Adelsberg.
ı Robert, Weinhof.
wald Oskar, Gyanafalva, Ungarn.
ıg Raimund, Laibach.
ɛrnik Karl, Mariahof, Steiermark.
mann Heinrich, Marburg.
ela Franz, Gablonz, Böhmen.
ɛr Josef, Laibach.
ivec Franz, Laibach.
ɛr Josef, Laibach.
ıche Karl, Fiume.
mann Hubert, Laibach.
16. Lukan Adolf, Laibach.
17. Mallner Johann, Veldes.
18. Perhauz Anton, Laibach.
19. Pregel Johann, Triest.
20. Richter Ludwig, Zenica, Bosnien.
21. Rieger Rudolf, St. Anna, Krain.
22. Schmalz Leo, Laibach.
23. Schoeppl Herbert, Ritter v., Laibach.
24. Schwegel Alois, Obergörjach.
25. Selan Wilhelm, Pola.
26. Smerdu Franz, Triest.
27. Suttner Ferdinand, Görz.
28. Šircelj Karl, Hrastje, Krain.
29. Vidulič Karl, Pola.

V. b. Klasse.

Stanislaus, Adelsberg.
vnik Franz, Laibach.
Alois, Košana.
ar Milan, Velika Dolina bei Jese-
e.
ıeki August, Dubravica, Dal-
tien.
Cyrill, Laibach.
čič Johann, Unter-Šiška.
č Paul, Laibach.
ljc Leo, Völkendorf, Kärnten.
č Rudolf, Leskovec bei Reichen-
g, Steiermark.
11. Korbar Josef, Serajevo.
12. Legat Franz, Lees.
13. Majdič Demeter, Krainburg.
14. Olifčič Robert, Laibach.
15. Pikel Alois, Adelsberg.
16. Preinfalk Friedrich, Littai.
17. Přibil Johann, Laibach.
18. Skaberne Milan, Laibach.
19. Skale Paul, Laibach.
20. Szillich Milan, Adelsberg.
21. Tomšič Dušan, Oberlaibach.
22. Zehner Josef, Gurkfeld.

VI. Klasse.

Ladislaus, St. Kanzian, Krain.
Wilhelm, Ponau bei Spittal,
nten.
ıtt Hugo, Laibach.
l Wilhelm, Laibach.
'č Emil, Lienz, Tirol.
Hugo, Laibach.
:h Karl, Laibach.
čič Franz, Laibach.
ı Ladislaus, St. Peter.
ger Albin, Laibach.
Johann, Divača.
lechner Franz, Laibach.
nn Stanislaus, Unter-Planina.
ch Ernst, Laibach.
er Georg, Hrašče, Krain.
Paul, Trifail, Steiermark.
nek Johann, Prag.
Friedrich, Adelsberg.
čič Alois, Adelsberg.
Michael, Dob, Krain.
Anton, Gurk, Kärnten.
22. Matko Rudolf, Reichenburg, Steiermark.
23. Minatti Wilhelm, Brunndorf, Krain.
24. Obry Karl, Triest.
25. Pavelich Anton, Pola.
26. Perasso Norbert, Villach.
27. Poljanec Leo, Laibach.
28. Premelč Stanislaus, Laibach.
29. Rovšek Ludwig, Gabrije bei Moräutsch, Krain.
30. Rus Johann, Stranska vas, Krain.
31. Schwickert Hermann, Wippach.
32. Smokvina Wilhelm, Draga bei Sušak, Kroatien.
33. Srebre Bogomir, Rann, Steiermark.
34. Stibil Leopold, Laibach.
35. Šircelj Franz, Laibach.
36. Škof Rudolf, Podgora, Krain.
37. Šuflaj Felix, Laibach.
38. Tavčar Cyrill, Laibach.
39. Vidrich Otto, Marburg.
40. Vodeb Theodor, Laibach.
41. Weber Albin, Laibach.

VII. Klasse.

1. Arko Franz, Gottschee.
2. Bäbler Viktor, Oberlaibach.
3. Bradamante Anton, Pola.
4. Bučar Ludwig, Adelsberg.
5. Czörnig, Freiherr v., Friedrich, Klagenfurt.
6. **De Carlo Johann,** Pola.
7. Drahosch Anton, Pola.
8. Garzarolli, Edler v. Thurnlack, Viktor, Präwald.
9. Hauffen Friedrich, Laibach.
10. **Hohn Anton,** Laibach.
11. Juvanc Milan, Laibach.
12. Kavšek Karl, St. Leonhart bei Hrastnik, Krain.
13. Kleinmayr, Edler v., Josef, Krainburg.
14. Kobi Josef, Franzdorf.
15. Kren Hermann, Gottschee.
16. Križaj Josef, Mariafeld.
17. Leben Johann, Tazen.
18. Legat Johann, Lees.
19. Lorber Josef, Ponau, Kärnten.
20. Mačkovšek Johann, Idria.
21. Ogorelec Johann, Laibach.
22. Ohm-Januschovsky, Ritter v. Wissehrad, Julius, Laibach.
23. Petrič Franz, Laibach.
24. Pirkovič Julius, Unter-Šiška.
25. Polak Josef, Trifail.
26. Pulko Adolf, Laibach.
27. Reisner Oskar, Laibach.
28. Rohrmann Wladimir, Laibach.
29. Ruprecht Franz, Brünn.
30. Schnell Hermann, Graz.
31. Schollmayer-Lichtenberg Franz, [illegible]berg.
32. Schwarz Ernst, Laibach.
33. Soppe Wilhelm, Graz.
34. Stacul Anton, Laibach.
35. Stare Edwin, Podpeč.
36. Sterlekar Leopold, Laibach.
37. Stoček Otto, Laibach.
38. Štefe Franz, Cilli.
39. Tavčar Franz, Laibach.
40. Tome Wilhelm, Wien.
41. Unschuld Gustav, Reichenburg, [illegible]mark.
42. Urbančič Josef, Laibach.
43. Verstovšek Franz, Triest.
44. Weinberger Friedrich, Laibach.
45. Žižkovsky Oswald, Klagenfurt.

Privatist:

46. Puchta Anton, Lahn, Böhmen.

II. Kundmachung für das Schuljahr 1907/1908.

e sich zur Aufnahme in die Realschule meldenden neuen Schüler haben ung ihrer Eltern oder deren Stellvertreter bei der Direktion zu erscheinen, - und Geburtsschein und das Abgangszeugnis jener Schule, welche sie sucht haben, beizubringen.

Aufnahme in die I. Klasse ist erforderlich: 1.) Der Nachweis, daß der nende das 10. Lebensjahr vor Beginn des Schuljahres, in welchem die erfolgen soll, vollendet hat oder noch im Kalenderjahre, in welches n des Schuljahres fällt, vollendet; 2.) der Nachweis über den Besitz der orkenntnisse, welcher durch eine Aufnahmsprüfung geliefert wird. Bei ifung wird gefordert jenes Maß von Wissen in der Religion, welches in n vier Jahreskursen der Volksschule erworben werden kann; Fertigkeit und Schreiben der deutschen Sprache; Kenntnis der Elemente aus der ire der deutschen Sprache, Fertigkeit im Analysieren einfacher bekleie; Übung in den vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen. Überdies äß Verordnung des k. k. Ministeriums für Kultus und Unterricht vom 878, Z. 5416, von seiten der Direktion von jedem Schüler, der aus einer n Volksschule austritt, ein im Sinne des § 66 der Schul- und Unterrichtsusgestelltes Frequentationszeugnis oder als Ersatz desselben eine gemäß erialverordnung vom 29. Oktober 1886, Z. 20.619, ausgefertigte Schulgefordert, welche bei der vorzunehmenden Aufnahmsprüfung als infor-Behelfe zu gelten haben. Zufolge Erlasses des k. k. Ministeriums für d Unterricht vom 27. Mai 1884, Z. 8109, können Schüler, deren te aus dem vierten Schuljahre der Volksschule nicht geringer als «gut» er mündlichen Prüfung aus der Religionslehre befreit werden.

die Aufnahmsprüfungen zum Eintritt in die I. Klasse sind zwei Termine der erste fällt auf den 8. Juli, der zweite auf den 16. September; die en zur Aufnahmsprüfung in die I. Klasse werden am 7. Juli d. J., weise am 15. September, von 8 bis 10 Uhr vormittags entgegengenommen. Wiederholung der Aufnahmsprüfung, sei es an dieser oder einer hranstalt, ist unzulässig (Ministerial-Erlaß vom 2. Jänner 1886, Z. 85). Aufnahme der Schüler und zur Vornahme der Nachtrags- und Wiederungen ist die Zeit vom 15. bis zum 18. September bestimmt.

anderen Mittelschulen kommende Schüler müssen das Studienzeugnis Semester mit der Entlassungsklausel sowie auch etwaige Schulgeld- oder Stipendien-Dekrete vorweisen.

er, welche in eine der nächst höheren Klassen dieser Anstalt auf- werden sollen, haben entweder ein entsprechendes Zeugnis über die g der vorangehenden Klasse an einer öffentlichen Realschule der im vertretenen Länder und Königreiche beizubringen oder sich unter den Bedingungen einer Aufnahmsprüfung zu unterziehen.

neu eintretende Schüler entrichtet eine Aufnahmstaxe von 4 K 20 h Beitrag von 2 K für die Schülerbibliothek nebst 1 K zur Deckung n schulmäßigen Betriebe der Jugendspiele verbundenen Auslagen; den 3 K entrichten auch alle der Lehranstalt bereits angehörenden Schüler.

Da das *Slowenische* zufolge des Ministerial-Erlasses vom 3. Mai 1 Z. 10.754, *für jene Schüler ein obligater Lehrgegenstand ist, welche* ei Eintritt in die Realschule *von ihren Eltern als Slowenen erklärt werde* s ergibt sich für letztere die Notwendigkeit, ihre Kinder persönlich zur Aufn vorzuführen und im Verhinderungsfalle ihre diesbezügliche bestimmte Erkl der Direktion schriftlich zukommen zu lassen.

Im Sinne des Erlasses des k. k. Landesschulrates für Krain vom 12. Mai 18 Z. 601, können auch Schüler nichtslowenischer Muttersprache zum obligaten wenischen Unterrichte zugelassen werden, wenn sie die diesbezügliche Erkl ihrer Eltern vorweisen und die erforderlichen Sprachkenntnisse besitzen, wel durch eine Aufnahmsprüfung erprobt werden. Für solche Schüler bleibt dan Slowenische durch alle folgenden Studienjahre an dieser Lehranstalt ein oblig Lehrgegenstand.

Das Schuljahr 1907/1908 wird am 18. September mit dem hl. Geista in der St. Florianskirche eröffnet werden.

Der regelmäßige Unterricht beginnt am 19. September.

Laibach, im Juli 1907.

Die Direktio.

ie Verallgemeinerung der Mac-Laurin'schen Summenformel

nebst Beiträgen

zur Kenntniss der Bernoulli'schen Function

von

Ernst Schröder.

ie bekannte Summenformel, welche Mac-Laurin in seinem *Treatise on fluxions*)* aufgestellt
! deren Ergänzung vornehmlich von Poisson**), Jacobi***) und Malmsten†) einer ein-
Discussion unterzogen wurde, ist einer solchen Erweiterung fähig, dass in die Entwicklung,
ieselbe liefert, zwei willkürliche Zahlen mehr eingehen, als in der bisher bekannten Form
mmenformel auftreten. Ohne mich hier darauf einlassen zu wollen, inwiefern durch die ge-
rweiterung die Anwendbarkeit der Formel erhöht wird, ist es zunächst nur meine Absicht,
allgemeinerte Summenformel selbst vorzulegen und herzuleiten.

lem Ende werde ich mich zuerst der nämlichen Methode bedienen, welche Poisson in der
bhandlung einschlug, nämlich ich werde das Fourier-Dirichlet'sche Theorem für die Summation
eriodischer Reihen zum Ausgangspunkt wählen. Da dieses Theorem indessen in seiner vollen
ng auf complexe Variable, soweit dieselbe möglich ist, meines Wissens noch keiner Discussion
n wurde, so habe ich mich in dem ersten Paragraphen mit Ausfüllung dieser Lücke zu be-
. In dem zweiten Paragraphen gehe ich zur Herleitung der verallgemeinerten Summenformel
he in dem dritten Paragraphen auf einem andern Wege direct bewiesen wird. In den beiden
aragraphen füge ich endlich einige Bemerkungen über die Bernoulli'sche Function hinzu,
den Gliedern der Entwicklung bei der erweiterten Summenformel auftritt.

§ 1.

Summation durch periodische Reihen.

ehend von dem bekannten Theorem über den Grenzwerth eines bestimmten Integrals:

$$\lim_{\omega=\infty} \cdot \int_0^{\alpha} \frac{\sin \omega u}{\sin u} \cdot f(u)\, du = \frac{\pi}{2} f(o),$$

l. II, pag. 672, art. 828 sqq., London 1742.
ır le calcul numérique des intégrales définies, Acad. des Sciences Vol. VI, pag. 571; es gelang mir nicht,
dlung zu Gesicht zu bekommen.
relle's Journal, Bd. 12, pag. 263.
id., Bd. 35, pag. 55.

welches zuerst von Dirichlet*) in aller Strenge nachgewiesen wurde unter der Voraussetzu
$o < \alpha < \pi$ sei, ferner, dass ω irgendwie als positive Zahl der Unendlich zustrebe, endlich, da
Integral $\int f(u)\,du$ für alle Werthe der oberen Grenze zwischen o und α eine stetige Funct
oberen Grenze sei — welch' letztere Bedingung insbesondere stets erfüllt ist, wenn $f(u)$ w
$u = o$ und $u = \alpha$ nicht ∞ wird — gelangt man leicht durch eine Zerlegung der Amplitu
Grenzwerthen:

$$\lim_{k=\infty} \int_o^\pi \frac{\sin(2k+1)u}{\sin u} f(u)\,du = \pi \frac{f(o) + f(\pi - o)}{2}, \qquad \lim_{k=\infty} \int_o^\pi \frac{\sin 2ku}{\sin u} f(u)\,du = \pi \frac{f(o) - f}{2}$$

In diesen Gleichungen muss k eine natürliche, das ist ganze positive Zahl bedeuten. D
ferner, welche in den Argumenten der Function f angeschrieben sind, sollen stets reelle ne
kleine Zahlen vorstellen, die von der positiven Seite her der absoluten Null zustreben, u
indem man k hinreichend gross annimmt — beliebig nahe gebracht werden können. Für
einer Unstetigkeit von $f(u)$ ist auf diese Weise unzweideutig festgestellt, welcher von den
werthen an der Sprungstelle zu nehmen ist.

Durch weitere passende Zerlegungen des Intervalles der Integrationsgrenzen ergeben si
ohne Schwierigkeit die beiden nachstehenden noch allgemeineren Theoreme:

$$\lim_{k=\infty} \cdot \int_{n_0\pi - \beta_0}^{n_1\pi + \beta_1} \frac{\sin(2k+1)u}{\sin u} \cdot f(u)\,du = \pi \cdot \sum_{a=n_0}^{a=n_1} \frac{f(a\pi - o) + f(a\pi + o)}{2}, \tag{2}$$

$$\lim_{k=\infty} \cdot \int_{n_0\pi - \beta_0}^{n_1\pi + \beta_1} \frac{\sin 2ku}{\sin u} \cdot f(u)\,du = \pi \cdot \sum_{a=n_0}^{a=n_1} (-1)^a \cdot \frac{f(a\pi - o) + f(a\pi + o)}{2}, \tag{3}$$

welche übrigens bekannt sind, und von denen wir im Folgenden nur das erste nöthig habe

Bedingung für die Gültigkeit derselben ist einerseits, dass:

$$o < \beta_1 < \pi \text{ und } o < \beta_0 < \pi,$$

sowie dass die obere Grenze jedes Integrales grösser als die untere sei, während im Uebrigen n_1 u
irgend welche ganze, sei es positive, sei es negative Zahlen bedeuten dürfen. In dem äusseren
welcher sich hienach darbieten kann:

$$n_0 = n_1 + 1, \qquad \beta_1 > \pi - \beta_0$$

muss die rechte Seite der Gleichungen (2) und (3) gleich o definirt werden. Hinsichtlich der anc
andrerseits ist die Gültigkeitsbedingung die nämliche, innerhalb der Amplitude jedes Integ les,
oben bei (1).

Auch in dem Grenzfalle, wenn β_1 oder β_0 gleich o ist, können die Theoreme (2) und (3)
aufrecht erhalten werden, jedoch vorbehaltlich einer Modification, die alsdann auf der rec en
dieser Gleichungen angebracht werden muss.

Wenn nämlich $\beta_1 = o$ ist, so darf in den vollständig angeschriebenen Summen der letz
des letzten Gliedes: $\pm \frac{f(n_1\pi + o)}{2}$ nicht in Rechnung gebracht werden; wenn $\beta_0 = o$ ist, mus eb

*) Crelle's Journal Bd. 4, pag. 157 und Dove's Repertorium Bd. 1, pag. 152.

Theil $\pm \frac{f(n_0\pi - o)}{2}$ des ersten Gliedes weggelassen werden; für den Fall, dass zugleich und $\beta_0 = o$ ist, hat man diese beiden Randglieder gleichzeitig zu unterdrücken.

---

ss vorausgesetzt, gehe ich dazu über, die unendliche Reihe:

$$= \frac{1}{y}\int_{x_0}^{x_1} f(u)\,du + \frac{2}{y}\sum_{a=1}^{a=\infty}\left\{\cos\frac{2a\pi x}{y}\cdot\int_{x_0}^{x_1} f(u)\cos\frac{2a\pi x}{y}\,du + \sin\frac{2a\pi x}{y}\cdot\int_{x_0}^{x_1} f(u)\sin\frac{2a\pi u}{y}\,du\right\}$$

rgenzfalle zu summiren, mit andern Worten, den Grenzwerth $\lim_{k=\infty} . S_k(x) = S(x)$ aufzusuchen, sich das Integral der endlichen Reihe, oder die Function:

$$S_k(x) = \frac{1}{y}\cdot\int_{x_0}^{x_1} f(u)\cdot\left\{1 + 2\sum_{a=1}^{a=k}\cos\frac{u-x}{y}\,2a\pi\right\}du = \frac{1}{y}\cdot\int_{x_0}^{x_1} f(u)\sum_{a=-k}^{a=k}\cos\frac{u-x}{y}\,2a\pi\,.\,du$$

ohne Ende wachsende Gliederzahl k nähert. Die Integrale sollen hier als geradlinige auf-ein, und das Bereich der dabei auftretenden im Allgemeinen complexen Variabeln werde nicht nöthig eingeschränkt.

Argumente der *cosinus* in Gleichung (5) sind die ganzen Vielfachen einer völlig beliebigen Function der Integrationsvariabeln u; die Bezeichnung dieser Function mit $\frac{u-x}{y}\cdot 2\pi$ wird benso wie das Vorsetzen des Factors $\frac{1}{y}$ — in der Folge zweckmässig erweisen.

lässt sich nun die Summation der begrenzten Reihe in Gleichung (5) wie die einer geome-Progression leicht ausführen, und man erhält:

$$S_k(x) = \frac{1}{y}\int_{x_0}^{x_1} f(u)\cdot\frac{\sin(2k+1)\frac{u-x}{y}\pi}{\sin\frac{u-x}{y}\pi}\cdot du\,,$$

m die Substitution $\frac{u-x}{y} = v$ gemacht wird:

$$S_k(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{\frac{x_0-x}{y}\pi}^{\frac{x_1-x}{y}\pi}\frac{\sin(2k+1)v}{\sin v}\,f\left(x + \frac{vy}{\pi}\right)dv\,.$$

it sich dieser Ausdruck mit wachsendem k einer angebbaren Grenze nähere, müssen, wie einsieht, die Grenzen des Integrales in (6) oder die Zahlen $\frac{x_1-x}{y}$ und $\frac{x_0-x}{y}$ reell voraus-erden; und zwar können wir, offenbar unbeschadet der Allgemeinheit, die obere Grenze stets s die untere, mithin $\frac{x_1-x_0}{y} > 0$, annehmen. — Es ist nützlich, diese Bestimmungen, ien Theil der Gültigkeitsbedingungen für das nachher aufzustellende Theorem ausmachen, h zu interpretiren. Dabei bedienen wir uns der bekannten von Kühn zuerst eingeführten, s begründeten und fruchtbar gemachten Repräsentation der complexen Zahlen durch Punkte iebene.

Eine einfache Ueberlegung — im Hinblick auf die Construction für die Differenz und de Q tienten zweier gegebenen Zahlenpuncte — zeigt, dass die Bedingung der Realität der Grenzen mit der Zahlen $\frac{x_1 - x}{y}$ und $\frac{x_0 - x}{y}$ sowie $\frac{x_1 - x_0}{y}$, einerseits verlangt, dass die 3 Punkte x_1, x, x_0 au ei geraden Linie liegen, andererseits, dass die Verbindungslinie des Ursprunges o mit dem Zahlenpunkt das ist der Radiusvector von y, zu dieser Geraden parallel laufe.

Ferner die Bedingung dafür, dass die obere reelle Grenze des Integrals grösser sei als die unt erheischt einfach, dass auf den beiden parallelen Geraden die Punkte x_0, x_1 in demselben Sinn o in der nämlichen Richtung auf einander folgen, wie die Punkte o und y.

Von den 4 complexen Zahlen: x_1, x, x_0, y können demnach irgend welche zwei ganz belie auf der Zahlenebene angenommen werden; dann aber ist dies bei den beiden übrigen Punkte nic mehr der Fall, sondern diese müssen auf zwei unbegrenzten Geraden liegen, welche ihrer in Jeb einstimmung befindlichen Richtung und ihrer Lage nach völlig bestimmt sind; die eine von die beiden Geraden, auf welchen die zwei letzten Punkte noch willkürlich angebracht werden dürfen, überdies einseitig begrenzt.

Man nehme jetzt an, es sei:

$$\frac{x_1 - x}{y} \cdot \pi = n_1 \pi + \beta_1 \text{ und } \frac{x_0 - x}{y} \pi = n_0 \pi - \beta_0 ,$$

wo

$$0 \leqq \beta_1 < \pi \text{ und } 0 \leqq \beta_0 < \pi ,$$

das heisst, man denke sich die positiven oder negativen ganzen Zahlen n_1 und n_0 aus den Ungleichungen bestimmt:

$$(7) \quad \begin{cases} 0 \leqq \dfrac{x_1 - n_1 y - x}{y} < 1 \quad \text{und} \quad 0 \leqq \dfrac{x + n_0 y - x_0}{y} < 1 , \quad \text{oder auch:} \\ n_1 \leqq \dfrac{x_1 - x}{y} < n_1 + 1 \quad , \quad n_0 - 1 < \dfrac{x_0 - x}{y} \leqq n_0 , \end{cases}$$

welche geometrisch gedeutet fordern, dass der Punkt x auf der Verbindungslinie von x_0 und x_1 zwischen den Punkten $x_1 - n_1 y$ sowie $x_0 - n_0 y$ liege und um weniger als die Vector-Länge oder Modul von y von beiden letzteren entfernt sei, im Grenzfalle aber mit ihnen coincidire.

Alsdann gibt die Gleichung (6) nach dem vorausgeschickten Hülfstheorem (2) unmittelbar folgenden Ausdruck für die gesuchte Summe der in Rede stehenden Reihe:

$$(8) \quad S(x) = \sum_{a=n_0}^{a=n_1} \frac{f(x + ay - o \,.\, y) + f(x + ay + o \,.\, y)}{2} ,$$

welcher für den Fall: $\beta_1 = o$ oder den $\beta_0 = o$, d. i. $x = x_1 - n_1 y$ oder $x = x_0 - n_0 y$ wie dahin abzuändern ist, dass man von den beiden Randgliedern: $\frac{f(x + n_1 y + o \,.\, y)}{2}$ und $\frac{f(x + n_0 y - o}{2}$ das erste, beziehungsweise das zweite weglässt, welcher ferner durch o zu ersetzen ist w $n_0 = n_1 + 1$, $\beta_1 + \beta_0 > \pi$ ist, d. h. wenn $\frac{x_1 - x}{y}$ und $\frac{x_0 - x}{y}$ zwischen denselben zwei benachbar ganzen Zahlen enthalten sind, während immer noch die zweite Grösse von der ersten übertroffen w

Hier kann man sich die naheliegende Aufgabe stellen, die Formel zu discutiren, durch welche Summe (8) der Reihe nach einander dargestellt wird, wenn von den 4 Zahlen x_1, x, x_0, y irgend drei festgehalten werden, während die 4te alle möglichen zulässigen Werthe durchläuft. Ueberhaupten auch die Zahlen n_0 und n_1 festgehalten werden. Von allen diesen Discussionen ist nur die Folgenden wegen durchzuführen.

Lässt man x sich ändern, während x_1, x_0, y feste Werthe besitzen, so hat man zunächst zu beachten, dass die Reihe $S(x)$ nach ihrer Definition (4) ungeändert bleibt, wenn man $x + ry$ für x setzt, unter r irgend eine ganze Zahl verstanden; die Reihe ist eine um den Index y periodische Function von x, so dass für alle Werthe von x die Gleichung besteht:

$$S(x + ry) = S(x).$$

In Folge dessen braucht man nur die Werthe zu untersuchen, welche $S(x)$ für die zwischen ξ und $\xi + y$ liegenden Argumente annimmt, wenn ξ irgend einen Punkt auf der Verbindungslinie von x_0 und $x_0 + y$ bezeichnet; auf dieses eine Intervall lassen sich alle übrigen zurückführen und sind mit ihm sämmtliche Werthe gegeben, welche die Reihe $S(x)$ für die zulässigen Werthe von x übernehmen kann. Insbesondere mag zum Beispiel $\xi = x_0$ genommen werden, so dass die Aufgabe darauf hinaus kommt, den Verlauf von $S(x)$ zu verfolgen, so lange

$$o \leqq \frac{x - x_0}{y} < 1$$

und während der Punkt x sich von x_0 an geradlinig gegen $x_0 + y$ heran bewegt.

Aus der zweiten Ungleichung (7), zusammengehalten mit (10), geht hervor, dass alsdann $n_0 = o$ zu setzen ist, wonach man hat:

$$S(x) = \sum_{a=0}^{a=n_1} \frac{f(x + ay - o\,.\,y) + f(x + ay + o\,.\,y)}{2},$$

Es bt die Ungleichung (10) zugleich das Intervall an, auf welches die Variable x eingeschränkt uss, wenn die untere Grenze n_0 der Summe ihren Werth o unverändert beibehalten soll.

Fir at man ferner: $\frac{x_1 - x_0}{y}\pi = n\pi + \alpha$ an, worin $o \leqq \alpha < \pi$ sei, bestimmt man also die ganze rch die Ungleichung:

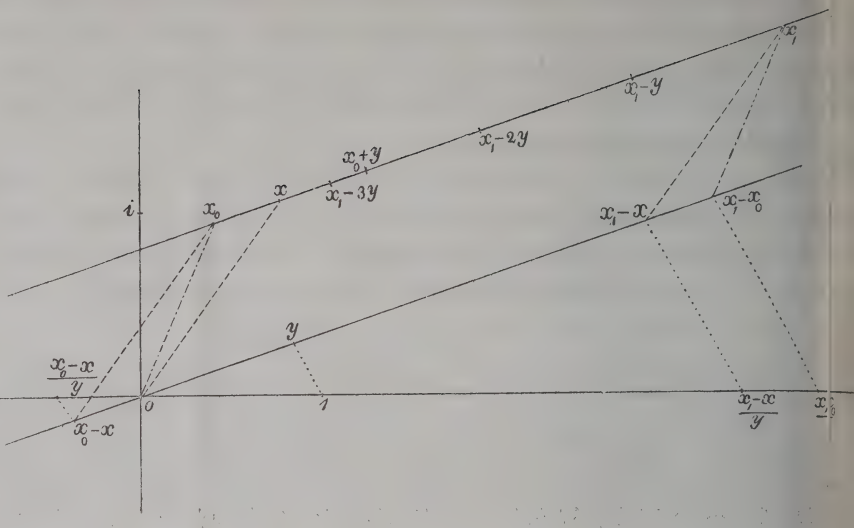
$$o \leqq \frac{x_1 - ny - x_0}{y} < 1 \quad \text{oder} \quad n \leqq \frac{x_1 - x_0}{y} < n + 1,$$

r Punkt $x_1 - ny$ zwischen die Puncte x_0 und $x_0 + y$ fallen, so dass sich in der Richtung s von y folgende Anordnung der Punkte darbietet:

$$x_1 - (n+1)y,\ x_0,\ x_1 - ny,\ x_0 + y,\ x_1 - (n-1)y.$$

ähend nun der Punkt x von x_0 (inclusive) bis $x_1 - ny$ (incl.) geht, beziehungsweise in dem ll mit beiden zugleich zusammenfällt, muss in der Formel (11): $n_1 = n$ gesetzt werden; d ber der Punkt x von $x_1 - ny$ (excl.) bis $x_0 + y$ (excl.) sich bewegt, hat man daselbst - 1 zu nehmen; denn so bestimmt sich jedesmal die Zahl n_1 aus der ersten Ungleichung (7).

Hiemit ist in der That das Bildungsgesetz für die Summe der Reihe $S(x)$ innerhalb des ganzen Intervalles x_0 bis $x_0 + y$ discutirt. In der beistehenden Figur sind die in Betracht kommenden Zahlenpunkte für ein einfaches Beispiel ($n = 3$) construirt.



Wenn die obere Grenze n_1 der Summe (11) den constanten Werth n besitzen soll, so muss nach diesem Ergebnisse x zwischen $x_1 - ny$, also in dem ersten der beiden Intervalle liegen, in welche es bei der vorigen Lösung geboten war, das von x_0 bis $x_0 + y$ sich erstreckende zu theilen.

Recapitulirt man unter der ferneren Annahme, dass $f(u)$ für die Argumente x, $x + y$ $x + \ldots x + ny$ keine Unstetigkeit besitze, in welchem Falle das Resultat eine etwas einfache Gestalt annimmt, so ist demnach das Theorem gefunden:

$$(13) \qquad \frac{1}{y}\int_{x_0}^{x_1} f(u)\,du + \frac{2}{y}\sum_{a=1}^{a=\infty}\int_{x_0}^{x_1} f(u)\cos\frac{u-x}{y}\,2a\pi du = \sum_{a=0}^{a=n} f(x+ay)\,,$$

worin die Integrale als geradlinige zu verstehen sind; es gilt dasselbe unter der Voraussetzung, dass die Zahlenpunkte x_0, x, $x_1 - ny$ so in der Richtung und dem Sinne des Vectors von y auf einander folgen, dass x von den beiden andern um weniger als die Länge dieses Vectors absteht, und mit dem Vorbehalt, dass für $x_0 = x$, sowie für $x_1 = x + ny$ von dem Terme $f(x)$ resp. $f(x + \ldots)$ nur die Hälfte zu nehmen ist; dazu kommt endlich die schon erwähnte Bedingung der Stetigkeit von $f(u)$ an den Stellen $x + ay$ auf der Verbindungslinie von x_0, x_1, und der Stetigkeit von $\int_{x_0}^{\xi} f($ für alle Werthe von ξ zwischen x_0 und x_1.

Insbesondere erhält man also für $x_0 = x$, $x_1 = x + ny$ das Theorem:

$$(14) \qquad \frac{1}{y}\int_{x}^{x+ny} f(u)\,du + \frac{2}{y}\sum_{a=1}^{a=\infty}\int_{x}^{x+ny} f(u)\cos\frac{u-x}{y}\,2a\pi du = \frac{f(x)}{2} + \sum_{a=1}^{a=n-1} f(x+ay) + \frac{f(x+ny)}{2}$$

und hierin sind x und y zwei ganz beliebige complexe Zahlen, indem alle früheren Bedingungen mit Ausnahme derjenigen für die Endlichkeit von $f(u)$ (genauer die Stetigkeit von $\int f(u)\,du$) nun erfüllt sind, mithin überflüssig werden.

Anmerkung. Es verdient noch hervorgehoben zu werden, dass die Reihe (4), deren um (13) angegeben ist, in dem allgemeinen Falle complexer Variabeln nicht etwa in zwei solche

t erden darf, welche nach den *cosinus* resp. den *sinus* der Vielfachen von $\frac{2\pi x}{y}$, für sich, fort-
te denn obwohl die Summe der gleichstelligen Glieder dieser letzteren eine convergente Reihe
, sind jene einzeln genommen doch divergent; zu ihrer Convergenz würde erforderlich sein,
nicht allein $\frac{x_1 - x}{y}$, $\frac{x_0 - x}{y}$, sondern auch $\frac{x_1 + x}{y}$, $\frac{x_0 + x}{y}$ reelle Zahlen wären, dass mithin
Punkte x_1, x, x_0, y auf einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden lägen.

---

§ 2.

Herleitung der erweiterten Summenformel.

us dem vorhin festgestellten Theorem der Summation durch periodische Reihen, welches in
m (13) ausgesprochen ist, ergibt sich die in Aussicht gestellte Summenformel durch wieder-
a elle Integration, wenn darnach alle unendlichen Reihen summirt werden.
az ist jedoch die Kenntniss einiger Eigenschaften der von Raabe*) so genannten und zuerst
el n Jacob-Bernoulli'schen Function (von ganzer positiver Ordnungszahl) erforderlich, welche
nä st anführen will; ich bediene mich dabei einer Bezeichnung, die sich enge an die von
K kelin**) benutzte: $B(z,m)$ anschliesst; für natürliche Zahlen z und m bezeichne ich nämlich:

$$\sum_{a=o}^{a=z-1} a^m = m!\, P(z, m),$$

$=\Gamma(m+1)$ bedeute. Für jedes von o verschiedene m stimmt alsdann die rechter Hand defi-
ur ion mit der Bernoulli'schen $B(z, m)$ überein; nur für $m = o$ unterscheiden sich beide,
ar m eine Einheit, indem für die Definition der letzteren in Gleichung (15) als untere Grenze
nn 1 statt 0 genommen werden müsste. Während demnach für diesen Fall $B(z, o) = z - 1$
er wir gemäss (15): $P(z, o) = z$.
is dann bekannt, dass die Function P des Argumentes z und der Ordnung m als eine
ti nale Function von z dargestellt werden kann, welche Darstellung für ein nicht ganzes
s als Definition der Function noch weiter festgehalten werden soll; nämlich es ist:

$$P(z, m) = \sum_{a=0}^{a=m} \frac{B_a^{(-1)}\, z^{m-a+1}}{(m-a+1)!},$$

e rössen $B_a^{(-1)}$ die Bedeutung haben der Entwickelungscoefficienten der Function $\left\{\frac{e^u - 1}{u}\right\}^{-1} =$
der aus dem Mac-Laurin'schen Satze für hinreichend kleine u sich ergebenden Reihe,
e specieller Fall sind von den durch die Gleichung:

---

rel s Journal, Bd. 42, pag. 348; die Jacob-Bernoulli'sche Function, Zürich 1848; Mathematische
un en, Zürich 1857 und 1858.
ll meine Theorie der harmonischen Reihen, Basel 1862.

$$\left\{\frac{e^u-1}{u}\right\}^x = \sum_{a=0}^{a=\infty} B_a^{(x)} u^a$$

definirten Entwickelungscoefficienten $B_a^{(x)}$, auf die ich bei einer andern Gelegenheit zurückzukommen gedenke.

Die Coefficienten $B_a^{(-1)}$ können leicht berechnet werden durch die recurrirenden Gleichungen

$$\sum_{a=0}^{a=m} \frac{B_a^{(-1)}}{(m-a+1)!} = \begin{cases} 1 \text{ für } m = 0 \\ 0 \text{ für } m = 1, 2, 3, \ldots, \end{cases} \tag{17}$$

und ihr einfacher Zusammenhang mit den Bernoulli'schen Zahlen:

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = \frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \text{ etc.}$$

ist durch die Gleichungen ausgedrückt:

$$B_0^{(-1)} = 1, \quad B_1^{(-1)} = -\frac{1}{2}, \quad B_{2a}^{(-1)} = \frac{(-1)^{a-1} B_{2a}}{(2a)!}, \quad B_{2a+1}^{(-1)} = 0, \text{ für } a = 1, 2, 3, \ldots \tag{18}$$

Von den independenten Darstellungen derselben erwähne ich nur die drei nachfolgende, welche nicht allgemein bekannt zu sein scheinen:

$$B_m^{(-1)} = \sum_{a=o}^{a=m} (-1)^a (m+1)_{a+1} B_m^{(a)}, \qquad B_m^{(-1)} = \sum_{a=1}^{a=m} (-1)^{m-a-1} \frac{m}{a} (m)_a B_m^{(a)},$$

$$B_m^{(-1)} = (-1)^{m-1} \left\{ \sum_{a=o}^{a=m-1} \frac{m}{m-a} B_{m-a}^{(a)} B_a^{(m-a)} - B_m^{(m)} \right\},$$

worin: $B_m^{(a)} = \frac{(-1)^a}{(m+a)!} \cdot \sum_{c=o}^{c=a} (-1)^c (a)_c c^{m+a}$ ist, und $(a)_c = \frac{a!}{(a-c)!\,c!}$ einen Binomialcoefficienten bezeichnet.

Zur Orientirung möge noch angeführt werden, dass nach einer Bemerkung von Jacobi[loc.] die Function P auch als ein Entwicklungscoefficient definirt werden kann durch die Festsetzung:

$$\frac{e^{zu}-1}{e^u-1} = \sum_{m=o}^{m=\infty} u^m \,.\, P(z, m); \tag{19}$$

die Entwicklung gilt für alle möglichen Werthe von u, wenn z eine natürliche Zahl ist; bitzt gegen z einen andern Werth, so ist sie nur zulässig für die Werthe von u innerhalb eine(n) den Nullpunkt beschriebenen) Convergenzkreises, dessen Radius 2π nicht übersteigt. Hiert ist gleich die Darstellung gegeben:

$$m\,!\,P(z, m) = \lim_{u=o} \,.\, d_u^m \cdot \frac{e^{zu}-1}{e^u-1}, \tag{20}$$

worin die linke Seite, wenn $m > o$, auch durch $B(z, m)$ ersetzt werden kann; dieselbe wurde Schlömilch*) benutzt, um die Haupteigenschaften der Bernoulli'schen Function daraus abzuleiten.

Diejenige Eigenschaft der Bernoulli'schen Function, auf welche sich die nachfolgenden Deductionen vorzugsweise stützen, ist nun die schon von Raabe gegebene Entwickelung derselben nach den

*) Dessen Zeitschrift, Bd. 1, pag. 193. Vergl. auch das Compendium der höheren Analysis, 2ter Theil, von demselben Verfasser.

...us der Vielfachen des Argumentes z. Ohne dass man die Fälle einer geraden und einer un-...er Ordnungszahl m zu unterscheiden braucht, lassen sich die gedachten Fourier'schen Reihen ...nfassen in der Gleichung:

$$2 \cdot \sum_{a=1}^{a=\infty} \frac{\cos\left(2az - \frac{m+1}{2}\right)\pi}{(2a\pi)^{m+1}} = -\left\{ P(z,m) + B_{m+1}^{(-1)} \right\},$$

...r $0 < z < 1$ und $m = 0, 1, 2, 3 \ldots$ gültig ist. Wie eine leichte Prüfung zeigt, gilt die ...ung auch noch für $z = 0$ und $z = 1$, ausgenommen den Fall $m = 0$; damit in letzterem ...ung für $z = 0$ richtig werde, muss man rechts den Term $B_1^{(-1)}$ weglassen. Für den in der ...fig auftretenden Ausdruck auf der rechten Seite möge die Abkürzung eingeführt werden:

$$P(z,m) + B_{m+1}^{(-1)} = P_m(z).$$

...mmen dann noch die bekannten Sätze zur Anwendung:

$$P_m(1-z) = (-1)^{m+1} P_m(z), \qquad (25) \quad d_z^n \cdot P_m(z) = P_m(z-n),$$

$$P(z+n,m) - P(z,m) = \sum_{a=0}^{a=n-1} (z+a)^m, \qquad (26) \quad \sum_{a=0}^{a=n-1} P_m\left(z + \frac{a}{n}\right) = \frac{P_m(nz)}{n^m}.$$

...bis vorausgesetzt, können wir zu der an das Theorem (13) des § 1 sich knüpfenden Unter-...g zurückkehren. Damit die partiellen Integrationen nach der gewöhnlichen Regel ausführbar ...hne Amplitudenzerlegungen zu erheischen — muss die Function $f(u)$ nebst ihren ersten ...rte soweit dieselben in Betracht kommen, jetzt stetig vorausgesetzt werden innerhalb der ...plitude der Integrale, d. i. zwischen x_0 und x_1.

...edes Integral unter dem Summenzeichen in (13) wende man nun das allgemeine Schema ...holten partiellen Integration an:

$$\varphi(u)\psi(u)\,du = \sum_{b=0}^{b=m-1} (-1)^b\, d_u^b \cdot \varphi(u) \times \int^{b+1} \psi(u)\, du^{b+1} + (-1)^m \int \left\{ d_u^m \cdot \varphi(u) \times \int^m \psi(u)\, du^m \right\} du,$$

...m setzt: $\varphi(u) = f(u), \quad \psi(u) = \cos\frac{u-x}{y} 2a\pi,$ und berücksichtigt, dass:

$$\int^m \cos(\alpha u + \beta)\, du^m = \frac{\cos\left(\alpha u + \beta - \frac{m\pi}{2}\right)}{\alpha^m}$$

...n ergiebt sich zwischen den Grenzen x_0 und x_1:

$$\int f(u) \cos\frac{u-x}{y} 2a\pi \cdot du = \sum_{b=0}^{b=m-1} (-1)^b \left(\frac{2a\pi}{y}\right)^{b+1} \cdot \left[f^{(b)}(u) \cos\left(2a\frac{u-x}{y} - \frac{b+1}{2}\right)\pi \right]_{u=x_0}^{u=x_1} +$$

$$+ (-1)^m \left(\frac{y}{2a\pi}\right)^m \int_{x_0}^{x_1} f^{(m)}(u) \cos\left(2a\frac{u-x}{y} - \frac{m}{2}\right)\pi \cdot du$$

...se Werth, für $a = 1, 2, 3, \ldots$ in inf. in Anspruch genommen, hat man sich in die Gleichung ...gesetzt zu denken. Das Ergebniss lässt sich sogleich dadurch vereinfachen, dass man die ...he Summationen nach a mittelst des Theorems (21) in endlicher Form ausführt. Es möge

dies zunächst bei denjenigen Gliedern geschehen, welche ausserhalb der Integralzeichen u kommen. Da vor der Anwendung des Theorems (21) immer erst bewirkt werden muss da Factor von $2a\pi$ unter dem *cosinus* zwischen 0 und 1 liege, so schreibe man den Coefficient $(-1)^b\left(\frac{y}{2a\pi}\right)^{b+1}$ unter dem Summenzeichen in der ersten Zeile der Gleichung (28) wie folgt

$$f^{(b)}(x_1)\cos\left(2a\frac{x_1-x}{y}-\frac{b+1}{2}\right)\pi - f^{(b)}(x_0)\cos\left(2a\frac{x_0-x}{y}-\frac{b+1}{2}\right)\pi =$$

$$= f^{(b)}(x_1)\cos\left(2a\frac{x_1-ny-x}{y}-\frac{b+1}{2}\right)\pi + (-1)^b f^{(b)}(x_0)\cos\left(2a\frac{x-x_0}{y}-\frac{}{2}\right)$$

was leicht zu rechtfertigen ist. Nach vollzogener Einsetzung erhält man hierauf unmittelbar da Th

$$(29)\quad \sum_{a=0}^{a=n} f(x+ay) = \frac{1}{y}\int_{x_0}^{x_1} f(u)\,du + \sum_{b=0}^{b=m-1} y^b\left\{(-1)^{b+1} f^{(b)}(x_1) P_b\left(\frac{x_1-ny-x}{y}\right) - f^{(b)}(x_0) P_b\left(\frac{x-}{y}\right)\right\}$$

wobei das Restglied R_m, so lange die Summation nach a noch nicht in demselben ausgefüh zunächst in der Form erscheint:

$$(30)\qquad R_m = (-1)^m \cdot 2y^{m-1}\int_{x_0}^{x_1} f^{(m)}(u)\cdot\sum_{a=1}^{a=\infty}\frac{\cos\left(2a\frac{u-x}{y}-\frac{m}{2}\right)\pi}{(2a\pi)^m}\cdot du,$$

die sich bei Unterscheidung gerader und ungerader m vereinfacht zu:

$$R_{2m} = (-1)^m \cdot 2y^{2m-1}\int_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(u)\sum_{a=1}^{a=\infty}\frac{\cos\frac{u-x}{y}\,2a\pi}{(2a\pi)^{2m}}\,du\,,$$

$$R_{2m+1} = (-1)^{m+1} \cdot 2y^{2m}\int_{x_0}^{x_1} f^{(2m+1)}(u)\sum_{a=1}^{a=\infty}\frac{\sin\frac{u-x}{y}\,2a\pi}{(2a\pi)^{2m+1}}\,du.$$

Bedingung für die Gültigkeit der Gleichung (29), oder wenigstens ihrer Herleitung, ist hsic der zulässigen Werthe von x das Bestehen der Ungleichungen:

$$-1 < \frac{x_0-x}{y} < 0 < \frac{x_1-ny-x}{y} < 1.$$

Ausgeschlossen sind bis jetzt die beiden Grenzfälle:

$$\frac{x_0-x}{y} = 0 \text{ und } 0 = \frac{x_1-ny-x}{y},$$

weil alsdann abgesehen von der links in Gleichung (29) anzubringenden Modification auch da Th (21) nicht für alle Werthe von m in Anspruch genommen werden darf.

Ehe wir weiter gehen, sollen diese bisher ausgeschlossenen Grenzfälle näher untersuc w

Für $x_1 = x + ny$ ist nach der Gültigkeitsbedingung des Theorems (21) die rechte Seit Gleichung (29) dahin zu modificiren, dass man in dem Coefficienten

$$P_0\left(\frac{x_1-ny-x}{y}\right) = P\left(\frac{x_1-ny-x}{y}, 0\right) + B_1^{(-1)} \text{ von } f^{(o)}(x_1) = f(x_1)$$

den Term $B_1^{(-1)} = -\frac{1}{2}$ unterdrückt, in dem Factor

$$P_0\left(\frac{x-x_0}{y}\right) = P\left(\frac{x-x_0}{y}, 0\right) + B_1^{(-1)} \text{ von } f^{(o)}(x_0) = f(x_0)$$

denselben beibehält. Diese Unterdrückung ist äquivalent mit der Subtraction eines Gliedes von der noch unmodificirten rechten Seite der Gleichung. Nach dem sub (13) geschilderten hinsichtlich eventueller Abänderungen der einen Seite der Gleichung muss aber in dem n Falle $x_1 = x + ny$ auch auf der linken Seite der obigen Gleichung (20) von dem letzten $x+ny$) oder $f(x_1)$ der Summe nur die Hälfte angeschrieben werden, was ebenfalls auf eine on von $\frac{1}{2} f(x_1)$ hinausläuft. Offenbar nun heben sich die linker und die rechter Hand im nen Falle anzubringenden Modificationen gegenseitig auf, insofern man, nachdem sie beide sind, durch beiderseitige Addition von $\frac{1}{2} f(x_1)$ genau die gar nicht modificirte Gleichung ie Gültigkeit der Gleichung (29) bleibt somit auch für $x_1 = x + ny$ unverändert bestehen. — ebenso muss für $x = x_0$ rechts in dem Coefficienten von $f^{(a)}(x_0)$ der Term $B_1^{(-1)}$ unterdrückt l. h. $\frac{1}{2} f(x_0)$ von der rechten Seite der Gleichung subtrahirt werden; und da aus einem unde von dem ersten Glied $f(x)$ der Summe auf der linken Seite dann auch nur die Hälfte ung gebracht werden darf, so kann die Gleichung auch in dem Grenzfall $x_0 = x$ wieder unaufrecht erhalten werden.

Die Bedingungen, unter welchen die angegebene Herleitung des Theorems (29) zulässig ist, sich mithin auf die Ungleichungen:

$$-1 < \frac{x_0 - x}{y} \leqq 0 \leqq \frac{x_1 - ny - x}{y} < 1,$$

die Forderung der Stetigkeit der Function $f(u)$ und ihrer $m-1$ ersten Derivirten auf der inie zwischen x_0 und x_1.

leibt jetzt noch in dem Restglied (30) die Summation nach a vermittelst Bernoulli'scher auszuführen. Zu dem Ende zerlege man durch Zertheilung der Grenzen das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x} + \sum_{b=1}^{b=n-1} \int_{x+by}^{x+(b+1)y} + \int_{x+ny}^{x_1},$$

des dieser Theilintegrale der Factor von $2a\pi$ unter dem *cosinus* zwischen andern und andern hlen eingeschlossen ist; nämlich innerhalb der Amplitude des ersten Integrales auf der ite hat man: $-1 < \frac{u-x}{y} \leqq 0$, ferner innerhalb des Theilintegrales, welches das allied der Summe bildet: $b \leqq \frac{u-x}{y} \leqq b+1$, endlich innerhalb des letzten Theilintegrales: $< n+1$.

un behufs Anwendung des Theorems (21) die *cosinus* auf solche zurückzuführen, in deren der Factor von $2a\pi$ zwischen 0 und 1 liegt, schreibe man anstatt der in Gleichung (30) *cosinus*-Function im ersten der eben genannten Theilintegrale: $\cos\left(2a\,\frac{u-x+y}{y} - \frac{m}{2}\right)\pi$,

im zweiten $\cos\left(2a\,\frac{u-x-by}{y}-\frac{m}{2}\right)\pi$, und im dritten: $\cos\left(2a\,\frac{u-x-ny}{y}-\frac{m}{2}\right)\pi$, was offe
gestattet ist. Alsdann aber lassen sich unmittelbar die unendlichen Reihen summiren, und ergibt
die Darstellung des Restgliedes:

$$(33)\quad R_m=(-1)^{m-1}y^{m-1}\cdot\left\{\int_{x_0}^{x}f^{(m)}(u)\,P_{m-1}\left(\frac{u-x}{y}+1\right)du+\sum_{b=o}^{b=n-1}\int_{x+by}^{x+(b+1)y}f^{(m)}(u)\,P_{m-1}\left(\frac{u-x}{y}-b\right)\right.$$
$$\left.+\int_{x+ny}^{x_1}f^{(m)}(u)\,P_{m-1}\left(\frac{u-x}{y}-n\right)\right.$$

welche, durch einfache Substitutionen für die Integrationsvariabeln, auch auf die Form geb
werden kann:

$$(34)\quad R_m=(-1)^{m-1}y^{m-1}\left\{\int_{x_0+y}^{x+y}P_{m-1}\left(\frac{u-x}{y}\right)f^{(m)}(u-y)\,du+\int_{x}^{x+y}P_{m-1}\left(\frac{u-x}{y}\right)\cdot\sum_{b=o}^{b=n-1}f^{(m)}(u+by)\,d\right.$$
$$\left.+\int_{x}^{x_1-ny}P_{m-1}\left(\frac{u-x}{y}\right)f^{(m)}(u+n\right)d$$

Die Gleichungen (29) und (33) oder (34) drücken zusammen das Theorem aus, um dessen
leitung es sich handelte. Unter der speciellen Annahme: $x_0=x=x_1-ny$ geht aus demselben
mit Rücksicht auf den bekannten Werth: $P(o,m)=o$ — in der That die gewöhnliche Summenfo
Mac-Laurin's hervor:

$$(35)\quad \sum_{a=o}^{a=n}f(x+ay)=\frac{1}{y}\int_{x}^{x+ny}f(u)\,du+\sum_{b=o}^{b=m-1}B_{b+1}^{(-1)}y^{b}\left\{(-1)^{b+1}f^{(b)}(x+ny)-f^{(b)}(x)\right\}+R,$$

wo

$$(36)\quad R_m=(-1)^{m-1}y^{m-1}\int_{x}^{x+y}P_{m-1}\left(\frac{u-x}{y}\right)\sum_{b=o}^{b=n-1}f^{(m)}(u+by)\,du$$

ist. Wegen der Relationen (18) kann derselben durch Subtraction von $f(x+ny)$ auch die gäufi
Form gegeben werden:

$$(37)\quad \sum_{a=o}^{a=n-1}f(x+ay)=\frac{1}{y}\int_{x}^{x+ny}f(u)\,du+\sum_{b=o}^{b=m-1}B_{b+1}^{(-1)}y^{b}\left\{f^{(b)}(x+ny)-f^{(b)}(x)\right\}+R_m.$$

---

§ 3.

Directe Verification der erweiterten Summenformel.

Die Richtigkeit des gefundenen Theorems lässt sich noch auf einem andern Wege unmitte
zur Evidenz bringen, auf welchem man der Vermittlung periodischer Reihen nicht bedarf. Dabei
zugleich an den Tag treten, wie das Gültigkeitsbereich der Variabeln noch weiter ausgedehnt we
kann. —

Zur Vorbereitung hiezu müssen zuerst einige Umformungen mit dem Restgliede vorgenom
werden, welche unabhängig sind von irgendwelchen Voraussetzungen hinsichtlich der gegenseitigen
oder Entfernung der Puncte x_1, x, x_0 auf der zu dem Vector von y parallelen Geraden.

...ch der unter (24) in § 2 angegebenen Haupteigenschaft der Bernoulli'schen Function, nämlich ...n Gleichungen:

$$P(z+1, m) = P(z, m) + \frac{z^m}{m!}, \qquad P(z-b, m) = P(z, m) - \sum_{c=1}^{c=b} \frac{(z-c)^m}{m!}$$

...e alle Functionen P, welche in der Form (33) des Restes R_m vorkommen, zurückgeführt werden ...che mit dem Argument $\frac{u-x}{y}$. Da alsdann in den Integralen der von b unabhängig werden- ...me ein stetiger Anschluss der Integrationsgrenzen stattfindet, so können diese in ein einziges ...r zusammengezogen werden, und ergibt sich:

$$R_m = (-1)^{m-1} y^{m-1} \int_{x_0}^{x_1} f^{(m)}(u)\, P_{m-1}\left(\frac{u-x}{y}\right) du +$$

$$\frac{1}{(m-1)!}\left\{\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(u)\,(u-x)^{m-1}\,du - \sum_{b=1}^{b=n-1} \int_{x+by}^{x+(b+1)y} f^{(m)}(u) \cdot \sum_{c=1}^{c=b} (u-x-cy)^{m-1}\,du - \int_{x+ny}^{x_1} f^{(m)}(u) \sum_{c=1}^{c=n} (u-x-cy)^{m-1}\,du\right\}.$$

...tauscht man in der letzten Zeile die Ordnung der Summationen nach b und nach c gemäss ...ema: $\sum_{b=1}^{b=n-1} \sum_{c=1}^{c=b} = \sum_{c=1}^{c=n-1} \sum_{b=c}^{b=n-1}$, so lässt sich die nach b zu nehmende Summe, wegen stetigen ...hl ses der Integrationsgrenzen an einander, wieder in ein einziges Integral zusammenziehen; das ...e tegral in Gleichung (38) kann hierauf aus dem nämlichen Grunde mit in die vorhergehende ...me aufgenommen werden, und folgt:

$$R_m = (-1)^{m-1} y^{m-1} \int_{x_0}^{x_1} f^{(m)}(u) P_{m-1}\left(\frac{u-x}{y}\right) du +$$

$$+ \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\left\{\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(u)\,(u-x)^{m-1}\,du - \sum_{c=1}^{c=n} \int_{x+cy}^{x_1} f^{(m)}(u-x-cy)^{m-1}\,du\right\},$$

...ähnlichem Wege kann man auch die sich noch einfacher darstellende Formel erhalten:

$$R_m = (-1)^{m-1} y^{m-1} \int_{x_0}^{x_1} f^{(m)}(u)\, P_{m-1}\left(\frac{u-x}{y}+1\right) du + \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \sum_{c=o}^{c=n} \int_{x+cy}^{x_1} f^{(m)}(u)\,(u-x-cy)^{m-1}\,du,$$

...welcher ich jedoch keinen Gebrauch machen will.

...n Gleichung (39) ist es leicht, die Quadraturen im zweiten Theile durch wiederholte partielle ...rationen auszuführen und zwar hat man nach dem Schema (27) des § 2 die Ergebnisse:

$$\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(u)\,(u-x)^{m-1}\,du = (-1)^{m-1}\,(m-1)!\left\{f(x) - f(x_0) - \sum_{b=1}^{b=m-1} \frac{(x-x_0)^b\, f^{(b)}(x_0)}{b!}\right\},$$

$$\int (u-x-cy)^{m-1}\,du = (-1)^{m-1}\,(m-1)!\left\{\sum_{b=1}^{b=m-1} \frac{(-1)^b\,(x_1-x-cy)^b\, f^{(b)}(x_1)}{b!} + f(x_1) - f(x+cy)\right\}$$

...den Einsetzung das mit dem Factor $\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}$ in Gleichung (39) behaftete Glied übergeht in:

$$\sum_{c=o}^{c=n} f(x+cy) - \sum_{b=o}^{b=m-1} \frac{f^{(b)}(x_0)\cdot(x-x_0)^b + (-1)^b\, f^{(b)}(x_1) \cdot \sum_{c=1}^{c=n} (x_1-x-cy)^b}{b!}$$

...lge der in § 2 angegebenen Theoreme (23), (24) hat man aber:

$$(x-x_0)^b = b!\,y^b \cdot \left\{ P_b\left(\frac{x-x_0}{y}\right) + (-1)^b P_b\left(\frac{x_0-x}{y}\right) \right\}, \text{ und}$$

$$\sum_{c=1}^{c=n} (x_1 - x - cy)^b = b!\,y^b \left\{ P_b\left(\frac{x_1-x}{y}\right) - P_b\left(\frac{x_1-x-ny}{y}\right) \right\}.$$

Daher lässt sich der Ausdruck (41), mithin die Gleichung (39), so darstellen:

$$(42) \quad R_m = (-1)^{m-1} y^{m-1} \int_{x_0}^{x_1} f^{(m)}(u)\, P_{m-1}\left(\frac{u-x}{y}\right) du + \sum_{a=0}^{a=n} f(x+ay) +$$

$$+ \sum_{b=0}^{b=m-1} y^b \left\{ (-1)^b f^{(b)}(x_1) \left[P_b\left(\frac{x_1-ny-x}{y}\right) - P_b\left(\frac{x_1-x}{y}\right) \right] + f^{(b)}(x_0) \left[P_b\left(\frac{x-x_0}{y}\right) + (-1)^b P_b\left(\frac{x-x}{y}\right) \right. \right.$$

Diese nun gewonnene Restform ist es endlich, welche in die Gleichung (29) des vorigen ei setzt, die Identität des Theorems bequem erkennen lässt. Durch die angegebene Substitutio e sich nämlich nach Weglassung der sich unmittelbar aufhebenden Terme:

$$(43) \quad 0 = \frac{1}{y} \int_{x_0}^{x_1} f(u)\, du + (-1)^{m-1} y^{m-1} \int_{x_0}^{x_1} f^{(m)}(u)\, P_{m-1}\left(\frac{u-x}{y}\right) du +$$

$$+ \sum_{b=1}^{b=m-1} (-1)^{b+1} y^b \left\{ f^{(b)}(x_1) P_b\left(\frac{x_1-x}{y}\right) - f^{(b)}(x_0) P_b\left(\frac{x-x}{y}\right) \right.$$

Die letzten Glieder lassen sich hier ebenfalls als Integrale zwischen den Grenzen x_0 un x_1 stellen, indem:

$$f^{(b)}(x_1) P_b\left(\frac{x_1-x}{y}\right) - f^{(b)}(x_0) P_b\left(\frac{x_0-x}{y}\right) = \int_{x_0}^{x_1} d_u \cdot \left\{ f^{(b)}(u) \cdot P_b\left(\frac{u-x}{y}\right) \right\} du,$$

dazu nach dem Theorem (25): $d_z \cdot P_b(z) = P_{b-1}(z)$ und $d_z \cdot P_0(z) = 1 = B_0^{(-1)}$ ist; worau di tegrale in ein einziges vereinigt werden können. Es unterliegt alsdann keiner Schwierigkeit, s dass die Function unter dem Integralzeichen in der That identisch verschwindet.

Aus diesem Resultat darf der Schluss gezogen werden, dass die Ungleichungen (31 fü Gültigkeit der erweiterten Summenformel nicht nothwendig erfüllt werden müssen, wenn gleic für die erst gegebene Herleitung unentbehrlich waren. Einzige Bedingung bleibt die Stetigkeit Function f und ihrer Derivirten auf der geraden Linie innerhalb der drei Intervalle x_0 bis x, $x+ny$, $x+ny$ bis x_1, welche mitunter in dem einen Intervall x_0 bis x_1 schon alle enthalten können.

---

§ 4.

Einiges über die Bernoulli'sche Funktion mit ganzer Ordnungszahl.

Wenn die im Vorigen gegebene Summenformel zu numerischen Rechnungen verwende w soll, so ist es vor Allem wünschenswerth, eine bequeme Methode zur Berechnung der in ihrem Gli auftretenden Bernoulli'schen Funktionen für die ersten Ordnungszahlen zu haben. Dazu schon

en diejenigen Darstellungen der Funktion $P(z, m)$ zu eignen, in welchen dieselbe nach Potenzen $\zeta = z(1-z)$ angeordnet erscheint. Wie bekannt, müssen nämlich $P(z, 2m+1)$ sowie $P(z, 2m)$ ganze rationale Functionen von ζ sein. Die Entwickelung dieser Functionen nach Potenzen

t im Wesentlichen Jacobi (l. c.) gegeben; ich will dieselbe hier auf einem andern Wege hn, auf welchem sich ihr allgemeines Bildungsgesetz herausstellen wird.

einem independenten Ausdruck für die Coefficienten der gedachten Entwickelung gelangt man r hat, indem man das Theorem (26) für den speziellen Fall $n = 2$ in der Form benutzt:

$$P(z, m) = \frac{1}{2^m} P\left\{2\left(z - \frac{1}{2}\right), m\right\} - P\left(z - \frac{1}{2}, m\right) + \left(\frac{1}{2^m} - 2\right) B_{m+1}^{(-1)}.$$

Na (16) ergibt sich daraus, wie schon Raabe gezeigt hat, zunächst die Darstellung von $P(z, m)$ an rationale Function von $z - \frac{1}{2}$:

$$P(z, m) = \sum_{a=0}^{a=m} \left(\frac{2}{2^{m-a}} - 1\right) B_{m-a}^{(-1)} \cdot \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)^{a+1}}{(a+1)!} + \left(\frac{1}{2^m} - 2\right) B_{m+1}^{(-1)}.$$

Beachtet man jedoch die Relationen (18), und bemerkt, dass auf der rechten Seite der einzige die $B^{(-1)}$ von ungeradem Index, welcher nicht verschwindet, d. i. $B_1^{(-1)}$, den Factor o besitzt, st ich das Resultat wie folgt vereinfachen:

$$P(z, 2m+1) = \sum_{c=0}^{c=m} \left(\frac{2}{4^{m-c}} - 1\right) B_{2m-2c}^{(-1)} \cdot \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)^{2c+2}}{(2c+2)!} + \left(\frac{2}{4^{m+1}} - 2\right) B_{2m+2}^{(-1)},$$

$$\frac{P(z, 2m)}{z - \frac{1}{2}} = \sum_{c=0}^{c=m} \left(\frac{2}{4^{m-c}} - 1\right) B_{2m-2c}^{(-1)} \cdot \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)^{2c}}{(2c+1)!}.$$

es stehen hier gerade Funktionen von $z - \frac{1}{2}$ oder ganze Functionen von $\left(z - \frac{1}{2}\right)^2$; da aber $\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \zeta$ ist, so bietet es keine Schwierigkeit, nach Einsetzung dieses Werthes die Potenzen mittelst des binomischen Satzes zu entwickeln, und das Ganze nach Potenzen von ζ zu tellt man die Ergebnisse abgekürzt in der Form dar:

$$(z, 2m+1) = \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+2)!} \cdot \sum_{a=2}^{a=m+1} \beta_{m-a+1}^{(m)} \zeta^a, \qquad (46)\quad \frac{P(z, 2m)}{z - \frac{1}{2}} = \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \sum_{a=1}^{a=m} \gamma_{m-a}^{(m)} \zeta^a,$$

en ich (nachdem die Bernoulli'schen Zahlen eingeführt sind) für die Entwickelungscoefficienten gan en Ausdrücke:

$$\beta_a^{(m)} = \frac{1}{4^a} \sum_{c=0}^{c=a} (-1)^{a-c} (4^c - 2)\, (2m+2)_{2c}\, (m-c+1)_{a-c}\, B_{2c},$$

$$\gamma_a^{(m)} = \frac{1}{4^a} \sum_{c=0}^{c=a} (-1)^{a-c} (4^c - 2)\, (2m+1)_{2c}\, (m-c)_{a-c}\, B_{2c};$$

d Grad der höchsten sowie der niedersten Potenz von ζ, welche in die Gleichungen (45)) ngeht, a priori festgestellt werden kann, so ergeben sich zugleich zwei Relationen der li'en Zahlen, die ich, weil sie anderweitig schon bekannt sind, übergehe.

Zur praktischen Berechnung der β und γ sind die independenten Ausdrücke (47) und (4) a dings nicht zu empfehlen. Für diesen Zweck ist es rathsamer, Recursionen aufzusuchen, de sich sehr viele aufstellen lassen. Als die einfachste bietet sich immerhin die Jacobi'sche da w ich mit etwas modificirter Herleitung hier kurz reproduciren will.

Zufolge des Zusammenhanges, welcher zwischen z und ζ besteht, leitet man leicht aus de Theorem (25) enthaltenen Eigenschaften der Function P:

$$d_z^2 P(z, 2m+1) = P(z, 2m-1) + B_{2m}^{(-1)} \quad \text{und} \quad d_z P(z, 2m+1) = P(z, 2m)$$

die Differentialgleichungen ab:

$$(49) \qquad (1-4\zeta)\, d_\zeta^2 \,.\, P(z, 2m+1) = 2 d_\zeta \,.\, P(z, 2m+1) + P(z, 2m-1) + B_{2m}^{(-1)},$$

$$(50) \qquad \frac{P(z, 2m)}{z - \frac{1}{2}} = -2 d_\zeta \,.\, P(z, 2m+1).$$

In dieselben substituire man die aus (45) und (46) hervorgehenden Ausdrücke, führe e a deuteten Differentiationen aus, und vergleiche beiderseits die Coefficienten der nämlichen ote von ζ. So ergeben sich aus der Differentialgleichung (49) die Recursionen:

$$(51) \begin{cases} \beta_0^{(m)} = \beta_0^{(m-1)} = 1, \\ 2(m-a+1)(2m-2a+1)\beta_a^{(m)} = (m-a+2)(m-a+1)\beta_{a-1}^{(m)} + 2(m+1)(2m+1)\beta_a^{(m-1)} \text{ für } a\ 1,2 \\ 2(m+1)(2m+1) B_{2m} = 2\beta_{m-1}^{(m)} = \beta_{m-2}^{(m)}, \end{cases}$$

indem der Werth von $\beta_0^{(1)} = 1$ von vornherein ermittelt werden kann.

Beiläufig geben diese Gleichungen einen neuen Weg zur Berechnung der Bernoulli'sche Za an. Auch kann aus denselben der Schluss gezogen werden, dass die Coefficienten β sämmtlic po sein müssen; darin liegt aber nach Gleichung (45) eine Bestätigung des (für die Discussion s l gliedes in der Mac-Laurin'schen Summenformel) wichtigen Satzes, dass die Function $P(z, n-$ zwischen $z = 0$ und $z = 1$ ihr Vorzeichen $(-1)^{m+1}$ nicht wechselt, dass sie für $z = \frac{1}{2}$ ihren grö numerischen Werth innerhalb jenes Intervalles besitzt, sowie vor und nach dieser Stelle symet verläuft, weil ja das nämliche mit ζ, als Function von z betrachtet, der Fall ist.

Sehr bequem berechnen sich nun aus (51) die Werthe der ersten Coefficienten β:

$$\beta_0^{(1)} = 1 = 2 \,.\, 3\, B_2,$$

$$\beta_0^{(2)} = 1,\ \beta_1^{(2)} = \frac{1}{2} = 3 \,.\, 5\, B_4,$$

$$\beta_0^{(3)} = 1,\ \beta_1^{(3)} = \frac{4}{3},\ \beta_2^{(3)} = \frac{2}{3} = 4 \,.\, 7\, B_6,$$

$$\beta_0^{(4)} = 1,\ \beta_1^{(4)} = \frac{5}{2},\ \beta_2^{(4)} = 3,\ \beta_3^{(4)} = \frac{3}{2} = 5 \,.\, 9\, B_8,$$

$$\beta_0^{(5)} = 1,\ \beta_1^{(5)} = 4,\ \beta_2^{(5)} = \frac{17}{2},\ \beta_3^{(5)} = 10,\ \beta_4^{(5)} = 5 = 6 \,.\, 11\, B_{10},$$

$$\beta_0^{(6)} = 1,\ \beta_1^{(6)} = \frac{35}{6},\ \beta_2^{(6)} = \frac{287}{15},\ \beta_3^{(6)} = \frac{118}{3},\ \beta_4^{(6)} = \frac{691}{15},\ \beta_5^{(6)} = \frac{691}{30} = 7 \,.\, 13\, B_{12},$$

d stellen sich danach die Functionen P für die ersten ungeraden Ordnungszahlen so dar:

$$4\,!\,P(z,3) = \xi^2,$$

$$6\,!\,P(z,5) = -\,\xi^2\left(\xi+\frac{1}{2}\right),$$

$$8\,!\,P(z,7) = \xi^2\left(\xi^2+\frac{4}{3}\,\xi+\frac{2}{3}\right),$$

$$10\,!\,P(z,9) = -\,\xi^2\left(\xi^3+\frac{5}{2}\,\xi^2+3\,\xi+\frac{3}{2}\right),$$

$$12\,!\,P(z,11) = \xi^2\left(\xi^4+4\,\xi^3+\frac{17}{2}\,\xi^2+10\,\xi+5\right),$$

$$14\,!\,P(z,13) = -\,\xi^2\left(\xi^5+\frac{35}{6}\,\xi^4+\frac{287}{15}\,\xi^3+\frac{118}{3}\,\xi^2+\frac{691}{15}\,\xi+\frac{691}{30}\right),$$

ds $2\,!\,P(z,1) = -\,\xi$ ist, hat man direct einzusehen; denn die Fälle $m = o$ wurden still-
eigend ausgeschlossen.

Wie die Coefficienten γ in (46) bei gerader Ordnungszahl der Function P betrifft, so lehrt die
Recursionsgleichung (50) den einfachen Zusammenhang derselben mit den vorigen Coefficienten β:

$$(m+1)\,\gamma_a^{(m)} = (m-a+1)\,\beta_a^{(m)},$$

da nach werden die ersten Bernoulli'schen Functionen von gerader Ordnung:

$$3\,!\,P(z,2) = -\,\xi\left(z-\frac{1}{2}\right),$$

$$5\,!\,P(z,4) = \xi\left(\xi+\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right),$$

$$7\,!\,P(z,6) = -\,\xi\left(\xi^2+\xi+\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right),$$

$$9\,!\,P(z,8) = \xi\left(\xi^3+2\,\xi^2+\frac{9}{5}\,\xi+\frac{3}{5}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right),$$

$$11\,!\,P(z,10) = -\,\xi\left(\xi^4+\frac{10}{3}\,\xi^3+\frac{17}{3}\,\xi^2+5\,\xi+\frac{5}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right),$$

$$13\,!\,P(z,12) = \xi\left(\xi^5+5\,\xi^4+\frac{41}{3}\,\xi^3+\frac{472}{21}\,\xi^2+\frac{691}{35}\,\xi+\frac{691}{105}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right), \text{ etc.}$$

---

ec rirende Berechnungsmethoden lassen sich auch für die Bernoulli'schen Functionen selbst
n. Ich erhielt eine solche, indem ich in dem Theorem (19) nach Multiplication mit dem Nenner
derseits nach Potenzen von u entwickelte, und die Coefficienten verglich. Es ergibt sich
h:

$$\frac{z^m}{m!} = \sum_{a=o}^{a=m-1}\frac{P(z,a)}{(m-a)!} \quad \text{oder:} \quad 1+\sum_{a=o}^{a=m-1}(m)_a\,B(z,a) = z^m,$$

ch (24) kann diesem Resultat auch die Gestalt gegeben werden:

$$B(z+1,m) = 1+\sum_{a=o}^{a=m}(m)_a\,B(z,a),$$

he es einige Analogie mit dem binomischen Satze zeigt.

Der Taylor'sche Satz, in seiner von Crelle*) herrührenden Erweiterung für endliche Diffe... spricht aber, wenn das Increment = 1 genommen wird, für den gegenwärtigen Fall die Identit... a

$$B(z+1, m) = \sum_{a=0}^{a=m} (m)_a \sum_{b=0}^{b=a} (-1)^{a-b} (a)_b B(z+1, b).$$

Durch Vergleichung der letzteren mit der vorausgehenden (53) wurde ich auf eine neue Hat... geführt, mit deren Mittheilung ich diesen § beschliessen will, nämlich auf die Gleichung:

$$(54) \qquad B(z, m) = \sum_{a=0}^{a=m} (-1)^a (m)_a B(z+1, m-a), \text{ für } m > 0,$$

welche gewissermassen als die Umkehrung von der (53) angesehen werden kann.

Bedient man sich der von Cauchy eingeführten Methode der Trennung von Operations-Symbo... und Subjecten, so lässt sich dieselbe wie folgt beweisen.

Da in Gleichung (20) die linke Seite für $m = 0$ durch $B(z, 0) + 1$ ersetzt werden muss so... aber gleich $B(z, m)$ ist, so ist in (54) die Summe auf der rechten Seite äquivalent mit dem ...re... werth des Ausdrucks:

$$\left\{ \sum_{a=0}^{a=m} (-1)^a (m)_a d_u^{m-a} \right\} \cdot \frac{e^{(z+1)u} - 1}{e^u - 1} - (-1)^m$$

für $u = 0$, oder nach dem binomischen Satze äquivalent mit:

$$(d_u - 1)^m \cdot \frac{e^{(z+1)u} - 1}{e^u - 1} - (-1)^m, \text{ für } u = 0.$$

Durch Schluss von m auf $m+1$ überzeugt man sich jedoch leicht von der Richtigkt... Theorems:

$$(d_u - 1)^m \cdot f(u) = e^u d_u^m \cdot \{ e^{-u} f(u) \},$$

welches für eine jede Function f eines beliebigen Argumentes u eine Identität vorstellt.

Daher wird nun die Summe rechterhand in (54):

$$= e^u d_u^m \cdot \frac{e^{zu} - e^{-u}}{e^u - 1} - (-1)^m = e^u d_u^m \cdot \frac{e^{zu} - 1}{e^u - 1} + e^u d_u^m \cdot e^{-u} - (-1)^m, \text{ für } u = 0,$$

und da sich hier die beiden letzten Glieder wegheben, erhält man nach (20) sofort $B(z, m)$ al... We... dieses Ausdruckes, w. z. z. w.

---

§ 5.

Bemerkungen über die allgemeine Bernoulli'sche Function.

Zu den nachstehenden Betrachtungen wurde ich hauptsächlich angeregt durch das Studm... werthvollen Abhandlung des Herrn Kinkelin über die allgemeine Theorie der harmonischen ...eih... welche bereits citirt wurde, sowie einer Abhandlung von Herrn Lipschitz**) über verwandte Geg... stände. Durch die in der ersteren aufgestellte Definition der allgemeinen Bernoulli'schen unc... wurde ich insofern nicht ganz befriedigt, als dabei auf eine fruchtbare und sehr übersichtliche ...

*) Versuch einer allgemeinen Theorie der analytischen Facultäten, Berlin 1823, p. 200.

**) Crelle's Journal, Bd. 56, pag. 11.

g dieser Function verzichtet ist, welche sich sofort mittelst der Mac-Laurin'schen Summen- gewinnen lässt, wenn man ebenso wie die Reihe, so auch das Restglied in eine Differenz zweier ebildeten Functionen zerlegt; eine Darstellung, die sich, wie mir scheint, zur Definition dieser n in erster Linie eignet. Das dabei einzuschlagende Verfahren lässt sich zudem auf eine grosse von Functionen anwenden. In der zweiten Abhandlung ist die Bernoulli'sche Function nur für ll betrachtet, wo das zweite Argument reell und negativ ist.

e gewöhnliche Mac-Laurin'sche Summenformel (37) möge abgekürzt geschrieben werden:

$$\sum_{a=0}^{a=n-1} f(x+ay) = S_m + R_m,$$

$$S_m = \frac{1}{y}\int_x^{x+ny} f(u)\,du + \sum_{a=0}^{a=m-1} B_{a+1}^{(-1)}\, y^a \left\{ f^{(a)}(x+ny) - f^{(a)}(x) \right\}$$

h Gleichung (30):

$$R_m = (-1)^m\, 2\, y^{m-1} \int_x^{x+ny} f^{(m)}(u) \cdot \sum_{a=1}^{a=\infty} \frac{\cos\left(2a\frac{u-x}{y} - \frac{m}{2}\right)\pi}{(2a\pi)^m}\, du$$

Die rechte Seite dieser Gleichung kann stets in Form einer Differenz aus zwei gleichge- Functionen angeschrieben werden, welche sich nur durch ihre Argumente $x+ny$ und x eiden. Setzt man nämlich:

$$S_m(x) = \frac{1}{y}\int_{\gamma_1}^{x} f(u)\,du + \sum_{a=1}^{a=m-1} B_{a+1}^{(-1)}\, y^a\, f^{(a)}(x),$$

$$R_m(x) = (-1)^m \cdot 2y^{m-1} \int_{\gamma_2}^{x} f^{(m)}(u) \cdot \sum_{a=1}^{a=\infty} \frac{\cos\left(2a\frac{u-x}{y} - \frac{m}{2}\right)\pi}{(2a\pi)^m}\, du,$$

und γ_2 zwei vorläufig noch unbestimmte Constante vorstellen, die aber auf der Verbindungs- Punkte x und $x+ny$ so gewählt sein sollen, dass die Integrale convergent sind, so ist:

$$S_m = S_m(x+ny) - S_m(x), \qquad R_m = R_m(x+ny) - R_m(x).$$

Definirt man also durch die Festsetzung:

$$A_m(x) = S_m(x) + R_m(x)$$

Function der Variabeln x, welche von der Zahl m im Allgemeinen abhängt, und ausserdem verständlich von y, was hier nicht ausdrücklich angedeutet wurde, so geniesst diese Function ig schaft, dass:

$$\sum_{a=0}^{a=n-1} f(x+ay) = A_m(x+ny) - A_m(x)$$

ellt demnach insbesondere eine Lösung der Differenzengleichung $A_m(x+y) - A_m(x) = f(x)$ vor, ient dazu, die Summe links als Function von n zu expliciren.

r einer gewissen Voraussetzung kann nun aber dargethan werden, dass jene Function von m unabhängig wird, und folglich kürzer mit:

$$A_m(x) = A(x)$$

werden darf. Besitzt nämlich die Function $f(u)$ die Eigenschaft, dass ihre sämmtlichen von einer bestimmten r^{ten} (incl.) an für unendliche Argumente verschwinden, genauer

gesagt, für Argumente, welche auf der Verbindungslinie von x und $x+ny$ unendlich weit über letzteren Punkt hinausrücken, oder von der Form $x+ky$ sind, wenn mit k eine der Unendlich strebende natürliche Zahl bezeichnet wird, so ist nach (56): $R_m(x+ky)=0$; mithin wird $A_m(x+ky)=A(x+ky)$ unabhängig von m, falls diese Zahl nur der Bedingung: $m \geqq r$ unterworfen wird. Aus der für $n=k$ in Anspruch genommenen Gleichung (58) folgt alsdann, dass auch

$$A_m(x) = A(x+ky) - \sum_{a=o}^{a=k-1} f(x+ay)$$

unabhängig von m sein muss, weil dies mit dem rechts stehenden Ausdruck der Fall ist.

Nimmt man beispielsweise, um hievon eine Anwendung auf die harmonischen Reihen zu machen, $f(u)=u^s$ an, so kann man die Constante γ_1 so wählen, dass: $\int_{\gamma_1}^{x} u^s\,du = \frac{u^{s+1}}{s+1}$ wird, denn die Constante darf sogar auf der ganzen Zahlenebene willkürlich angenommen werden, wenn nur das Integral von $f(u)\,du$, genommen über den Umfang des von den 3 Punkten γ_1, x, und $x+ny$ bestimmten Dreiecks verschwindet, wenn also die Function innerhalb und auf der Begrenzung dieses ebin stetig und endlich ist. Der Einfachheit wegen soll der reelle Theil von x und von y positiv vorausgesetzt werden und der Sinn von $u^s = e^{s\,log\,u}$ eindeutig festgestellt sein durch die Bestimmung, dass der Factor von i im imaginären Theile von $log\,u$, während der reelle Theil von $u>0$ ist, zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liege. Durch diese Annahme ist nachher ein Unstetigwerden der Functionen in den Integrationswegen von selbst ausgeschlossen. Bezeichnen wir für den gegenwärtigen Fall verständiger: $S_m(x)=S_m(x,s)$ und $R_m(x)=R_m(x,s)$, so wird nun:

$$(60)\quad S_m(x,s) = \Gamma(s+1)\sum_{a=o}^{a=m}\frac{B_a^{(-1)}\,y^{a-1}x^{s-a+1}}{\Gamma(s-a+2)} = \frac{1}{\Gamma(-s)}\sum_{a=o}^{a=m}\frac{(-1)^{a-1}\,B_a^{(-1)}\,y^{a-1}\,\Gamma(a-1}{x^{a-s-1}}$$

oder auch in etwas anderer Schreibart:

$$(61)\quad S_m(x,s) = \sum_{a=o}^{a=m}\Gamma(a)\,(s)_{a-1}\,B_a^{(-1)}\,y^{a-1}x^{s-a+1} = \sum_{a=o}^{a=m}\frac{(-1)^{a-1}\,\Gamma(a)\,(a-s-2)_{a-1}\,B_a^{(-1)}}{x^{a-s-1}}$$

indem sich das erste Glied auf der rechten Seite von (55) in die nachfolgende Summe noch mit aufnehmen lässt. Die natürliche Zahl m kann beliebig gewählt werden, wenn nur die Forderung, dass der reelle Theil von $m-s>0$ sei, erfüllt ist. Die Constante γ_2 kann dann ferner ∞ gross genommen werden, und es kommt:

$$(62)\qquad R_m(x,s) = \frac{(-1)^{m+1}\cdot 2\,\Gamma(s+1)\,y^{m-1}}{\Gamma(s-m+1)}\int_x^\infty \frac{du}{u^{m-s}}\cdot\sum_{a=1}^{a=\infty}\frac{cos\left(2a\frac{u-x}{y}-\frac{m}{2}\right)\pi}{(2a\pi)^m}\,du,$$

oder wenn man $\frac{u-x}{y}=v$ substituirt, und von der leicht zu erweisenden Relation der Gammafunctionen: $\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s-m+1)} = \frac{(-1)^m\,\Gamma(m-s)}{\Gamma(-s)}$ (die schon in (60) benutzt wurde) Gebrauch macht,

$$(63)\qquad R_m(x,s) = -\frac{2\,\Gamma(m-s)}{\Gamma(-s)}\,y^m\int_o^\infty\frac{dv}{(x+vy)^{m-s}}\cdot\sum_{a=1}^{a=\infty}\frac{cos\left(2av-\frac{m}{2}\right)\pi}{(2a\pi)^m}\cdot dv.$$

ieser Ausdruck ist noch einiger bemerkenswerthen Transformationen fähig, welche ich kurz eb will. Macht man die nach der Theorie der Gammafunctionen gestattete Substitution:

$$\frac{1}{(x+vy)^{m-s}} = \frac{1}{\Gamma(m-s)} \int_0^\infty e^{-(x+vy)z} z^{m-s-1} dz,$$

ss sich die Integration nach v ausführen durch Zurückführung auf die Integralwerthe:

$$\int_0^\infty e^{-yzv} \cos 2a\pi v dv = \frac{yz}{(yz)^2+(2a\pi)^2}, \quad \int_0^\infty e^{-yzv} \sin 2a\pi v dv = \frac{2a\pi}{(yz)^2+(2a\pi)^2},$$

e wird:

$$54) \quad R_m(x,s) = -\frac{2y^m}{\Gamma(-s)} \sum_{a=1}^{a=\infty} \frac{1}{(2a\pi)^m} \int_0^\infty \frac{yz\cos\frac{m\pi}{2} + 2a\pi \sin\frac{m\pi}{2}}{(yz)^2+(2a\pi)^2} \cdot e^{-xz} z^{m-s-1} dz.$$

Ve umgekehrt diese Form in die vorige zurückverwandelt werden kann, ist ersichtlich. Szt man jedoch in (63) nochmals die den vorausgehenden Formeln ähnlich gebildeten Aus-ke in:

$$\frac{yz}{(yz)^2+(2a\pi)^2} = \int_0^\infty e^{-2a\pi u} \sin yzu du, \quad \frac{2a\pi}{(yz)^2+(2a\pi)^2} = \int_0^\infty e^{-2a\pi u} \cos yzu du,$$

nimt x und y gegenwärtig reell an, so können die Integrale nach z evaluirt werden vermöge Tbreme:

$$\int_0^\infty e^{-xz} z^{m-s-1} \cdot \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \Big\} (uyz)\, dz = \Gamma(m-s) \frac{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \Big\{ (m-s)\, arctg \frac{x}{uy} \Big\}}{(x^2+u^2y^2)^{\frac{m-s}{2}}},$$

es rgibt sich die neue Restform:

$$55) \quad R_m(x,s) = -\frac{2y^m}{\Gamma(-s)} \sum_{a=1}^{a=\infty} \frac{\Gamma(m-s)}{(2a\pi)^m} \int_0^\infty \frac{e^{-2a\pi u} \sin\left\{(m-s)\, arctg\left(\frac{x}{uy}\right) + \frac{m\pi}{2}\right\}}{\left\{x^2+(uy)^2\right\}^{\frac{m-s}{2}}} du,$$

i e *arctg* zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ zu wählen ist.

Er ich, wenn in (63) die Zerlegung: $\int_0^\infty dv = \sum_{b=0}^{b=\infty} \int_b^{b+1} dv$ vorgenommen, und in den einzelnen er die Summation nach dem laufenden Buchstaben a vermöge der Gleichung (21) mittelst ul scher Functionen ausgeführt wird, erhält man:

$$) \quad R_m(x,s) = \frac{\Gamma(m-s)}{\Gamma(-s)}\, y^m \cdot \sum_{b=0}^{b=\infty} \int_0^1 \frac{P(u, m-1) + B_m^{(-1)}}{\{x+(b+u)y\}^{m-s}} du,$$

s rf hierin das Summenzeichen auch hinter das Integralzeichen gesetzt werden, wenn der reelle v $m-s>1$ ist.

In an das Bisherige weitere Betrachtungen zu knüpfen, wofür sich die Restform (64) am besten ne scheint, will ich dieselbe nochmals anschreiben, und zwar einerseits unter der speciellen ss ung $y=1$, auf welche der allgemeinere Fall stets zurückgeführt werden kann, anderseits nt scheidung der Fälle $m=$ gerade und $m=$ ungerade, wodurch eine Vereinfachung der Aus- ielt wird. Alsdann ergibt sich nämlich:

$$(67)\quad R_{2m}(x,s) = \frac{(-1)^{m+1}\,2}{\Gamma(-s)\,(2\pi)^{2m+2}} \int_0^\infty e^{-xz} z^{2m-s} \cdot \sum_{a=1}^{a=\infty} \frac{dz}{a^{2m}\left\{a^2 + \left(\frac{z}{2\pi}\right)^2\right\}} = R_{2m+1}(x),$$

falls nur der reelle Theil von $2m - s > 0$ ist.

Auf einem andern Wege hat in dieser Form bereits Lipschitz (l. c.) das Restglied in Entwickelung der Bernoulli'schen Function für den Fall $s < 0$ abgeleitet. Geht man auch in Gleich (60) auf die Unterscheidung gerader und ungerader m ein, und führt statt der Coefficienten die Bernoulli'schen Zahlen ein (18), so erhält man ebenso:

$$(68)\quad S_{2m}(x,s) = S_{2m+1}(x,s) = \frac{x^{s+1}}{s+1} - \frac{x^s}{2} + \sum_{a=1}^{a=m} \frac{(-1)^{a-1} B_{2a}(s)_{2a-1}\, x^{s-2a+1}}{2a} =$$

$$= \frac{1}{(s+1)\,x^{-s-1}} - \frac{1}{2x^{-s}} + \sum_{a=1}^{a=m} \frac{(-1)^a B_{2a}(2a-s-2)_{2a}}{2a\,x^{2a-s-1}}$$

Wenn nun nach diesen Vorbereitungen:

$$A(x,s) = S_{2m}(x,s) + R_{2m}(x,s)$$

gesetzt wird, so ist gefunden, dass die Function $A(x,s)$ von der Zahl m unabhängig ist, denn oben angegebenen Bedingungen sind für den Fall $f(u) = u^s$ erfüllt. Man kann demnach eine Function $B(x,s)$ als die allgemeine Bernoulli'che Function definiren durch die Festsetzung:

$$B(x,s) = A(x,s) + K(s),$$

worin die bezüglich x constante Grösse $K(s)$ noch weiter bestimmt werden mag durch die Forderung dass: $B(1,s) = 0$ werde; diese Forderung, kraft welcher sich $K(s) = -A(1,s)$ ergibt, muss nothwendig gestellt werden, wenn für alle natürlichen Zahlen x:

$$(69)\quad B(x,s) = \sum_{a=1}^{a=x-1} a^s$$

werden, wenn also die Bernoulli'sche Function die begrenzten harmonischen Reihen summiren soll.

Demnach hat man nun für die Functionen $B(x,s)$ und $K(s)$ die übersichtlichen Ausdrücke:

$$(70)\quad B(x,s) = K(s) + S_{2m}(x,s) + R_{2m}(x,s)$$

$$(71)\quad -K(s) = S_{2m}(1,s) + R_{2m}(1,s)$$

um deren Aufstellung es sich zunächst handelte.

Auch für den Fall $s = -1$ bleibt die Bernoulli'sche Function noch endlich, und wenn mit Kinkel

$$(72)\quad C(s) = K(s) + \frac{1}{s+1}$$

gesetzt wird, so ist insbesondere:

$$(73)\quad B(x,-1) = C(-1) + \log x - \frac{1}{2x} + \sum_{a=1}^{a=m} \frac{(-1)^a B_{2a}}{2a x^{2a}} + R_{2m}(x,-1),$$

worin:

$$(74)\quad C(-1) = \frac{1}{2} + \sum_{a=1}^{a=m} \frac{(-1)^{a-1} B_{2a}}{2a} - R_{2m}(1,-1)$$

die Mascheroni'sche Constante 0,577 ... des Integrallogarithmus bedeutet.

Manche Eigenschaften der Functionen B und K lassen sich leicht aus ihren Darstellungen (70) und (71) direct ableiten, ohne dass man nöthig hat, den Fall eines ∞ grossen Argumentes zugleich mit in Vergleichung zu ziehen. Als Beispiel erwähne ich in dieser Beziehung nur die Relation

$$d_x^n \cdot \left\{ B(x,s) - K(s) \right\} = \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s-n+1)} \left\{ B(x, s-n) - K(s-n) \right\},$$

di hieraus nach dem Taylor'schen Satze sich ergebende Entwickelung:

$$B(x+\xi, s) - K(s) = \sum_{n=o}^{n=\infty} (s)_n \, x^n \left\{ B(\xi, s-n) - K(s-n) \right\},$$

he ine von Herrn Kinkelin (l. c., pag. 9, Gl. 6) gegebene als besondern Fall in sich schliesst, fü rein imaginäre x dazu benutzt werden kann, um in der Bernoulli'schen Function das Reelle de Imaginären zu sondern. Wenn man die entsprechende Relation für den Theil S_{2m} sowie für R_{2m} der Function B für sich nachweist, so zeigt sich leicht, dass die Entwickelung convergirt, $mod \cdot x < mod \cdot \xi$ ist.

Über den von Herrn Kinkelin angegebenen Relationen der Function B findet sich eine fehler- elche ich bei dieser Gelegenheit glaube erwähnen zu müssen. Auf pag. 11 der citirten Ab- lu (Z. 10 v. u.) ist nämlich in der Relation:

$$\sum_{a=o}^{a=n-1} B\left(x + \frac{a}{n}, -1\right) = n\, B(n\,x, -1) - n \log n,$$

ne schwer nachzurechnen, das letzte Glied $-n \log n$ fortgelassen, und demgemäss auch auf pag. 12 o.) der Werth von $B\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ fälschlich $= 0$, anstatt $= -2 \log 2$ angegeben.

Zu Schlusse will ich eine einfache Beziehung mittheilen, welche zwischen der Bernoulli'schen io besteht und der Stirling'schen Reihe, die bekanntlich den Logarithmus der Gammafunction ur ie hat. Dieselbe ist, glaube ich, bis jetzt unbemerkt geblieben, und schliesst sich einfach s sherige an.

Da die nämlichen Schlüsse, welche wir oben für das Beispiel $f(u) = u^s$ aus der Mac-Laurin'- Summenformel gezogen haben, sind auch auf den Fall $f(u) = \log u$ anwendbar, wenn die Loga- ust ction — wie angegeben — eindeutig aufgefasst wird. Man gelangt dadurch zu dem Resultat, we :

$$S_{2m}(x) = x \log x - x - \frac{\log x}{2} + \sum_{a=1}^{a=m} \frac{(-1)^{a-1} B_{2a}}{2a\,(2a-1)\,x^{2a-1}},$$

$$R_{2m}(x) = \frac{(-1)^m 2}{(2\pi)^{2m+2}} \int_o^\infty \sum_{a=1}^{a=\infty} \frac{e^{-xz} z^{2m}\, dz}{a^{2m} \left\{ a^2 + \left(\frac{z}{2\pi}\right)^2 \right\}}$$

t rd (unter Aufgeben der früheren Bedeutung dieser Grössen), dann die Function:

$$A(x) = S_{2m}(x) + R_{2m}(x)$$

ing von m sein muss. In aller Strenge haben Malmsten und Lipschitz nachgewiesen d s diese Function $A(x)$ nur um das Glied $\log \sqrt{2\pi}$ sich von der anderweitig bekannten on $\log \Gamma(x)$ unterscheidet, und man hat demnach:

$$\log \Gamma(x) = \frac{\log 2\pi}{2} + S_{2m}(x) + R_{2m}(x);$$

t ie Stirling'sche Reihe, vervollständigt durch die Angabe des Restgliedes. Mit diesem ed würden sich verschiedene, den früheren genau entsprechende, Umformungen vornehmen

lassen; ihre Ergebnisse anzuführen, kann ich aber um so mehr unterlassen, als diese letzteren wi
zeigen wird, leicht aus jenen deducirt werden können.

Den gedachten Zusammenhang zwischen den Functionen $log\ \Gamma(x)$ und $B(x, s)$ spricht au
Gleichung aus:

$$(78) \qquad log\ \Gamma(x) = \lim_{s=0} . d_s\ B(x, s) = \lim_{s=0} \cdot \frac{B(x, s) - x + 1}{s} .$$

Sie zeigt, wie die Stirling'sche Reihe durch eine einfache Differentiation aus der harmoni
abgeleitet werden kann, und sie bildet einen merkwürdigen Gegensatz zu einer von Abel*) gma
Bemerkung, zufolge welcher umgekehrt auch die Bernoulli'sche Function durch Differenti ion
$log\ \Gamma(x)$ gebildet werden kann, indem: $B(x, -1) - C(-1) = d_x \cdot log\ \Gamma(x)$, und für eine tü
Zahl s: $B(x, -s) - K(-s) = \dfrac{(-1)^{s-1}\ d_x^s \cdot log\ \Gamma(x)}{\Gamma(s)}$ ist.

Um dieselbe nachzuweisen, muss zuerst der Werth von $d_s \cdot K(s)$ für $s = 0$ ermittelt we
Ich behaupte, dass er gerade:

$$(79) \qquad \lim_{s=0} . d_s\ K(s) = K'(0) = \frac{log\ 2\pi}{2}$$

ist. Setzt man in der That in der von H. Kinkelin gegebenen Relation der Function K):

$$K(s-1) = \frac{2\ \Gamma(s)\ cos\ \frac{s\pi}{2}}{(2\pi)^s} \cdot K(-s)$$

links den aus (72) fliessenden Werth ein, so folgt leicht:

$$C(s-1) = \frac{(2\pi)^s + 2\ \Gamma(s+1)\ cos\ \frac{s\pi}{2} \cdot K(-s)}{s\ .\ (2\pi)^s} .$$

Geht man hier zur Grenze für $s = 0$ über, so nimmt der Bruch rechter Hand die For $\frac{0}{0}$
da $K(0) = -\dfrac{1}{2}$ ist. Differenzirt man daher den Zähler und den verschwindenden Factor in Ne
so kommt für $s = 0$:

$$C(-1) = log\ 2\pi - 2\ K'(0) + 2\ K(0)\ .\ \Gamma'(1) ;$$

weil jedoch bekanntlich $\Gamma'(1) = [d_s\ \Gamma(s)]_{s=1} = -C(-1)$ ist, so reducirt sich diese Glei un
die zu beweisende: $K'(0)$ oder $\lim_{s=0} \cdot \dfrac{K(s) + \frac{1}{2}}{s} = \dfrac{1}{2}\ log\ 2\pi.$

Auf Grund der gefundenen Gleichung (79) erkennt man jetzt durch Vergleichung von (5),
(77) mit dem aus (67), (68), (70) für $s = 0$ zu gewinnenden Differentiationsergebnisse sofort di Ric
keit der aufgestellten Behauptung (78).

Es befindet sich dieser Satz auch im Einklang damit, dass wegen $log\ (x + a) = \lim_{s=0} \cdot \dfrac{(x-a)^s}{s}$
sein muss: $\sum_{a=0}^{a=n-1} log\ (x + a)$ oder $log\ \Gamma(x+n) - log\ \Gamma(x) = \lim_{s=0} \cdot \dfrac{B(x+n, s) - B(x, s) -}{s}$.

*) Oeuvres complètes, t. II, p. 30.

berdies folgt der Satz in dem Falle, dass x eine natürliche Zahl ist, unmittelbar aus der ng (69) durch Entwicklung von a^s in eine Exponentialreihe; auf diese Weise wird nämlich:

$$B(x, s) = \sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{s^h}{h!} \cdot \sum_{a=1}^{a=x-1} (\log a)^h ,$$

f alle Werthe von s convergirende Reihe; es ist mithin nach dem Mac-Laurin'schen Satze:

$$\sum_{a=1}^{a=x-1} (\log a)^h = \lim_{s=0} . \, d_s^h . \, B(x, s) ,$$

hier die rechte Seite auch für nicht positive ganze x noch einen Sinn behält, so kann man lie Summe der gleichhohen natürlichen Potenzen der Logarithmen der ganzen Zahlen wird, ution der oberen Grenze betrachtet, interpolirt durch eine Derivirte der Bernoulli'schen Function iem zweiten Argumente, wenn letzteres nach der Differentiation $= 0$ gesetzt wird. Dass je- f den Fall $h = 1$ diese Interpolation ganz mit der Function $\log \Gamma(x)$ zusammenfällt, wie oben gworden, war nicht auf diesem Wege erkennbar.

A dem Theorem (78) kann man ohne Mühe eine Entwickelung des Logarithmus der Gamma- io in eine nach den *sinus* der Vielfachen des Argumentes fortschreitende (Fourier'sche) Reihe ei zu der auf ganz anderm Wege zuerst Herr Kummer*) gelangt ist. Differenzirt man ich nach s die von H. Kinkelin angegebene Entwickelung:

$$B(x, s) = K(s) - 2\,\Gamma(s+1) \sum_{a=1}^{a=\infty} \frac{\cos\left(2a x - \frac{s+1}{2}\right)\pi}{(2a\pi)^{s+1}} ,$$

e r $0 < x < 1$ bei beliebigem $s > -1$ gültig ist und, beiläufig gesagt, das Theorem (21) als de Fall in sich schliesst, so folgt für $s = 0$ mit Rücksicht auf (78):

$$\log \Gamma(x) = \frac{\log 2\pi}{2} + 2 \sum_{a=1}^{a=\infty} \frac{\frac{1}{2}\pi \cos 2a\pi x - \Gamma'(1) \sin 2a\pi x + \log 2a\pi \, . \, \sin 2a\pi x}{2a\pi}$$

ve n:

$$\Gamma'(1) = -C(-1), \quad 2 \sum_{a=1}^{a=\infty} \frac{\cos 2a\pi x}{2a\pi} = -\frac{\log(2 \sin \pi x)}{\pi}, \quad 2 \sum_{a=1}^{a=\infty} \frac{\sin 2a\pi x}{2a\pi} = \frac{1}{2} - x$$

s h die gesuchte Fntwickelung sogleich in ihrer bekannten Form:

$$\log \Gamma(x) = \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{\sin \pi x} + \left(\frac{1}{2} - x\right)\{C(-1) + \log 2\pi\} + \frac{1}{\pi} \sum_{a=1}^{a=\infty} \frac{\log a}{a} \sin 2a\pi x$$

< 1. —

ie Verallgemeinerung (80) des Theorems (78) kann ferner benutzt werden zur Gewinnung einer , elche dazu dienlich ist, die Potenzsummen der Logarithmen der natürlichen Zahlen für eine ro e Anzahl von Gliedern rasch mit Genauigkeit zu berechnen. Man hat nämlich:

$$\sum_{a=1}^{a=x-1} (\log a)^h = \lim_{s=0} \{ d_s^h \, . \, K(s) + d_s^h \, . \, S_{2m}(x, s) + d_s^h \, . \, R_{2m}(x, s) \} ,$$

C le's Journal, Bd. 35, pag. 1.

worin die Werthe (67) und (68) eingesetzt zu denken sind. Die Differentiation, welche in den letzten Gliedern angedeutet ist, kommt hinaus auf diejenige der 3 Producte $x^s \,.\, (s+1)^{-1}$, x^s (s) und $z^{-s} \,.\, \dfrac{1}{\Gamma(-s)}$.

Man findet zuerst nach dem Leibnitz'schen Satze für die wiederholte Differentiation eines Productes:

$$d_s^h \,.\, x^s\,(s+1)^{-1} = \sum_{b=0}^{b=h} (h)_b\, d_s^b \,.\, (s+1)^{-1} \times d_s^{h-b} \,.\, x^s = \sum_{b=o}^{b=h} \frac{(-1)^b\, h!\, x^s\, (\log x)^{h-b}}{(h-b)!\,(s+1)^{b+1}},$$

also für $s = 0$:

$$\lim_{s=o} d_s^h \,.\, \frac{x^s}{s+1} = h! \sum_{b=o}^{b=h} \frac{(-1)^b\, (\log x)^{h-b}}{(h-b)!}\,.$$

Man hat ebenso:

$$d_s^h \,.\, x^s\, (s)_{2a-1} = \sum_{b=o}^{b=h} (h)_b\, d_s^b \,.\, (s)_{2a-1} \times d_s^{h-b} \,.\, x^s\,.$$

Aber bekanntlich ist:

$$\lim_{s=o} d_s^b \,.\, (s)_{2a-1} = C^{(b)}_{2a-1-b},$$

wenn die Grösse $C_n^{(\varkappa)}$ definirt wird als Entwickelungscoefficient der erzeugenden Function $\left\{\dfrac{\log(1+$ durch die Festsetzung:

$$\left\{\frac{\log(1+u)}{u}\right\}^{\varkappa} = \sum_{n=o}^{n=\infty} C_n^{(\varkappa)}\, u^n,$$

welche für hinreichend kleine u nach dem Mac-Laurin'schen Satze zulässig ist. Für jede ganze Zahl $\varkappa$ können die Grössen $C_n^{(\varkappa)}$ leicht berechnet werden durch die recurrirende Gleichung:

$$(n+\varkappa)\, C_n^{(\varkappa)} = \varkappa\, C_n^{(\varkappa-1)} - (n+\varkappa-1)\, C_{n-1}^{(\varkappa)},$$

zu welcher die Anfangswerthe $C_o^{(o)} = C_o^{(\varkappa)} = 1$ und $C_n^{(o)} = 0$ hinzuzunehmen sind. Daher ist nun

$$\lim_{s=o} d_s^h \,.\, x^s\, (s)_{2a-1} = \sum_{b=o}^{b=h} (h)_b\; C^{(b)}_{2a-1-b}\, (\log x)^{h-b},$$

und es müssen in dieser Summe alle diejenigen Glieder $= 0$ gesetzt werden, in welchen etwa Index $2a-1-b$ des Coefficienten $C^{(b)}$ negativ ausfallen würde.

Was endlich die Differentiation des dritten Productes betrifft, so empfiehlt es sich, anstatt der gewöhnlichen Bezeichnung der Gammafunction, die von Weierstrass*) eingeführte Bezeichnung die Factorielle hier zu benutzen. Wie Weierstrass gezeigt hat, lässt sich die reciproke Gammafunction oder Factorielle $\dfrac{1}{\Gamma(u)} = Fc(u)$ für alle Werthe von u in eine convergente nach Potenzen von u fortschreitende Reihe entwickeln. Wir haben nun das Product zu differenziren: $z^{-s} \,.\, Fc($ und erhalten, wenn $-s = u$ gesetzt wird:

$$\lim_{s=o} d_s^h \,.\, z^{-s}\, Fc(-s) = (-1)^h \lim_{u=o} d_u^h \,.\, z^u\, Fc(u) = (-1)^h \lim_{u=o} \,.\, \sum_{b=o}^{b=h} (h)_b\, d_u^b \,.\, Fc(u) \times d_u^{h-} \,.\, z^$$

*) Crelle's Journal, Bd. 51, p. 1.

A; der Fundamentaleigenschaft der Factorielle: $Fc(u) = u\,Fc(u+1)$ folgt jedoch durch wieder-
e differentiation für $u = 0$: $Fc^{(b)}(0) = b\,Fc^{(b-1)}(1)$, wozu noch kommt, dass: $Fc(0) = 0$ ist.
ma wird:

$$\lim_{s=o} d_s^h \,.\, z^{-s}\, Fc(-s) = (-1)^h \sum_{b=1}^{b=h} b(h)_b\, Fc^{(b-1)}(1)\,(\log z)^{h-b},$$

es handelt sich allein noch darum, die Coefficienten $Fc^{(b-1)}(1)$ zu berechnen, mit andern Worten,
Reihenentwickelung: $Fc(u+1) = \sum_{n=o}^{n=\infty} u^n \frac{Fc^{(n)}(1)}{n!}$, deren Zulässigkeit Weierstrass nachgewiesen,
ich herzustellen. — Zu dem Ende bedenke man, dass:

$$\log Fc(u+1) = u\,.\,C(-1) + \sum_{a=o}^{a=\infty} u^a \,.\, \frac{(-1)^{a-1} K(-a)}{a}$$

no. $u < 1$ ist. Indem man diese Reihe zur Grundzahl e exponenzirt, und nach Potenzen von u
ickelt, ergibt sich für die gesuchten Derivirten die independente Darstellung:

$$\frac{Fc^{(n)}(1)}{n!} = \Sigma' \frac{(-1)^{n-a_1-a_2\ldots-a_n} C(-1)^{a_1} K(-2)^{a_2} K(-3)^{a_3} \ldots K(-n)^{a_n}}{a_1!\,a_2!\ldots a_n!\,1^{a_1}\,2^{a_2}\,3^{a_3}\ldots n^{a_n}},$$

ie umme auszudehnen ist über alle ganzen positiven Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$ (die Null mit zuge-
n), welche der Gleichung genügen: $1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n = n$. Zum Beispiel, es ist:

$$Fc(1) = 1, \quad Fc^{(1)}(1) = C(-1), \quad Fc^{(2)}(1) = C(-1)^2 - K(-2),$$

1)=$(-1)^3 - 3C(-1)K(-2) + 2K(-3)$, $\quad Fc^{(4)}(1) = C(-1)^4 - 6C(-1)^2K(-2) + 8C(-1)K(-3) + 3K(-2)^2 - 6K(-4)$,

2)=$(-1)^5 - 10C(-1)^3K(-2) + 20C(-1)^2K(-3) + 15C(-1)K(-2)^2 - 30C(-1)K(-4) - 20K(-2)K(-3) + 24K(-5)$,

Durch logarithmische Differentiation der Gleichung:

$$e^{uC(-1) + \sum_{a=o}^{a=\infty} u^a \frac{(-1)^{a-1} K(-a)}{a}} = \sum_{n=o}^{n=\infty} u^n \frac{Fc^{(n)}(1)}{n!},$$

durch Multiplication mit der Reihe rechterhand und Coefficientenvergleichung erhält man ferner
zur Berechnung weit brauchbarere Recursion:

$$\frac{Fc^{(n)}(1)}{n!} = \frac{1}{n}\left\{ C(-1) \cdot \frac{Fc^{(n-1)}(1)}{(n-1)!} + \sum_{a=2}^{a=n} (-1)^{a-1} K(-a) \cdot \frac{Fc^{(n-a)}(1)}{(n-a)!} \right\}$$

Nach derselben fand ich z. B. mit Benutzung der Legendre'schen*) Tabelle der Functionen $K(-2)$,
$K(-3)$ etc. für die numerischen Werthe der 6 ersten Derivirten auf 12 Decimalen:

$$\frac{Fc^{(1)}(1)}{1!} = C(-1) = +\,0{,}577215\;664902, \qquad \frac{Fc^{(2)}(1)}{2!} = -\,0{,}655878\;071520,$$

$$\frac{Fc^{(3)}(1)}{3!} = -\,0{,}042002\;635034, \qquad \frac{Fc^{(4)}(1)}{4!} = +\,0{,}416538\;611382,$$

$$\frac{Fc^{(5)}(1)}{5!} = -\,0{,}013336\;951310, \qquad \frac{Fc^{(6)}(1)}{6!} = -\,0{,}075384\;408281;$$

Summe der Zahlenwerthe ist anfangs eine sehr langsame und unregelmässige; ebenso ist das
Gesetz des Wechsels der Vorzeichen schwer erkennbar.

---

*) Exercices de calcul intégr. t. II, p. 65.

Setzen wir demnach diese Zahlen als bekannt voraus, so ist nun nach dem Obigen:

$$(82)\quad \lim_{s=o} d_s^h\, S_{2m}(x,s) = x h! \sum_{b=o}^{b=h} \frac{(-1)^b (\log x)^{h-b}}{(h-b)!} - \frac{(\log x)^h}{2} + \sum_{a=1}^{a=m} \frac{(-1)^{a-1} B_{2a}}{2a x^{2a-1}} \cdot \sum_{b=o}^{b=h} (h)_b\, C_{2a-b-1}^{(b)}(l(x)$$

$$(83)\quad \lim_{s=o} d_s^h\, R_{2m}(x,s) = \frac{(-1)^{m+h+1} 2}{(2\pi)^{2m+2}} \cdot \sum_{b=1}^{b=h} b\,(h)_b\, Fc^{(b-1)}(1) \cdot \int_o^\infty \sum_{a=1}^{a=\infty} \frac{e^{-xz} z^{2m} (\log z)^{h-b}\, dz}{a^{2m}\left\{a^2 + \left(\frac{z}{2\pi}\right)^2\right\}}.$$

Die vorstehende Reihe (82) ist, wie die Stirling'sche, semiconvergent. — Auch die ConstantK' in Gleichung (81) würde sich durch bestimmte Integrale ausdrücken lassen, wenn man von d dt Herrn Riemann*) gegebenen, für jedes s gültigen, Formel Gebrauch machte:

$$K(s) = \frac{\pi^{-\frac{s}{2}}}{s(s+1)\,\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)} \left\{ 1 + 2s(s+1) \int_1^\infty (z^s + z^{-s-1}) \sum_{a=1}^{a=\infty} e^{-\pi a^2 z^2}\, dz \right\};$$

indessen für den angegebenen Zweck ist dies nicht erforderlich, da man die gedachte Constante ein gegebenes h numerisch auf demselben Wege berechnen kann, wie etwa $K(-s)$ aus der Summformel für die harmonische Reihe, oder $C(-1)$ aus derjenigen für die Reihe der reciprokenZahl oder auch, wie $\frac{1}{2} \log 2\pi$ aus der Stirling'schen Reihe.

*) Monatsberichte der k. Academie zu Berlin, Nov. 1859. Vgl. auch: Scheibner, in Schlömilch's Ztsch Bd. 5, p. 237.

Jahrbuch des Pädagogiums

zum

Koster Unser Lieben Frauen in Magdeburg

und

Einladung zum Schulaktus

Dienstag, den 22. März 1904, um 10 Uhr.

Neue Fortsetzung

Achtundsechzigstes Heft 1904.

halt: 1. „Die bekannteren allgemeinen Methoden zur elementaren Bestimmung der Maxima und Minima von Funktionen mit einer veränderlichen Größe.“ Von Karl Schröter.
2. Schulnachrichten. Vom Propst und Direktor Prof. Dr. Urban, Geh. Reg. R.

Magdeburg.
Druck von E. Baensch jun.
1904.

4. Progr.-No. 284.

Die bekannteren allgemeinen Methoden zur elementaren Bestimmung der Maxima und Minima von Funktionen mit einer veränderlichen Größe.

Schon vor dem Jahre 1892 hatten viele Mathematiker es für wünschenswert gehalten, daß in den oberen Klassen der Realanstalten auch Aufgaben über Maxima und Minima der Funktionen gelöst würden. Allerdings sind noch jetzt die Ansichten über den Wert der Behandlung solcher Aufgaben sehr geteilt. Einige Mathematiker neigen die Ansicht zu, daß man die Lehre von größten und kleinsten Werten auf der Schule ganz entbehren könne, da solche Aufgaben auf der Universität mit Hülfe der Differentialrechnung in viel kürzerer Zeit erledigt werden können. Andere hingegen fordern für die Oberklassen der Realanstalten die Differentialrechnung und damit auch die Behandlung der genannten Aufgaben. Jedoch diese beiden Ansichten sind für die höheren Schulen Preußens vorläufig nicht durchführbar, da schon die Lehrpläne von 1892 und auch die neuesten Lehrpläne von 1901 die bestimmte Forderung aufstellen, daß an den Realgymnasien und Oberrealschulen auch Aufgaben über größte und kleinste Werte auf elementare Weise gelöst werden sollen. Es ist ja auch ganz gewiß nicht zu leugnen, daß die verschiedenen Gebiete der Mathematik und Physik durch das Aufsuchen von größten und kleinsten Werten den Schülern näher gebracht und interessanter gemacht werden. Denn auf diese Weise werden die aus Lehrsätzen und Aufgaben gewonnenen Resultate auch noch von einer ganz anderen Seite beleuchtet, indem einerseits ein- und umgeschriebene Figuren oder Körper, andererseits Geschwindigkeiten, Zeiten, Wege etc. darauf hin näher untersucht werden, für welchen bestimmten Fall sie ihren größten oder kleinsten Wert erreichen.

Der Lehrplan des Gymnasiums schreibt zwar Aufgaben über Maxima und Minima nicht vor, jedoch können solche Gymnasialprimaner, die den mathematischen Fächern ein größeres Interesse entgegenbringen, die in der folgenden Arbeit wiedergegebenen Methoden mit großer Mühe verstehen und werden auch im stande sein, Aufgaben danach zu lösen.

Es wird sich also darum handeln, die Schüler auf die leichteste Art in dieses neue Gebiet der Elementarmathematik einzuführen und unter den bisher gebräuchlichen Methoden die zu diesem Zwecke passendste auszuwählen. Um diese Auswahl zu treffen, stelle ich die Grundzüge der bekannteren Methoden nebeneinander, muß mich

aber, damit die Arbeit nicht zu umfangreich wird, auf solche Aufgaben beschränken, wie sie tatsächlich auf höheren Schulen behandelt werden können, nämlich auf Funktionen mit nur einer veränderlichen Größe. In bezug auf andere Funktionen kann ich nur auf die Arbeiten der Verfasser selbst verweisen und dort wird man finden, wie weit sich die der betreffenden Methoden ausdehnen läßt.

I.

A. Es sei gegeben die stetige Funktion

$$y = ax^2 + 2bx + c \qquad (1)$$

a, b und c sind absolute Zahlen.

Für welche reellen Werte von x wird die Funktion y zu einem Maximum bzw. Minimum?

Löst man die Gleichung nach x auf, so erhält man

$$x = -\frac{b}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{ay - (ac - b^2)} \qquad (2)$$

x erhält einen reellen Wert, wenn der Radikand gleich oder größer als Null ist. Setzt man nun

$$ay - (ac - b^2) = 0,$$

$$\text{so folgt } y = \frac{ac - b^2}{a}.$$

Kleiner kann y nicht werden, wenn x reell bleiben soll; also ist $\frac{ac - b^2}{a}$ das Minimum von y. Für diesen Wert von y folgt aber aus Gl. 2

$$x = -\frac{b}{a} \quad \text{oder}$$

$$\text{Min } (y) = \frac{ac - b^2}{a}, \text{ wenn } x = \frac{b}{a}.$$

B. Es sei gegeben die stetige Funktion

$$y = -ax^2 + 2bx + c \qquad (3)$$

a, b und c sind absolute Zahlen.

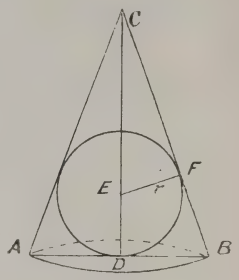
Für welche reellen Werte von x wird die Funktion y zu einem Maximum oder Minimum?

Man findet auf gleiche Weise wie vorher

$$\text{Max } (y) = \frac{ac + b^2}{a}, \text{ wenn } x = \frac{b}{a}.$$

Gang der Rechnung: Aus der Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen der abhängigen und unabhängigen Veränderlichen angibt, ist die unabhängige Veränderliche zu bestimmen, dann setzt man den Radikanden gleich Null. Aus dieser Gleichung findet man dann den Wert für das Maximum oder Minimum der abhängigen Veränderlichen y, während das vor dem Radikanden stehende Glied den Wert für die unabhängige Veränderliche x angibt, für welchen das Maximum oder Minimum von y eintritt.

Aufgabe: Um eine Kugel mit dem Radius r den kleinsten Kegel zu beschreiben.



Sei $AD = x$, $CD = y$, $EF = r$.

$$v = \frac{x^2 y \pi}{3}$$

$$x : y = r : \sqrt{y^2 - 2ry}$$

$$v = \frac{r^2 y^2 \pi}{3y - 6r}.$$

Löst man die Gleichung nach y auf, so erhält man

$$y = \frac{3v}{2r^2\pi} \pm \frac{1}{2r^2\pi}\sqrt{9v\left(v - \frac{8r^3\pi}{3}\right)}.$$

Wenn man den Radikanden gleich Null setzt, so findet man das Maximum oder Minimum von v. Der Wert $v = 0$ ist in diesem Falle ohne Bedeutung; es bleibt daher übrig

$$v = \frac{8r^3\pi}{3}.$$

Wird v kleiner als $\frac{8r^3\pi}{3}$, so wird der y-Wert imaginär, und das ist nicht möglich, da die unabhängige Veränderliche nur reelle Werte berücksichtigt werden sollen. Der Wert $v = \frac{8r^3\pi}{3}$ ist also der kleinste Wert, den v annehmen kann; also ist

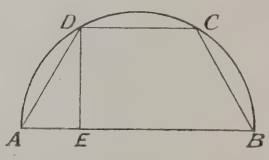
$$\text{Min}(v) = \frac{8r^3\pi}{3}, \text{ wenn } y = \frac{3v}{2r^2\pi} \text{ oder}$$

wenn $y = 4r$ und

$$x = r\sqrt{2}.$$

Der Kegel hat also seinen kleinsten Wert, wenn seine Höhe gleich dem doppelten Durchmesser der Kugel ist.

Aufgabe: In einen Halbkreis das Trapez mit dem größten Umfang zu zeichnen.



$AB = 2r$, $DC = 2x$, $DE \perp AB$, $DE = y$, $AD = s$.

Es ist $u = 2r + 2x + 2\sqrt{2r^2 - 2rx}$.

Löst man diese Gleichung nach x auf, so folgt

$$x = \frac{u - 4r}{2} \pm \sqrt{r(5r - u)}.$$

In dieser Gleichung muß $u < 5r$ bleiben, weil in jedem andern Falle x imaginär würde. Mithin ist $u = 5r$ der größte Wert, den u annehmen kann. Dann ist $x = \frac{-4r}{2}$, oder $x = \frac{r}{2}$.

Also folgt

$$\text{Max}(u) = 5r,$$

$$\text{wenn } x = \frac{r}{2}.$$

Die kleinere Grundlinie des Trapezes muß also gleich dem Radius sein, wenn d Umfang ein Maximum werden soll. Dann ist die Seitenlinie $s = r$ und das Trapez is die Hälfte des dem ganzen Kreise einbeschriebenen Sechsecks.

Die soeben erläuterte Methode hat den Vorteil, daß sie den Schülern gar k Schwierigkeiten machen wird; sie ist in ihren Schlüssen äußerst einfach, und es ist n nötig, erst einleitende Sätze zu beweisen, bevor man an die Bestimmung der Max und Minima herantreten kann.

Die Methode hat aber den Übelstand, daß sie versagt, wenn im Radikanden d Veränderliche in einer höheren als der zweiten Potenz enthalten ist; dann gibt es n noch für gewisse spezielle Fälle eine Lösung, und die Methode entbehrt darum d Allgemeinheit.

II.*)

A. Es sei wiederum gegeben die stetige Funktion

$$y = ax^2 + 2bx + c$$

a, b und c sind absolute Zahlen.

Man forme die Gleichung so um, daß die veränderliche Größe x nur in e und zwar einem quadratischen Gliede vorkommt.

$$y = a\left[\frac{ac - b^2}{a^2} + \left(x + \frac{b}{a}\right)^2\right]$$

y hat seinen kleinsten Wert, wenn der veränderliche Teil der rechten Sei d. h. $\left(x + \frac{b}{a}\right)^2$ seinen kleinsten Wert hat. Der kleinste Wert, den die Quadrate rell Zahlen haben können, ist aber Null. Also tritt das Minimum von y ein, w $\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = 0$ ist. D. h.

$$\text{Min}\,(y) = \frac{ac - b^2}{a},$$

$$\text{wenn } x = -\frac{b}{a}.$$

B. Es sei wiederum gegeben die stetige Funktion

$$y = -ax^2 + 2bx + c,$$

daraus ergibt sic

$$y = a\left[\frac{ac + b^2}{a^2} - \left(x - \frac{b}{a}\right)^2\right]$$

y hat seinen größten Wert, wenn der veränderliche Teil der rechten Sei d. h. $\left(x - \frac{b}{a}\right)^2$ seinen kleinsten Wert hat. Also folgt

$$\text{Max}\,(y) = \frac{ac + b^2}{a},$$

$$\text{wenn } x = \frac{b}{a}.$$

*) Methode von Koppe: Algebraische Analysis. Essen 1870.

Die in diesen beiden Abschnitten (A. u. B.) aufgestellten Bedingungen für das ...imum bezw. Minimum einer Funktion dienen nun dazu, das Maximum bezw. Minimum ...re 6 typische Formen von Funktionen zu bestimmen, die in den beiden folgenden ...hnitten (C. u. D.) entwickelt werden sollen.

C. Die folgenden Ausdrücke

1) $y = 2mx - x^2$
2) $y = 3m^2x - x^3$
3) $y = 3mx^2 - 2x^3$
4) $y = 4m^3x - x^4$
5) $y = 4m^2x^2 - 2x^4$
6) $y = 4mx^3 - 3x^4$

...en sämtlich dann ihren (absolut) größten Wert, wenn man in denselben ...m setzt.

Beweise:

...d 1) $y = 2mx - x^2$
$+ m^2 \qquad - m^2$
$y = m^2 - (m - x)^2.$

...ach B folgt dann
Max (y) = m^2,
wenn $x = m$.

ad 2) $y = 3m^2x - x^3$
$+ 2m^3 \qquad - 2m^3$
$y = 2m^3 - (m - x)^2(2m + x).$

Nach B folgt dann
Max (y) = $2m^3$,
wenn $x = m$.

...3) $y = 3mx^2 - 2x^3$
$+ m^3 \qquad - m^3$
$y = m^3 \quad (m - x)^2(m + 2x).$

...ch B folgt dann
Max (y) = m^3,
wenn $x = m$.

ad 4) $y = 4m^3x - x^4$
$+ 3m^4 \qquad - 3m^4$
$y = 3m^4 \quad (m \quad x)^2(3m^2 + 2mx + x^2).$

Nach B folgt
Max (y) = $3m^4$,
wenn $x = m$.

...a 5) $y = 4m^2x^2 - 2x^4$
$+ 2m^4 \qquad - 2m^4$
$y = 2m^4 - 2(m^2 - x^2)^2.$

...ch B folgt
Max (y) = $2m^4$,
wenn $x = m$.

ad 6) $y = 4mx^3 - 3x^4$
$+ m^4 \qquad - m^4$
$y = m^4 - (m - x)^2(m^2 + 2mx + 3x^2).$

Nach B folgt
Max (y) = m^4,
wenn $x = m$.

Diese 6 Funktionen sind spezielle Fälle der allgemeinen Funktion

$$y = (n + p)\, m^p x^n - n x^{n+p}.$$

Koppe beweist, daß auch diese Funktion ihr Maximum hat, wenn $x = m$ ist.

Ich muß jedoch darauf verzichten, den Beweis zu dieser Behauptung an dieser ...e ... bringen.

D. Die folgenden Ausdrücke

1) $y = \frac{m^2}{x} + x$ 2) $y = \frac{m^3}{x^2} + 2x$

3) $y = \frac{2m^3}{x} + x^2$ 4) $y = \frac{m^4}{x^3} + 3x$

5) $y = \frac{2m^4}{x^2} + 2x^2$ 6) $y = \frac{3m^4}{x} + x^3$

erhalten sämtlich dann ihren (absolut) kleinsten Wert, wenn man in denselben $x = m$ setzt.

Beweise:

ad 1) $y = \frac{m^2}{x} + x$

$y = \frac{m^2 + x^2}{x}$

$y = 2m + \frac{(m-x)^2}{x}$.

Das zweite Glied ist positiv, also folgt nach A

$\text{Min } (y) = 2m,$
wenn $x = m.$

ad 2) $y = \frac{m^3}{x^2} + 2x$

$y = \frac{m^3 + 2x^3}{x^2}$

$y = 3m + \frac{m^3 - (3mx^2 - 2x^3)}{x^2}$

Nach C. 3 wird $3mx^2 - 2x^3$ ein Ma-
mum, wenn $x = m$ ist; folglich

$\text{Min } (y) = 3m,$
wenn $x = m.$

ad 3) $y = \frac{2m^3}{x} + x^2$

$y = \frac{2m^3 + x^3}{x}$

$y = 3m^2 + \frac{2m^3 - (3m^3x - x^3)}{x}$.

Nach C. 2 wird $3m^2x - x^3$ ein
Maximum, wenn $x = m$ ist; folglich

$\text{Min } (y) = 3m^2,$
wenn $x = m.$

ad 4) $y = \frac{m^4}{x^3} + 3x$

$y = \frac{m^4 + 3x^4}{x^3}$

$y = 4m + \frac{m^4 - (4mx^3 - 3x^4)}{x^3}$

Nach C. 6 wird $4mx^3 - 3x^4$ ein Ma-
mum, wenn $x = m$ ist; folglich

$\text{Min } (y) = 4m,$
wenn $x = m.$

ad 5) $y = \frac{2m^4}{x^2} + 2x^2$

$y = \frac{2m^4 + 2x^4}{x^2}$

$y = 4m^2 + \frac{2m^4 - (4m^2x^2 - 2x^4)}{x^2}$.

Nach C. 5 wird $4m^2x^2 - 2x^4$
ein Maximum, wenn $x = m$ ist; folglich

$\text{Min } (y) = 4m^2,$
wenn $x = m.$

ad 6) $y = \frac{3m^4}{x} + x^3$

$y = \frac{3m^4 + x^4}{x}$

$y = 4m^3 + \frac{3m^4 - (4m^3x - x^4)}{x}$

Nach C. 4 wird $4m^3x - x^4$ ein Ma-
mum, wenn $x = m$ ist; folglich

$\text{Min } (y) = 4m^3,$
wenn $x = m.$

Auch diese 6 Funktionen sind spezielle Fälle der allgemeinen Funktion

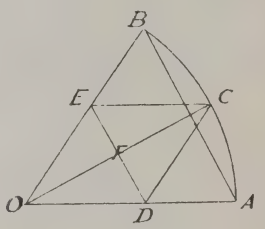
$$y = \frac{p \cdot m^{n+p}}{x^n} + n \cdot x^p.$$

Koppe beweist, daß auch sie ein Minimum hat, wenn $x = m$ ist.

Gang der Rechnung: Soll nach dieser Methode das Maximum oder Minimum ie Funktion $y = f(x)$ bestimmt werden, so bringt man die gegebene Funktion durch nt mung, ev. auch durch Substitution einer neuen Unbekannten auf eine der in den sitten C. und D. entwickelten typischen Formen. Nach den dort gefundenen rteln findet man dann verhältnismäßig leicht das Maximum oder Minimum der gegebenen Funktion.

Aufgabe: In einen Kreissektor zum Radius r und zur Sehne s soll das ißt gleichschenklige Dreieck so eingeschrieben werden, daß seine Spitze im Halbierungsnkt des Bogens liegt.

Es sei $AO = r$, $AB = s$, $CF = x$.



$$f = \frac{ED \cdot CF}{2}$$

$$ED = \frac{2s(r - x)}{\sqrt{4r^2 - s^2}},$$

folglich ist

$$f = \frac{sx(r - x)}{\sqrt{4r^2 - s^2}}$$

$$\frac{f\sqrt{4r^2 - s^2}}{s} = rx - x^2$$

$$\frac{f\sqrt{4r^2 - s^2}}{s} = 2 \cdot \frac{r}{2} x - x^2.$$

Das Maximum dieser Funktion findet man nach C. 1, indem man beachtet, daß $= ;$ ist; dann folgt

$$\text{Max}\left(\frac{f\sqrt{4r^2 - s^2}}{s}\right) = \frac{r^2}{4}$$

oder

$$\text{Max}(f) = \frac{r^2 s}{4\sqrt{4r^2 - s^2}}$$

für $x = \frac{r}{2}$.

Die Grundlinie des gesuchten gleichschenkligen Dreiecks muß also die Mittelrate zu demjenigen Radius sein, der den Sektor halbiert.

Aufgabe: Um eine Halbkugel mit dem Radius r den kleinsten Kegel zu beschr
Es sei CD = x, AD = y, DE = r.

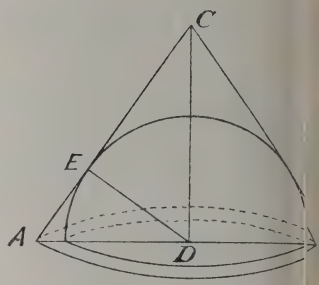
$$v = \frac{y^2 x \pi}{3}$$

$$y^2 = \frac{r^2 x^2}{x^2 - r^2}$$

$$\frac{3v}{r^2 \pi} = \frac{x^3}{x^2 - r^2}$$

$$\frac{3v}{r^2 \pi} = \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{r^2}{x^3}}; \quad \text{setze } \frac{1}{x} = z$$

$$\frac{3v}{\pi} = \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{3r^2} z - z^3}.$$



Die rechte Seite wird nun offenbar ein Minimum, wenn der Nenner (N Maximum wird. Vergleicht man nun N mit dem Ausdruck in C. 2, s $m^2 = \frac{1}{3r^2}$, also folgt:

$$\text{Max } (N) = \frac{2}{3r^3\sqrt{3}}, \quad \text{wenn } z = \frac{1}{r\sqrt{3}}; \quad \text{also ergibt s}$$

$$\text{Min } (v) = \frac{r^3 \pi \sqrt{3}}{2},$$

$$\text{wenn } x = r\sqrt{3}.$$

Wenn also die Höhe des Kegels gleich der Höhe eines gleichseitigen Dre ist, dessen Seite gleich dem Durchmesser der Kugel ist, dann ist das Volume Kegels ein Minimum.

Die Vorteile der auf den letzten Seiten (6—10) dargestellten Method bestehen darin, daß die interessantesten der Aufgaben, die auf der Schule gelö werden pflegen, mit einer gewissen Eleganz erledigt werden können. Die vorberei Schritte sind zwar etwas umständlicher als bei der ersten, aber noch immer weit ein als bei der folgenden Methode.

Allerdings dürften sich zuweilen umständliche Umformungen ergeben, d Schüler nicht immer auffinden werden. Die Methode ist elementar, jedoch für allg Funktionen nur anwendbar, wenn man auf die Ableitungen der Funktionen Bezug n wodurch man sich aber einem Gebiete nähert, das schon der höheren Math angehört.*) Es ist auch unvorteilhaft, daß die Schüler 12 Formeln und die zugeh Maximal- bezw. Minimalwerte der Funktionen auswendig lernen müssen.

*) Vergl. Koppe-Diekmann: Arithmetik und Algebra. II. Teil. § 125 ff.

III.*)

A. Algebraische Funktionen zweiten Grades.

Die Maximal- und Minimalwerte der Funktion $y = \pm ax^2 + 2bx + c$ bilden auch eser Methode den Ausgangspunkt der Untersuchungen. Darauf werden die größten l leinsten Werte der Funktion

$$y = ax + \frac{b}{x} \qquad (1)$$

timt. Hierbei muß man 5 Fälle unterscheiden.

1) a, b und x sind positiv, dann ergibt sich

$$y = ax + \frac{b}{x}$$
$$+ 2\sqrt{ab} \qquad - 2\sqrt{ab}$$
$$y = 2\sqrt{ab} + \left(\sqrt{ax} - \sqrt{\frac{b}{x}}\right)^2.$$

Ist nun $\left(\sqrt{ax} - \sqrt{\frac{b}{x}}\right)^2$ nicht gleich Null, so ist zu $2\sqrt{ab}$ noch eine positive ß zu addieren; ist aber $(\quad)^2$ gleich Null, so wird zu $2\sqrt{ab}$ nichts mehr addiert, hi hat y für diesen Fall seinen kleinsten Wert, nämlich $2\sqrt{ab}$; d. h.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Min } (y) = 2\sqrt{ab} \text{ für } \left(\sqrt{ab} - \sqrt{\frac{b}{x}}\right)^2 = 0 \text{ oder} \\ &\text{für } x = \sqrt{\frac{b}{a}} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

2) a, b und x sind negativ, und zwar $a = -\alpha$, $b = -\beta$, $x = -\xi$, dann t Gl. 1 über in $y = (-\alpha) \cdot (-\xi) + \frac{-\beta}{-\xi}$ oder

$y = \alpha\xi + \frac{\beta}{\xi}$, wo α, β, ξ an sich positive Größen sind. dse Gleichung der obigen Gl. 1 analog ist, so folgt jetzt

$$\left.\begin{aligned} &\text{Min } (y) = 2\sqrt{\alpha\beta} \text{ für } \xi = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \text{ oder} \\ &\text{Min } (y) = 2\sqrt{ab} \\ &\text{für } x = -\sqrt{\frac{b}{a}} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

3) a und b sind positiv, jedoch x ist negativ, und zwar $a = \alpha$, $b = \beta$, $x = -\xi$, ht Gl. 1 über in

$$y = -\alpha\xi - \frac{\beta}{\xi} \qquad (4)$$

*) Heilermann: Eine elementare Methode zur Bestimmung von größten und kleinsten Werten. 1871.

oder nach einer ähnlichen Umformung wie unter 3

$$y = -2\sqrt{\alpha\beta} - \left(\sqrt{\alpha\xi} - \sqrt{\frac{\beta}{\xi}}\right)^2.$$

Ist nun in dieser Gleichung $(\ )^2$ nicht gleich Null, so erhält das ... Glied $-2\sqrt{\alpha\beta}$ noch einen negativen Zuwachs. Wird aber $(\ )^2$ gleich Null, so fä... dieser Zuwachs fort, also hat y für diesen Fall ein Maximum, d. h.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Max } (y) = -2\sqrt{\alpha\beta} \text{ für } \left(\sqrt{\alpha\xi} - \sqrt{\frac{\beta}{\xi}}\right)^2 = 0 \text{ oder} \\ &\text{Max } (y) = -2\sqrt{ab} \\ &\text{für } x = -\sqrt{\frac{b}{a}} \end{aligned}\right\} \quad (5).$$

4) a und b sind negativ, jedoch x ist positiv, und zwar $a = -\alpha$, $b = -\beta$, ... Dann geht Gl. 1 über in

$$y = -\alpha\xi - \frac{\beta}{\xi}.$$

Dies ist wieder Gl. 4, also folgt

$$\left.\begin{aligned} &\text{Max } (y) = -2\sqrt{\alpha\beta} \text{ für } \xi = -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \text{ oder} \\ &\text{Max } (y) = -2\sqrt{ab} \\ &\text{für } x = \sqrt{\frac{b}{a}} \end{aligned}\right\} \quad (6).$$

5) a und b haben verschiedene Vorzeichen; auf das Vorzeichen von x kom... in diesem Falle gar nicht an.

Da in den Schlußformeln für y stets $2\sqrt{ab}$ vorkommt, und da jetzt a ... verschiedene Vorzeichen haben sollen, so müßte das Maximum oder Min... von y imaginär sein. Es gibt also in diesem Falle für y überhaupt weder ein Max... noch ein Minimum.

Mit Hülfe dieser Betrachtungen kann man nun auch die Maxima und Mi... von einigen Funktionen berechnen, die sich durch Umformungen oder Substituti... den früheren Fall zurückführen lassen. Solche Funktionen sind

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{x}.$$

Führt man die Division aus, so folgt

$$y - b = ax + \frac{c}{x}.$$

Das Maximum oder Minimum ist nach den Berechnungen unter A. leicht zu finden.

uer

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}.$$

ch die Substitution $x = z - d$ erhält man

$$y = \frac{az^2 + (b - 2ad)\,z + (ad^2 - bd + c)}{z}.$$

Das Maximum oder Minimum hiervon kann wie beim letzten Beispiel bestimmt werden.

B. Kleinste Summen und größte Produkte.

1) Die positive Zahl p soll in n solche Faktoren zerlegt werden, daß ihre Summe ein Minimum wird.

a) Zerlegung in zwei Faktoren.

Der eine unbekannte Faktor von p sei x, dann ist der andere Faktor $\frac{p}{x}$. Die Summe dieser Faktoren sei s, also folgt

$$s = x + \frac{p}{x}.$$

Nach A. 1 Gl. 2 folgt

$$\left.\begin{array}{l}\text{Min } (s) = 2\sqrt{p} \\ \text{für } x = \sqrt{p}\end{array}\right\} \qquad (7).$$

ist der andere Faktor gleich $\frac{p}{\sqrt{p}}$ oder auch gleich $\sqrt{p}$.

Summe s ist also ein Minimum, wenn beide Faktoren einander gleich sind.

Zerlegt man aber p in die beiden negativen Faktoren $-x$ und $-\frac{p}{x}$, dann ist

$$s = -x - \frac{p}{x}$$

A. 3 Gl. 5 folgt

$$\left.\begin{array}{l}\text{Max } (s) = -2\sqrt{p} \\ \text{für } x = -p\end{array}\right\} \qquad (8).$$

in diesem Falle ist der zweite Faktor dem ersten gleich.

Es ergeben sich also die folgenden Sätze.

Satz I: Zerlegt man eine positive Zahl in zwei positive gleiche Faktoren, so ist Summe ein Minimum.

Satz II: Zerlegt man eine positive Zahl in 2 negative gleiche Faktoren, so ist Summe ein Maximum.

b) Zerlegung in n Faktoren.

Angenommen, es sei bewiesen

$$\left.\begin{aligned} \text{Min } (s) &= n\sqrt[n]{p} \\ \text{für } x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n &= \sqrt[n]{p} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

d. h. der obige Satz I sei auch noch richtig, wenn man p in n Faktoren zerlegt, u soll in Folgendem bewiesen werden, daß er auch noch für (n + 1) Faktoren gilt.

Es sei also $p = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}$

und $s = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n+1}$.

Nimmt man nun an, daß der Wert von x_1, für welchen s zu einem Minim wird, bereits gefunden sei, so kann man in den letzten beiden Gleichungen x_1 au d andere Seite bringen und erhält

$$\left.\begin{aligned} \frac{p}{x_1} &= x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} \\ \text{und} \quad s - x_1 &= x_2 + x_3 + \ldots + x_{n+1} \end{aligned}\right\} \qquad (10).$$

Also muß jetzt $\frac{p}{x_1}$ noch in n solche Faktoren zerlegt werden, daß deren Sum $s - x_1$ ein Minimum wird. Nach der Annahme (Gl. 9) tritt aber bei n Faktoren d Minimum von $s - x_1$ ein, wenn $x_2 = x_3 = \ldots = x_{n+1}$ ist.

Man setze nun

$$x_2 = x_3 = \ldots = x_{n+1} = e\sqrt[n+1]{p} \qquad (11),$$

wo e eine zunächst unbekannte Größe ist, dann folgt

$$\frac{p}{x_1} = e^n\sqrt[n+1]{p^n}$$

oder

$$x_1 = \frac{\sqrt[n+1]{p}}{e^n} \qquad (12).$$

Setzt man die Werte 11 und 12 in Gl. 10 ein, so folgt

$$s = \frac{\sqrt[n+1]{p}\,(1 + ne^{n+1})}{e^n} \qquad (13).$$

Um zu erkennen, für welchen Wert von e diese Summe ein Minimum ist, m die Gl. 13 noch umgeformt werden.

Es sei $\sigma = 1 + 2e + 3e^2 + 4e^3 + \ldots + ne^{n-1}$,

Dann ist $e\sigma = e + 2e^2 + 3e^3 + \ldots + (n-1)\,e^{n-1} + ne^n$

$(1 - e)\,\sigma = 1 + e + e^2 + e^3 + \ldots + e^{n-1} - ne^n$

$(1 - e)^2\,\sigma = 1 + ne^{n+1} - e^n\,(n + 1)$. Daraus ob

$1 + ne^{n+1} = (1 - e)^2\,\sigma + e^n\,(n + 1)$.

Setzt man diesen Wert in Gl. 13 ein, so ergibt sich

$$s = \frac{\sqrt[n+1]{p}\,[e^n (n+1) + (1-e)^2\,\sigma]}{e^n}$$

wenn man in dieser Gleichung auch noch den Wert für σ einsetzt, so folgt

$$s = \sqrt[n+1]{p}\left[(n+1) + \frac{(1-e)^2\,(1+2e+3e^2+4e^3+\ldots\ldots+ne^{n-1})}{e^n}\right].$$

Nun ist aber $\sqrt[n+1]{p}$ konstant, also hat s ein Minimum, wenn [ ] ein Minimum d. h. wenn der Bruch ein Minimum ist.

Da nun $x_2 = x_3 = \ldots\ldots x_{n+1} = e\sqrt[n+1]{p}$ positive Zahlen sind und auch p positiv ist, so muß auch e positiv sein. Der Bruch kann also nur Null zum Minimum haben und dieses tritt ein, wenn $e = 1$ ist. Also folgt

$$\left.\begin{aligned} \text{Min } (s) &= (n+1)\sqrt[n+1]{p} \\ \text{für } x_1 = x_2 = x_3 = \ldots\ldots x_{n+1} &= \sqrt[n+1]{p} \end{aligned}\right\} \qquad (14).$$

Vergleicht man nun dieses Resultat mit dem in Gl. 9, so folgt, daß der oben (3) erwähnte Satz für $n+1$ Faktoren richtig ist, wenn er für n Faktoren richtig ist. Da nun für 2 Faktoren bewiesen worden ist, so gilt er auch für 3, 4, 5, ... n Faktoren.

Es folgt also der Satz: Zerlegt man eine positive Zahl p in n positive gleiche Faktoren, so ist deren Summe ein Minimum.

Durch ganz analoge Rechnung kann auch folgender Satz bewiesen werden: Zerlegt man eine positive Zahl in 2 n negative gleiche Faktoren oder eine negative Zahl in 2 n + 1 negative gleiche Faktoren, so ist deren Summe ein Maximum.

2) Die positive Zahl s soll in n solche Summanden zerlegt werden, daß deren Produkt ein Maximum ist.

Wir nehmen eine zweifache Zerlegung der Zahl s in n Summanden vor: erst sei s in n gleiche Summanden $\frac{s}{n}$ und dann wird s auch in n ungleiche Summanden $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots x_n$ zerlegt, dann folgt

$$s = \frac{s}{n} + \frac{s}{n} + \frac{s}{n} + \ldots\ldots\ldots + \frac{s}{n} \qquad (15)$$

und

$$s = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots + x_n \qquad (16).$$

Das Produkt der Summanden der ersten Zerlegung sei p, das der zweiten Zerlegung sei q; dann ist

$$p = \left(\frac{s}{n}\right)^n \qquad (17)$$

und

$$q = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots\ldots x_n \qquad (18).$$

Unsere Aufgabe besteht jetzt darin, zu untersuchen, in welchem Verhä
p und q zu einander stehen.

Man setze nun

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 \sqrt[n]{\frac{p}{q}} \\ y_2 &= x_2 \sqrt[n]{\frac{p}{q}} \\ y_3 &= x_3 \sqrt[n]{\frac{p}{q}} \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \\ y_n &= x_n \sqrt[n]{\frac{p}{q}} \end{aligned}\right\} \qquad (19),$$

so folgt daraus

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots\ldots = \frac{y_n}{x_n} = \sqrt[n]{\frac{p}{q}}\,.$$

Da die x-Werte von einander verschieden sind, so sind es auch die y-Ver
Aus Gl. 19 folgt ferner

$$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \ldots\ldots y_n = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots\ldots x_n \frac{p}{q}$$

und unter Benutzung von Gl. 18 folgt

$$p = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \ldots\ldots \cdot y_n,$$

außerdem ist $$p = \left(\frac{s}{n}\right)^n.$$

Die Zahl p ist demnach zweimal in Faktoren zerlegt worden. Zerlegt
aber eine positive Zahl p in n positive gleiche Faktoren, so ist deren Summ
Minimum (S. 15). Mithin ergibt sich

$$n \cdot \frac{s}{n} < y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_n$$

$$s < y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_n.$$

Addiert man nun die Gleichungen 19, so folgt

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_n = (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n) \sqrt[n]{\frac{p}{q}}$$

also $$s < s \sqrt[n]{\frac{p}{q}}$$

oder $$p > q\,.$$

Es ergibt sich also der folgende Satz*): Zerlegt man eine positive Za
n gleiche Summanden, so ist deren Produkt ein Maximum.

*) Der Satz wurde bereits im J. 100 n. Chr. von Nikomachus von Gerasa für zwei Faktoren be

3) Die positive Zahl s soll in n positive Summanden so zerlegt werden, daß das odukt p aus gegebenen Potenzen dieser Summanden ein Maximum wird.

habe die Summanden $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \ldots\ldots x_n$,

habe die Faktoren $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \ldots\ldots x_n^{\alpha_n}$,

o ist $$s = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n \qquad (20)$$

d $$p = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot x_3^{\alpha_3} \ldots\ldots x_n^{\alpha_n}. \qquad (21)$$

Man dividiere beide Seiten der letzten Gleichung durch $\alpha_1^{\alpha_1} \cdot \alpha_2^{\alpha_2} \cdot \alpha_3^{\alpha_3} \ldots\ldots \alpha_n^{\alpha_n}$

$$\frac{p}{\alpha_1^{\alpha_1} \cdot \alpha_2^{\alpha_2} \cdot \alpha_3^{\alpha_3} \ldots\ldots \alpha_n^{\alpha_n}} = \left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2} \cdot \left(\frac{x_3}{\alpha_3}\right)^{\alpha_3} \ldots\ldots \left(\frac{x_n}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}. \qquad (22)$$

Aus Gl. 20 folgt

$$s = \alpha_1\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right) + \alpha_2\left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right) + \alpha_3\left(\frac{x_3}{\alpha_3}\right) + \ldots\ldots + \alpha_n\left(\frac{x_n}{\alpha_n}\right). \qquad (23).$$

Wenn nun in diesen beiden Gleichungen alle Quotienten einander gleich gesetzt rden, d. h. wenn $\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \frac{x_3}{\alpha_3} = \ldots\ldots = \frac{x_n}{\alpha_n}$ ist, dann hat man in Gl. 23 die itive Zahl s in $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n)$ gleiche Summanden zerlegt und in G. 22 steht auf der rechten Seite das Produkt aus diesen gleichen Summanden. Zerlegt n aber eine positive Zahl s in n gleiche Summanden, so ist deren Produkt ein Maximum (S. 16).

Also folgt

$$\text{Max}\left(\frac{p}{\alpha_1^{\alpha_1}\,\alpha_2^{\alpha_2}\,\alpha_3^{\alpha_3} \ldots\ldots \alpha_n^{\alpha_n}}\right) = \left(\frac{s}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n}\right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n}$$

oder

$$\text{Max}\,(p) = \alpha_1^{\alpha_1} \cdot \alpha_2^{\alpha_2} \cdot \alpha_3^{\alpha_3} \ldots\ldots \alpha_n^{\alpha_n}\left(\frac{s}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n}\right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n}.$$

Was bedeutet nun dieser Ausdruck?

Die positive Zahl s besteht aus n positiven Summanden $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$, ie sind n Zahlen α proportional; denn es ist

$$\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \frac{x_3}{\alpha_3} = \ldots\ldots = \frac{x_n}{\alpha_n} = \frac{s}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n};$$

t das Produkt aus n Potenzen

$$p = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot x_3^{\alpha_3} \ldots\ldots x_n^{\alpha_n},$$

n iesem Produkt sind die Summanden $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ die Dignanden der Potenzen m die n Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$ sind die Exponenten dazu.

Also ergibt sich der Satz: Wenn eine positive Zahl in n positive Summanden zerlegt wird, so daß diese n gegebenen Zahlen proportional sind, o st das Produkt aus den n Potenzen, von welchen jene Summanden die Dinanden und diese Zahlen die Exponenten sind, ein Maximum.

K.

4) Setzt man nun wiederum in den Gleichungen 22 u. 23 alle Quotienten einander gleich, dann hat man die Zahl $\frac{p}{\alpha_1^{\alpha_1} \cdot \alpha_2^{\alpha_2} \cdot \alpha_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot \alpha_n^{\alpha_n}}$ in $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$ gleiche Faktoren zerlegt und in Gl. 23 steht auf der rechten Seite die Summe aus diesen gleichen Faktoren. Zerlegt man aber eine positive Zahl in n positive gleiche Faktoren so ist die Summe von diesen ein Minimum (S. 15). Also folgt

$$\text{Min (s)} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n) \sqrt[\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n]{\frac{p}{\alpha_1^{\alpha_1}\, \alpha_2^{\alpha_2} \cdot \alpha_3^{\alpha_3} \ldots \alpha_n^{\alpha_n}}}.$$

Was bedeutet nun dieser Ausdruck?

Die positive Zahl $\frac{p}{\alpha_1^{\alpha_1}\, \alpha_2^{\alpha_2}\, \alpha_3^{\alpha_3} \ldots \alpha_n^{\alpha_n}}$ ist ein Produkt aus $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n)$ Potenzen, deren Dignanden ihren Exponenten proportional sind; s ist die Summe dieser Dignanden.

Also folgt der Satz: Zerlegt man eine positive Zahl p in ein Produkt von n Potenzen, deren Dignanden ihren Exponenten proportional sind, so ist die Summe der Dignanden ein Minimum.

Bei diesen Entwickelungen (unter B.) ist stets von positiven Zahlen die Rede gewesen; die eben bewiesenen Sätze gelten aber auch, allerdings mit geringen Abänderungen, für negative Zahlen. Jedoch würde die Herleitung der Sätze hier zu weit führen; aus demselben Grunde muß auch die Behandlung der Funktionen höheren Grades unterbleiben.*)

Gang der Rechnung ad 1. Man stellt die Größe, von der ein Minimum gesucht werden soll, als eine Summe aus zwei Gliedern dar, diese Summe formt man so um, daß jeder Summand die Unbekannte enthält, und daß das Produkt der beiden Summanden konstant ist. Setzt man dann die beiden Faktoren einander gleich, so kann man für die Veränderliche aus dieser Gleichung den Wert finden, für welchen die Summe ein Minimum wird.

Aufgabe: Den Kreisausschnitt zu bestimmen, welcher bei gegebenem Inhalt den kleinsten Umfang hat.

Der Inhalt sei f, der Umfang u, der Radius x und der Zentriwinkel α.

$$u = 2x + \frac{2x\pi\alpha}{360^0} \quad \text{oder} \quad \frac{u}{2} = x + \frac{\alpha}{360^0}\, \pi x,$$

$$f = \frac{x^2\pi\alpha}{360^0} \quad \text{oder} \quad f = x \cdot \frac{\alpha}{360^0}\, \pi x.$$

---

*) Vergl. hierzu: Heilermann: Elementare Methode zur Bestimmung von größten und kleinsten Werten. Abschnitt III.

Setzt man in dem Produkt die Faktoren einander gleich, so folgt $x = \frac{\alpha \pi x}{360^0}$ oder $\alpha = \frac{360^0}{\alpha}$, mithin ist $f = x^2$ oder $x = \sqrt{f}$, also

$$\text{Min } u = 4\sqrt{f},$$

$$\text{wenn } x = \sqrt{f} \text{ und } \alpha = \frac{360^0}{\pi} \text{ ist.}$$

Gang der Rechnung ad 2. Man stellt die Größe, von der ein Maximum gesucht werden soll, als ein Produkt aus zwei Faktoren dar; dieses Produkt formt man so um, daß jeder Faktor die Unbekannte enthält, und daß die Summe der beiden Faktoren konstant ist. Setzt man dann die beiden Summanden einander gleich, so kann man für die Veränderliche aus dieser Gleichung den Wert finden, für welchen das Produkt ein Maximum wird.

Aufgabe: In einem gegebenen geraden Kegel soll ein Kugelsegment gezeichnet werden, dessen Gesamtoberfläche ein Maximum ist.

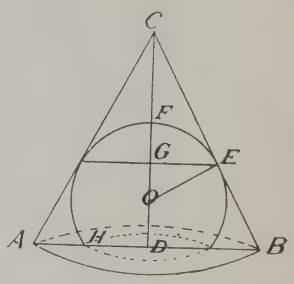
Es sei $BD = r$, $DC = h$, $AC = s$, $OE = x$, $OF = y$, $DH = \varrho$.

$$O = M + G$$

$$O = y\pi(4x - y)$$

$$x = \frac{r(h - y)}{s - r}$$

$$\frac{O(s - r)}{\pi(s + 3r)} = y\left(\frac{4rh}{s + 3r} - y\right).$$



Jetzt ist $\frac{O(s - r)}{\pi(s + 3r)}$ dargestellt als ein Produkt aus zwei Faktoren; die Summe derselben ist konstant, nämlich

$$y + \left(\frac{4rh}{s + 3r} - y\right) = \frac{4rh}{s + 3r}.$$

Setzt man nun die beiden Summanden einander gleich, so erhält man

$$y = \frac{2rh}{s + 3r}$$

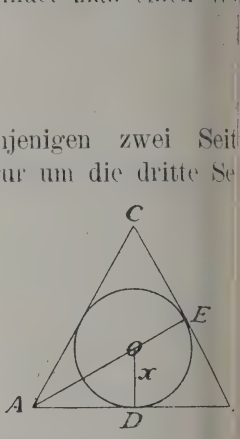
das ist nach Satz 2 der Wert, der $\frac{O(s - r)}{\pi(s + 3r)}$, also auch O zum Maximum macht. Man erhält

$$\text{Max } (O) = \frac{4r^2 h^2 \pi}{(s - r)(s + 3r)}$$

$$\text{für } y = \frac{2rh}{s + 3r}.$$

Gang der Rechnung ad 3. Man stellt die Größe, von der ein Maximu gesucht werden soll, als ein Produkt dar, von welchem ein Faktor oder auch beide potenzi sein können, und formt das Produkt so um, daß die Summe der Dignanden konstant i. Setzt man dann die Dignanden ihren Exponenten proportional, so findet man einen W für die Veränderliche, für den das Maximum des Produkts eintritt.

Aufgabe: Man soll einem gleichseitigen Dreieck denjenigen zwei Seit berührenden Kreis einbeschreiben, der bei der Umdrehung der Figur um die dritte Se BC den Ring vom größten Volumen erzeugt.



Es sei $AB = a$, $OD = x$, $OE = b$, $AE = h$.

$$v = x^2\pi \cdot 2b\pi$$

$$\frac{v}{4\pi^2} = x^2\left(\frac{h}{2} - x\right).$$

Jetzt ist $\frac{v}{4\pi^2}$ dargestellt als ein Produkt aus zwei Faktoren, der erste Fak ist eine Potenz; die Summe der Dignanden ist konstant, nämlich $x + \left(\frac{h}{2} - x\right) = \frac{1}{2}$. Setzt man nun die beiden Dignanden ihren Exponenten proportional, so erhält man

$$x : 2 = \left(\frac{h}{2} - x\right) : 1 \qquad \text{oder}$$

$$x = \frac{a}{6}\sqrt{3}$$

und das ist nach Satz 3 der Wert, der $\frac{v}{4\pi^2}$ also auch v zum Maximum mac Man erhält

$$v = \frac{a^3\pi^2\sqrt{3}}{36}$$

$$\text{für } x = \frac{a}{6}\sqrt{3}.$$

Der Radius des Kreises ist also gleich dem dritten Teile der Höhe gegebenen gleichseitigen Dreiecks, und der Kreis berührt somit alle drei Seiten Dreiecks.

Gang der Rechnung ad 4. Man stellt die Größe, von der ein Minim gefunden werden soll, als die Summe von zwei Gliedern dar, jedoch so, daß das Produ aus zwei Potenzen dieser Glieder konstant ist. Setzt man dann die Dignanden Potenzen ihren Exponenten proportional, so findet man einen Wert für die unabhäng Veränderliche, für welchen das Minimum der Summe eintritt.

Aufgabe: Das zweckmäßigste zylindrische Flüssigkeitsmaß zu finden, (auf ss Oberfläche von der zu messenden Flüssigkeit so wenig als möglich haften bleibt).

Diese Aufgabe heißt in mathematischer Form: Einen Zylinder von gegebenem ltuen zu konstruieren, bei welchem die Summe aus einer Grundfläche und der Mantelch ein Minimum ist. Der Durchmesser der Grundfläche sei $2x$, die Höhe des lin ers sei h, sein Volumen v und die Summe aus Grundfläche und Mantel O. Dann ist:

$$v = x^2 h \pi$$

$$h = \frac{v}{x^2 \pi}$$

$$O = 2xh\pi + x^2\pi$$

$$\frac{O}{\pi} = \frac{2v}{x\pi} + x^2$$

$\frac{O}{\pi}$ ist also eine Summe aus 2 Summanden,

außerdem ist $\frac{4v^2}{\pi^2} = \left(\frac{2v}{x\pi}\right)^2 . (x^2)^1.$

Das Produkt zweier Potenzen obiger Summanden ist also konstant. Setzt man e Dignanden ihren Exponenten proportional, so findet man den Wert von x, der Sme der Dignanden also auch $\frac{O}{\pi}$ zum Minimum macht.

$$\frac{2v}{x\pi} : 2 = x^2 : 1,$$

daraus folgt $x = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$.

sen Wert ist $\text{Min}\,(O) = 3\,\pi \sqrt[3]{\frac{v^2}{\pi^2}}$.

Da auch $h = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$, so ist der gesuchte Zylinder die Hälfte eines gleichseitigen ners. Wenn also ein zylindrisches Hohlgefäß von gegebenem Rauminhalt aus Blech oem anderen Stoff hergestellt werden soll, so braucht man das wenigste Material, n ie Höhe gleich dem Radius des Grundflächenkreises gemacht wird.

In der Methode von Heilermann lernen wir ein sehr sinnreiches System von erkennen, mit deren Hülfe alle Schulaufgaben über Maxima und Minima auf rein ntare Weise gelöst werden können. Sind die Funktionen, von denen man die fe oder kleinsten Werte untersuchen soll, auf die in den entwickelten Sätzen nnten Formen gebracht, so macht das Auffinden dieser Werte gar keine Schwierigkeit r; edoch die Transformationen sind häufig so kompliziert, daß sie die Fassungskraft Schüler übersteigen.

Für solche Aufgaben, bei denen die zu untersuchende Funktion die unabh
Veränderliche in mehr als zwei Gliedern enthält (z. B. Abschn. VI, Aufg. 1) u
ähnliche Aufgaben gibt H. (S. 18 u. ff.) besondere Verfahren an, so daß das Syste
zu entwickelnden Sätze noch komplizierter wird. Durch solche Vorbereitungen geh
viel der kostbaren Zeit verloren, sodaß zur Lösung von Aufgaben die noch zur Verf
stehende Zeit zu kurz wird. Daher wird man sich zur Benutzung dieser Methode
Unterricht wohl kaum entschließen können und lieber eine Methode anwenden, die
weniger allgemein ist, wenn sie auch eine gewisse Verwandtschaft mit der Differ
rechnung zeigen sollte. (Vergl. Absch. V und VI).

IV.

Im 46. Heft der „Lehrproben und Lehrgänge“ (1895) veröffentlichte Scha
eine allgemeine elementare Methode zur Bestimmung von größten und kleinsten W
Bei manchen sonst gebräuchlichen elementaren Methoden zur Bestimmung des Maxi
und Minimums ergeben sich Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade
Veränderliche, die ein Maximum oder Minimum bedingt, kann also nicht immer ge
werden. Nun aber können die höheren Potenzen einer sehr kleinen Veränderliche o
merkbaren Schaden für die weitere Rechnung fortgelassen werden, und darauf gi
sich die von Schaeffer angegebene Methode.

Beispiel: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots$

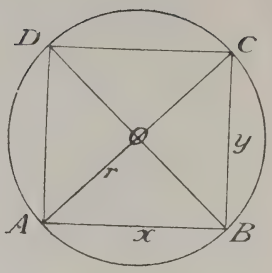
Ist nun $x = \frac{1}{1000}$, so ist $x^2 = \frac{1}{1\,000\,000}$ und $x^3 = \frac{1}{1\,000\,000\,000}$ etc.

Nimmt man von der rechten Seite zwei Glieder, so ist $\frac{1}{1-x} = 1{,}001$.

Der wahre Wert der linken Seite ist aber $\frac{1}{1-x} = \frac{1000}{999} = 1{,}001\,001$.

Mithin stehen sich die beiden Werte 1,001000 und 1,001001 gegenüber
genaue Wert weicht von dem angenäherten erst in der sechsten Dezimalstelle u
Einheit ab. Die Rechnung mit fünfstelligen Logarithmen würde also, je nachde
genau oder angenähert rechnet, keine Änderung im Resultat ergeben. Es ist dah
daß man in obiger Aufgabe die zweite, dritte und alle höheren Potenzen der Verände
fortlassen kann, wenn $x = \frac{1}{1000}$ oder noch kleiner ist. In den Maximal- und Mi
aufgaben werden dann ebenfalls die höheren Potenzen einer kleinen Größe
noch wesentlich kleiner als $\frac{1}{1000}$ sein kann, weggelassen und man kann dann die
der Veränderlichen finden, für welche ein Maximum oder Minimum eintritt.

Aufgabe: In einen Kreis mit dem Radius r soll größte Rechteck einbeschrieben werden.



Es sei $AO = r$, $AB = x$ und $BC = y$.

$$f = xy$$
$$f^2 = 4r^2 x^2 - x^4.$$

Wenn f, also auch f^2 ein Maximum werden soll, so ist dieser Wert größer bleiben sowohl, wenn man $x + \Delta x$ für x setzt, als auch, wenn man $x - \Delta x$ für x setzt. (Δx eine sehr kleine Größe.)

$$4r^2 x^2 - x^4 > 4r^2 (x \pm \Delta x)^2 - (x \pm \Delta x)^4$$

oder

$$-x^4 > 4r^2 x^2 \pm 8r^2 x \Delta x + 4r^2 (\Delta x)^2 - x^4 + 4x^3 \Delta x - 6x^2 (\Delta x)^2 \mp 4x (\Delta x)^3 - (\Delta x)^4.$$

Da nun Δx eine sehr kleine Größe ist, so kann man die zweite, dritte und vierte von Δx fortlassen. Dann vereinfacht sich die Ungleichung in folgende

$$0 > \pm 8r^2 x \Delta x \mp 4x^3 \Delta x$$

oder

$$0 > \pm (2r^2 x - x^3).$$

Dies ist aber nur möglich, wenn $0 = 2r^2 x - x^3$ ist; dann folgt

$$x = r\sqrt{2}$$

und

$$y = r\sqrt{2}$$

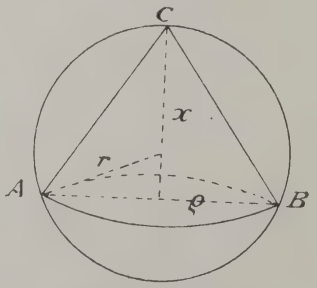
$$\text{Max } (f^2) = 4r^4$$

oder

$$\text{Max } (f) = 2r^2.$$

Das dem Kreise einbeschriebene Quadrat ist demnach das gesuchte größte Rechteck.

Aufgabe: In eine Kugel zum Radius r soll der Kegel vom größten Volumen einbeschrieben werden.



Es sei der Kugelradius r, die Höhe des Kegels x und der Grundflächenradius ϱ. Dann ist

$$v = \frac{\varrho^2 \pi x}{3}$$

oder

$$\frac{3v}{\pi} = 2r x^2 - x^3.$$

Wenn $\frac{3v}{\pi}$ also auch v ein Maximum werden soll, muß dieser Wert größer bleiben, wenn man $x + \Delta x$ für x setzt, aber auch wenn man $-\Delta x$ für x setzt. (Δx ist eine sehr kleine Größe.)

Also folgt

$$2r x^2 - x^3 > 2r (x \pm \Delta x)^2 - (x \pm \Delta x)^3$$

Nach Weglassung der höheren Potenzen von Δx

$$0 > \pm (4rx - 3x^2).$$

Dies ist aber nur möglich, wenn

$$4rx - 3x^2 = 0$$

oder $$x = \frac{4r}{3} \quad \text{ist.}$$

Dann ist $$\text{Max}(v) = \frac{32}{81} r^3 \pi.$$

Die Höhe des gesuchten Kegels ist also $^2/_3$ vom Durchmesser der gegebenen

---

Die große Einfachheit dieser Methode ist gewiß ein ganz wesentlicher
man kann ohne besondere vorbereitende Sätze sofort an die Lösung von Aufgaben
treten. Die Anlehnung an die Differentialrechnung aber in der Form, wie sie in
Methode auftritt, könnte bei den Schülern doch noch Zweifel an der Richtigkeit
lassen, da das Weglassen auch sehr kleiner Größen das Vertrauen auf die
Richtigkeit mathematischer Rechnungen erschüttern könnte. Ein anderer Mangel
folgendem Schluß:

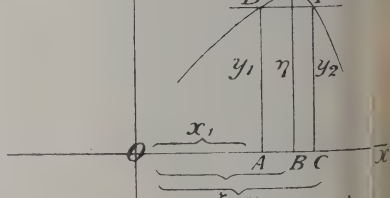
$$0 > \pm (2r^2 - x^3).$$ [aus der ersten Aufg

Das ist nur möglich, wenn $2r^2x - x^3 = 0$ ist.*)

V.**)

$y = f(x)$ sei eine stetige Funktion, die ein Maximum oder Minimum h
der unabhängigen Veränderlichen x ändert sich auch die abhängige Veränderliche

Wenn y für einen Wert ξ von x, der zwischen x_1 und x_2 liegt, ein Max
hat, dann wird y zunächst immer größer, wenn x über x_1 hinaus zunimmt, bis
$x = \xi$ seinen größten Wert η erreicht hat. Wächst nun x noch über ξ hinaus, so nimmt y wieder ab und erreicht für einen bestimmten Wert x_2 den Wert y_2, der gerade so groß ist wie y_1. Dabei ist aber nicht nötig, daß die Funktion gegen das Maximum symmetrisch ist. In der Nähe des Maximums hat also die Funktion y zwei einander gleiche Werte, zwischen denen das Maximum liegt.



Je weniger die y-Werte von dem Maximalwerte sich unterscheiden, um so weniger unterscheiden sich auch die x-Werte von einander und von ξ, und um y-Werte mit dem Maximum zusammenfallen, dann sind auch die x-Werte einand und gleich ξ. Oder umgekehrt, wenn die beiden x-Werte einander gleich si stellen die y-Werte das Maximum der Funktion dar.

*) Vergl. Jansen: Progr. des Realgymnasiums zu Münster 1897.

**) Schellbach: Mathematische Lehrstunden (Bode u. Fischer).

Es ist also

$$y_1 = f(x_1)$$
$$y_2 = f(x_2)$$
$$y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1).$$

Ist nun $y_2 = y_1$, so ist $y_2 - y_1 = 0$ und $f(x_2) - f(x_1) = 0$.

In der letzten Gleichung kann man aber stets $(x_2 - x_1)$ absondern und erhält

$$(x_2 - x_1) \cdot \varphi = 0,$$

wo φ eine Funktion von x_2 und x_1 ist, deren Grad um eine Einheit niedriger ist als der von $f(x)$. Dividiert man durch $x_2 - x_1$, so bleibt

$$\varphi = 0.$$

Setzt man nun in dieser Gleichung $x_2 = x_1$ und nennt jeden der beiden Werte ξ, so kann die Gleichung nach ξ aufgelöst werden, und man findet den Wert der unabhängigen Veränderlichen, für welchen ein Maximum von y stattfindet. Ganz analoge Schlüsse gelten auch für das Minimum.

Gang der Rechnung. Man bestimme den Wert der Funktion, für welche ein Maximum oder Minimum gefunden werden soll. Sie heiße

$$y = f(x).$$

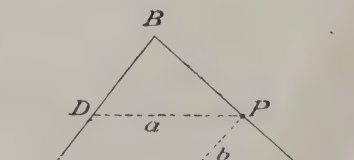
Sodann bilde man $y_1 = f(x_1)$

und $y_2 = f(x_2)$

und subtrahiere die vorletzte Gleichung von der letzten. Darauf dividiert man die Differenz durch $x_2 - x_1$ und setzt im Quotienten $x_2 = x_1 = \xi$ und diesen Quotienten gleich Null, findet man aus dieser Gleichung den Wert ξ, für welchen y zum Maximum oder Minimum η wird.

Aufgabe: Innerhalb eines Winkels α liegt ein Punkt P; man soll durch P eine Gerade so ziehen, daß sie mit den Schenkeln des Winkels das Dreieck vom kleinsten Flächeninhalt bildet.

Es sei $AE = a$, $AD = b$, $AC = x$, $AB = y$.



Wenn x nur sehr wenig größer ist als a, so gibt es ein Dreieck mit sehr großem Flächeninhalt. Wächst nun x, so wird der Flächeninhalt immer kleiner. Ist aber x sehr groß, dann ist auch der Flächeninhalt wieder sehr groß geworden. Also muß der Flächeninhalt einmal seinen kleinsten Wert gehabt haben. Es gibt also ein Minimum.

Nun ist

$$f = \frac{xy \sin \alpha}{2}$$

$$x : y = (x - a) : b$$

also folgt

$$f = \frac{bx^2 \sin \alpha}{2(x - a)}.$$

Da f ein Minimum hat, so gibt es zwei Dreiecke, deren Flächeninhalte einander gleich sind, bei denen aber der eine x-Wert größer, der andere x-Wert kleiner ist als der für das Minimum.

Dann ist $$f_1 = \frac{b x_1^2 \sin \alpha}{2 (x_1 - a)}$$

und $$f_2 = \frac{b x_2^2 \sin \alpha}{2 (x_2 - a)}$$

$$f_2 - f_1 = \frac{b x_2^2 \sin \alpha}{2 (x_2 - a)} - \frac{b x_1^2 \sin \alpha}{2 (x_1 - a)}.$$

Da nun $f_2 = f_1$, so folgt

$$\frac{x_2^2}{x_2 - a} - \frac{x_1^2}{x_1 - a} = 0$$

oder $$(x_2 - x_1) \cdot \frac{x_2 x_1 - a (x_2 + x_1)}{(x_2 - a) (x_1 - a)} = 0.$$

Dividiert man nun durch $(x_2 - x_1)$, setzt die beiden x-Werte einander gleich und nennt diesen besonderen Wert ξ, so folgt

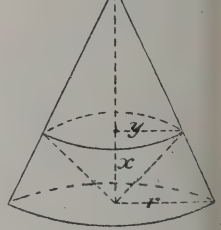
$$\xi^2 - 2a\xi = 0 \quad (\xi = 0 \text{ ist nicht brauchbar})$$

d. h. $\xi = 2a$, dann ist der zugehörige y-Wert $\eta = 2b$

$$\text{Min } (f) = 2ab \sin \alpha.$$

Aufgabe: Einem geraden Kegel, dessen Grundflächenradius r und dessen Höhe gegeben sind, soll ein gerader Kegel so eingeschrieben werden, daß seine Spitze im Mittelpunkte der Grundfläche des gegebenen Kegels liegt, seine Grundfläche der des gegebenen parallel ist und sein Volumen ein Maximum ist.

Die Höhe des gesuchten Kegels sei x, der Radius y.



Wenn die Höhe x der des gegebenen Kegels nahezu gleich ist, dann ist sein Volumen sehr klein. Wird dann diese Höhe kleiner, so wächst das Volumen. Ist aber die gesuchte Höhe sehr klein, dann ist das Volumen auch sehr klein. Mithin muß für das Volumen ein Maximum vorhanden sein.

Nun ist $$v = \frac{y^2 x \pi}{3}$$

$$y : r = (h - x) : h$$

$$v = \frac{r^2 x \pi (h - x)^2}{3h^2}.$$

Da v ein Maximum hat, so gibt es zwei Kegel v_1 und v_2, die einander gleich sind, bei denen aber die Höhe des einen größer, die Höhe des andern jedoch kleiner als die des Maximums ist.

$$v_1 = \frac{r^2 x_1 \pi (h - x_1)^2}{3h^2}$$

$$v_2 = \frac{r^2 x_2 \pi (h - x_2)^2}{3h^2}$$

$$v_2 - v_1 = \frac{r^2 x_2 \pi (h - x_2)^2}{3h^2} - \frac{r^2 x_1 \pi (h - x_1)^2}{3h^2}.$$

Weil nun $v_2 = v_1$ ist, so folgt

$$x_2 (h - x_2)^2 - x_1 (h - x_1)^2 = 0$$

oder $$(x_2 - x_1) \cdot [h^2 - 2h (x_2 + x_1) + x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2] = 0.$$

Dividiert man nun durch $(x_2 - x_1)$, setzt dann $x_2 = x_1$ und nennt diesen besonderen Wert ξ, so folgt

$$3\xi^2 - 4h\xi + h^2 = 0,$$

daraus folgt $$\xi = \frac{h}{3}$$ (der andere Wert $\xi = h$ ist nicht brauchbar)

und es ist $$\text{Max}\,(v) = \frac{4r^2 h \pi}{81}.$$

Die Höhe des gesuchten Kegels ist also ein Drittel von der Höhe des gegebenen.

Bei der eben entwickelten Methode ist es vorteilhaft, daß nur geringe Vorbereitungen zur Lösung von Aufgaben nötig sind, und daß somit verhältnismäßig viel Zeit auf die Einübung an Beispielen verwendet werden kann. Eine Anlehnung an die Differentialrechnung ist nicht zu verkennen. Schon Schellbach selbst erwähnte aber einen Mangel, der der Methode anhaftet, daß man nämlich mittelst derselben nicht bestimmen kann, ob eine Funktion ein Maximum oder ein Minimum hat. Diese Frage muß darum vorher aus der besonderen Art der betreffenden Funktion entschieden werden, wie es auch bei den beiden behandelten Aufgaben geschehen ist.

VI.*)

$y = f(x)$ sei eine stetige algebraische Funktion von x. Mit ξ bezeichnet man den Wert der unabhängigen Veränderlichen x, welcher y zu einem Maximum η macht. Dann ist

$$y = f(x)$$

$$\eta = f(\xi)$$

$$\eta - y = f(\xi) - f(x).$$

*) Schrader: Neue allgemeine Methode zur elementaren Bestimmung des Maximums und Minimums.

Wenn man die gleich hohen Potenzen von x und ξ auf der rechten Si zusammenfaßt, so kann man, da es sich um algebraische Funktionen handelt, stets $(\xi -$ absondern, und es bleibt dann genau wie bei der vorhergehenden Methode eine Funk φ von x und ξ übrig, deren Grad um eine Einheit niedriger ist als der von fx Man hat also

$$\eta - y = (\xi - x) \cdot \varphi. \qquad (1)$$

Da η der Maximalwert von y sein soll, so ist $\eta > y$, mithin ist $\eta - y$ eine e positive Größe; folglich muß auch die rechte Seite stets positiv sein, d. h. die bei Faktoren der rechten Seite $(\xi - x)$ und φ müssen immer dasselbe Vorzeichen hae Ist der eine Faktor positiv, so ist es auch der andere; ist aber der eine Faktor negi so ist es auch der andere. Mithin müssen auch beide Faktoren gleichzeitig (d. h. fü dieselben Werte von x) gleich Null werden. Nun wird aber $(\xi - x) = 0$, wenn x = ist, also wird auch $\varphi = 0$, wenn darin $x = \xi$ gesetzt wird. Dann erhält man

$$\varphi_1 = 0. \qquad (2)$$

φ_1 enthält nur noch die Veränderliche ξ. Löst man diese Gleichung nach ξ u so erhält man den bis dahin noch unbekannten Wert ξ, der y zum Maximum η mah

Die bisher angestellten Betrachtungen gelten mit nur ganz geringen Abweichun auch für den Fall, daß η ein Minimum von y ist. Dann ist nämlich $\eta - y$ negativ, is haben die Faktoren $(\xi - x)$ und φ auf der rechten Seite stets verschiedenes Zeichen, si werden aber auch gleichzeitig gleich Null. Also bleibt auch hier zur Bestimmung de Wertes ξ, der y zum Minimum η macht, nur übrig $\varphi_1 = 0$.

Will man nun untersuchen, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt, so verfu man auf folgende Weise:

Es war	$\eta - y = (\xi - x)\,\varphi$
und	$\varphi_1 = 0$
also folgt	$\eta - y = (\xi - x)(\varphi - \varphi_1)$.

Bei algebraischen Funktionen kann man aus $\varphi - \varphi_1$ stets noch ξ absondern; dann bleibt noch eine Funktion ψ übrig, die entweder konstant oder v abhängig ist. Man erhält dann

$$\eta - y = (\xi - x)^2 \cdot \psi. \qquad (3)$$

Jetzt ist $(\xi - x)^2$ auf jeden Fall positiv. Ist nun auch ψ eine posi konstante Größe, oder für den aus Gleichung 2 für ξ gefundenen Wert positiv, so ist in Gleichung 3 auch $\eta - y$ positiv, d. h. $\eta > y$. η ist also für diesen besonde Wert ξ ein Maximum. Ist aber ψ eine negative konstante Größe oder für denje Gleichung 2 für ξ gefundenen Wert negativ, dann ist auch $\eta - y$ für diesen Wer von ξ negativ, d. h. $\eta < y$. η ist also in diesem Falle ein Minimum.

Gang der Rechnung: Man bilde außer der Funktion $y = f(x)$ die be Funktion mit η u. ξ, also $\eta = f(\xi)$. η ist das Maximum oder Minimum von y, welc für $x = \xi$ eintritt. Dann erhält man

$$\eta - y = f(\xi) - f(x),$$

Auf der rechten Seite wird $(\xi - x)$ abgesondert, und man erhält

$$\eta - y = (\xi - x) \cdot \varphi.$$

Man setzt nun in der Funktion φ die Veränderliche $x = \xi$ und dann $\varphi = 0$ und nimmt aus dieser Gleichung ξ.

Zur Bestimmung, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt, subtrahiert man φ_1 von φ, sondert noch einmal $(\xi - x)$ ab und untersucht das Vorzeichen von $\varphi - \varphi_1$. Ist es positiv, so handelt es sich um ein Maximum, ist es negativ, um ein Minimum.

Aufgabe: In einen geraden Kegel zum Radius r und zur Höhe h soll der größte Zylinder eingeschrieben werden.

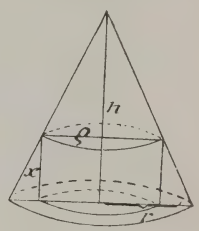
Es sei r der Radius der Grundfläche und h die Höhe des Kegels, ferner ϱ der Radius der Grundfläche und x die Höhe des Zylinders. Dann ist das Zylindervolumen

$$v = \varrho^2 x \pi$$

$$\varrho = \frac{r\,(h - x)}{h}$$

$$v = \frac{r^2 x\,(h - x)^2 \pi}{h^2}$$

$$\frac{v h^2}{r^2 \pi} = h^2 x - 2hx^2 + x^3.$$



Man setze nun $\frac{v h^2}{r^2 \pi} = y$ und beachte, daß, wenn y für einen bestimmten Wert zum Maximum wird, auch v für denselben Wert ein Maximum erreicht.

Es ist also $$y = h^2 x - 2h x^2 + x^3.$$

Der Wert von x, der y zum Maximum η macht, heiße ξ, also folgt

$$\eta = h^2 \xi - 2h \xi^2 + \xi^3$$

$$\eta - y = h^2 (\xi - x) - 2h (\xi^2 - x^2) + (\xi^3 - x^3)$$

oder $$\eta - y = (\xi - x)\,[h^2 - 2h\,(\xi + x) + \xi^2 + \xi x + x^2]. \qquad (1)$$

Wenn nun $\eta > y$, also die linke Seite positiv ist, dann muß auch die rechte stets positiv sein. Die Faktoren der rechten Seite müssen also stets dasselbe Vorzeichen haben und müssen demnach auch gleichzeitig (d. h. für dieselben Werte von x) Null werden. Der erste Faktor $(\xi - x)$ wird aber gleich Null, wenn $x = \xi$ gesetzt wird demnach wird auch der zweite Faktor gleich Null, wenn $x = \xi$ ist.

Also folgt $$3\xi^2 - 4h\xi + h^2 = 0. \qquad (2)$$

Daraus ergibt sich $$\xi_1 = h \text{ und } \xi_2 = \frac{h}{3}.$$

Es muß nun noch untersucht werden, für welchen der beiden Werte ein Maximum eintritt. Man subtrahiere darum den aus Gl. 2 entnommenen Ausdruck von der

eckigen Klammer in Gl. 1. (Dies darf geschehen, weil $3\xi^2 - 4h\xi + h^2 = 0$ ist.) Dann erhält man

$$\eta - y = (\xi - x)\,[h^2 - 2h\,(\xi + x) + (\xi^2 + \xi x + x^2) - 3\xi^2 + 4h\xi - h^2]$$

oder

$$\eta - y = (\xi - x)^2\,[2h - 2\xi - x].$$

Für den Fall des Maximums ist nun $x = \xi$, also folgt

$$\eta - y = (\xi - x)^2\,[2h - 3\xi].$$

I. Es sei nun erst $\xi_1 = h$, dann ist

$$\eta - y = (\xi - x)^2\,[-h].$$

Der erste Faktor der rechten Seite ist positiv, der zweite ist negativ, mithin ist die ganze rechte Seite negativ; d. h. $\eta < y$. Für $\xi_1 = h$ ist also η ein Minimum von y. Dies könnte man auch aus der Figur ersehen, da $v = 0$ ist für $x = h$.

II. Es sei nun ferner $\xi_2 = \frac{h}{3}$, dann ist

$$\eta - y = (\xi - x)^2\,[h].$$

Jetzt sind beide Werte der rechten Seite positiv, mithin ist die ganze rechte Seite positiv, d. h. $\eta > y$. Für $\xi_2 = \frac{h}{3}$ ist also η ein Maximum von y. Man erhält dann

$$\text{Max } (v) = \frac{4r^2 h\pi}{27},$$

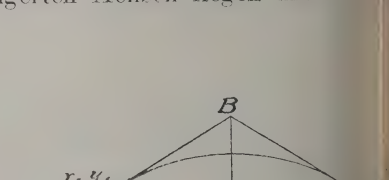
$$\text{für } x = \frac{h}{3}.$$

Die Höhe des gesuchten Zylinders ist also gleich dem dritten Teile der Kegelhöhe.

Aufgabe: Um eine Ellipse zu den Halbachsen a und b soll ein Parallelogramm so beschrieben werden, daß die Ecken auf den verlängerten Achsen liegen und der Inhalt ein Minimum ist.

Die Gleichung der Ellipse ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Die Gleichung der Tangente im Punkte $x_1\,y_1$ lautet

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1.$$

Setzt man $y = 0$, so ist AO oder $x = \frac{a^2}{x_1}$.

Setzt man $x = 0$, so ist BO oder $y = \frac{b^2}{y_1}$.

Der Flächeninhalt F des Parallelogramms ist dann

$$F = \frac{2a^2 b^2}{x_1 y_1}$$

$$\text{oder } F^2 = \frac{4a^4 b^4}{x_1^2 y_1^2}.$$

Da $x_1 y_1$ auf der Ellipse liegt, so ist $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ und daraus folgt

$$y_1^2 = \frac{b^2 (a^2 - x_1^2)}{a^2},$$

$$\text{also ist } F^2 = \frac{4a^6 b^2}{x_1^2 (a^2 - x_1^2)}.$$

F^2 also auch F ist nun ein Minimum, wenn der Nenner n ein Maximum ist. Untersuchen also das Maximum von folgendem Ausdruck

$$n = a^2 x_1^2 - x_1^4.$$

ξ_1 sei der Wert von x_1, welcher n zum Maximum ν macht; also ist

$$\nu = a^2 \xi_1^2 - \xi_1^4$$

$$\nu - n = a^2 (\xi_1^2 - x_1^2) - (\xi_1^4 - x_1^4)$$

$$\nu - n = (\xi_1 - x_1) [a^2 (\xi_1 + x_1) - (\xi_1^3 + \xi_1^2 x_1 + \xi_1 x_1^2 + x_1^3)]. \quad (1)$$

Nun setzt man $2a^2 \xi_1 - 4\xi_1^3 = 0$ (2)

und findet daraus $\xi_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

dann ist $\eta_1 = \frac{b}{2}\sqrt{2}$

die halben Diagonalen $AO = a\sqrt{2}$

$BO = b\sqrt{2}$.

Will man nun bestimmen, ob für $\xi_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ ein Maximum oder Minimum von ist, so subtrahiert man den Ausdruck $2a^2 \xi_1 - 4\xi_1^3$ von der eckigen Klammer Gleichung 1.

Man erhält dann

$$\nu - n = (\xi_1 - x_1)^2 [-a^2 + \xi_1^2 + \xi_1 (\xi_1 + x_1) + (\xi_1^2 + \xi_1 x_1 + x_1^2)]$$

$x_1 = \xi_1$ folgt $\nu - n = (\xi_1 - x_1)^2 [-a^2 + 6\xi_1^2]$

für $\xi_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ $\nu - n = (\xi_1 - x_1)^2 [-a^2 + 3a^2]$.

Beide Faktoren der rechten Seite sind positiv, also ist $\nu > n$; also der ob
für x_1 gefundene Wert $\xi_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ macht n zu einem Maximum, mithin F zu ein
Minimum; nämlich

$$\text{Min (F)} = 4ab$$

$$\text{für } \xi_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{und } \eta_1 = \frac{b}{2}\sqrt{2}\ .$$

Aufgabe: Um eine Kugel zum Radius r soll der Kegel vom kleinsten Man
beschrieben werden.

Es sei $OE = r$, $CD = x$ und $DB = \varrho$,

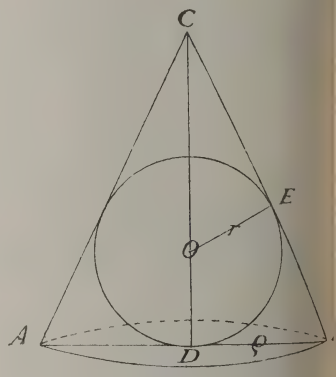
dann ist $M = 2\varrho s\pi$

oder $M = 2\varrho\pi\sqrt{x^2 + \varrho^2}$

außerdem ist $DB : CD = OE : CE$,

daraus folgt $\varrho = \frac{rx}{\sqrt{x^2 - 2rx}}$,

also ist $\frac{M}{2r\pi} = \frac{x^2 - xr}{x - 2r}$.



Setzt man nun zur Abkürzung $\frac{M}{2r\pi} = y$, so folgt

$$y = \frac{x^2 - xr}{x - 2r}.$$

Der Wert von x, der y zum Minimum η macht, heiße ξ, so folgt

$$\eta = \frac{\xi^2 - \xi r}{\xi - 2r}$$

$$\eta - y = \frac{\xi^2 - \xi r}{\xi - 2r} - \frac{x^2 - xr}{x - 2r}.$$

Bringt man die Brüche auf denselben Nenner, so folgt

$$\eta - y = (\xi - x) \cdot \frac{[\xi x - 2r(\xi + x) + 2r^2]}{(\xi - 2r)(x - 2r)}. \qquad (1)$$

Da nun η ein Minimum sein soll, so ist die linke Seite stets negativ; die Faktoren rechten Seite müssen also immer verschiedene Vorzeichen haben und müssen daher gleichzeitig zu Null werden. Der erste Faktor $(\xi - x)$ wird aber gleich Null, n $\xi = x$ ist; mithin wird auch der zweite Faktor, d. h. der Bruch, gleich Null, wenn in seinem Zähler $\xi = x$ setzt; also folgt

$$\xi^2 - 4r\xi + 2r^2 = 0, \qquad (2)$$

daraus ergibt sich

$$\xi = 2r \pm r\sqrt{2}.$$

Aus der Natur der Aufgabe ist nun ersichtlich, daß die Höhe ξ des Kegels er sein muß als $2r$. Darum ist

$$\xi = r(2 + \sqrt{2}).$$

Nun muß noch untersucht werden, ob diesem Werte von ξ ein Minimum von η richt. Subtrahiert man die linke Seite der Gl. 2 von der eckigen Klammer in 1, so folgt

$$\eta - y = (\xi - x) \cdot \frac{[-\xi(\xi - x) + 2r(2\xi - \xi - x)]}{(\xi - 2r)(x - 2r)}$$

oder

$$\eta - y = (\xi - x)^2 \cdot \frac{(-r\sqrt{2})}{(\xi - 2r)(x - 2r)}.$$

Der Nenner dieses Bruches ist positiv, der Zähler aber negativ. Da nun $x)^2$ auch positiv ist, so ist die rechte Seite negativ, also muß auch die linke Seite tiv sein; d. h. $\eta < y$.

Für den besonderen Wert $\xi = r(2 + \sqrt{2})$ wird demnach y zum Minimum und t den Wert

$$\text{Min } (y) = r(3 + 2\sqrt{2}),$$

mithin

$$\text{Min } (M) = 2r^2\pi(3 + 2\sqrt{2}).$$

Die Vorteile dieser Methode sind sehr auffällig. Sie hat, da sie sich an die rentialrechnung anlehnt, mit den beiden zuletzt behandelten Methoden eine gewisse ichkeit, zeichnet sich aber vor ihnen durch überraschende Einfachheit und Klarheit Schlußfolgerungen aus. Est ist eine allgemeine, nach der man alle Maximal- aben, die auf der Schule vorkommen können, ja sogar solche von Funktionen mit

mehreren Veränderlichen (Schrader § 7) und von unentwickelten Funktionen (Schrader § lösen kann. Außerdem ist auch die Untersuchung leicht anzustellen, ob ein Maximu oder ein Minimum vorliegt.

Wenn man nun sagen soll, welche von den erwähnten Methoden am vorteilhaftest auf höheren Schulen anzuwenden ist, so ist diese Entscheidung doch nicht so sel einfach. Denn ein Lehrer legt vielleicht besonderen Wert auf rein elementare Behandlun (Methode I, Koppe, Heilermann), ein anderer auf Allgemeingültigkeit (Heilermann Schaeffer, Schellbach, Schrader) und wieder einer auf Kürze und leichte Erlernbarke (Methode I, Schaeffer, Schellbach, Schrader). Ich würde der Methode den Vorzug gebe welche mit leichter Erlernbarkeit Genauigkeit und Allgemeinheit verbindet, und würd mich darum für die Methode von Schrader entscheiden.

Karl Schröter.

Schulnachrichten.

I. Allgemeine Lehrverfassung.

Übersicht über die einzelnen Lehrgegenstände und die für ieselben bestimmte Stundenzahl im Schuljahre 1903 1904.

	VI	V	IV	IIIb$_2$	IIIb$_1$	IIIa$_2$	IIIa$_1$	IIb	IIa$_2$	IIa$_1$	Ib	Ia	Summa
Religion.	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	25
sch u. Geschichts-erzählungen.	3|1|4	2|1|3	3	2	2	2	2	3	3	3	3	3	33
Lateinisch.	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	91
Griechisch.	—	—	—	6	6	6	6	6	6	6	6	6	54
Französisch.	—	—	4	2	2	2	2	3	3	3	3	3	27
lisch (Wahlfach).	—	—	—	—	—	—	—	—	(2)		(2)		(4)
äisch (Wahlfach).	—	—	—	—	—	—	—	—	(2)		(2)		(4)
Geschichte und Geographie.	— 2	— 2	2 2	2 1	2 1	2 1	2 1	3	3	3	3	3	35
Rechnen und Mathematik.	4	4	4	3	3	3	3	4	4	4	4	4	44
urbeschreibung.	2	2	2	2	2	2	2	—	—	—	—	—	14
ik, Elemente der ie u. Mineralogie.	—	—	—	—	—	—	—	2	2	2	2	2	10
Schreiben.	2	2	(1)			—	—	—	—	—	—	—	5
Zeichnen.	—	2	2	2	2	2		(2)					12
Singen.	2	2	1 Sopran und Alt der Alumnen. 1 gemischter Chor der Alumnen. 1 Männerchor. 1 Sopran und Alt der Stadtschule. 1 gemischter Chor der Stadtschule.										9
Turnen.	3	3	3	3		3		3	3		3		24

2. Verteilung der Stunden unter die Lehrer im Sommer 1903.

Namen der Lehrer.	Ia.	Ib.	IIa[1].	IIa[2].	IIb.	IIIa[1].	IIIa[2].	IIIb[1].	IIIb[2].	IV.	V.	VI.
1. Prof. Dr. **Urban,** Propst und Direktor (Ord. Ia).	6 Griech.									2 Geogr.		
2. Prof. **Ziegler,** geistl. Inspektor.	2 Rel.	2 Rel.		2 Rel.	2 Rel.							
3. Professor Dr. **Decker** (Ord. Ib).		7 Latein		6 Griech. 3 Gesch.								
4. Professor Dr. **Gantzer.**	4 Math. 2 Physik	4 Math. 2 Physik	4 Math. 2 Physik									
5. Professor Dr. **Hertel** (Ord. IIIa[1]).	3 Gesch.	3 Gesch.				8 Latein	2 Franz. 3 Gesch. u. Geogr.					
6. Professor Dr. **Giseke** (Ord. IIb).			3 Dtsch. 3 Gesch.		7 Latein 3 Gesch.							
7. Professor **Knaake.**	3 Franz. 2 Englisch	3 Franz. 2 Englisch		3 Franz. 2 Englisch						4 Franz.		
8. Professor Dr. **Bahr.**	7 Latein		6 Gr.				2 Dtsch.					
9. Professor Dr. **Thimme** (Ord. IIa[2]).		3 Dtsch. 6 Gr.		7 Latein					2 Franz.			
10. Oberlehrer Dr. **Frantz.**				4 Math. 2 Physik	4 Math. 2 Physik		3 Math. 2 Nat.		3 Math.			
11. Oberlehrer **Hildebrandt** (Ord. IIIb[2]).					6 Griech.				2 Dtsch. 8 Latein	3 Dtsch.		
12. Oberlehrer Dr. **Müller** (Ord. IV).						2 Dtsch. 3 Gesch. u. Geogr.			3 Gesch. u. Geogr.	8 Latein		3 Turnen
13. Oberlehrer **Kratzenstein.**	3 Dtsch. 2 Hebr.		2 Rel. 2 Hebr.		3 Dtsch.		2 Rel.	2 Rel.				3 Rel.
14. Oberlehrer **Schröter.**						3 Math. 2 Nat.		3 Math. 2 Nat.		4 Math. 2 Nat.	4 Rechn.	
15. Oberlehrer Dr. **Schlockwerder** (Ord. IIa[1]).			7 Latein					2 Dtsch. 3 Gesch. u. Geogr.	6 Griech.	2 Gesch.		
16. Oberlehrer **Harth** (Ord. IIIa[2]).						6 Gr.	8 Latein	6 Griech.				
17. Oberlehrer **Peters** (Ord. IIIb[1]).			3 Franz.		3 Franz.	2 Franz.		8 Latein 2 Franz.				
18. Oberlehrer **Grussendorf** (Ord. V).							6 Griech.				3 Dtsch. 8 Latein 3 Turnen	
19. Oberlehrer **Weidel** (Ord. VI).				3 Dtsch.						2 Rel.	2 Geogr.	2 Geogr 4 Dtsch 8 Latein
20. Gymnasiallehrer **Kohlrausch.**	3 Turnen		3 Turnen					1 Schreiben	2 Nat.	3 Turnen	2 Nat. 2 Schreib.	4 Rechn 2 Nat. 2 Schreib.
21. Maler **Müller,** Zeichenlehrer.	2 Zeichnen					2 Zeichnen		2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	
22. Musikdirektor **Forchhammer,** Gesanglehrer.	1 Männerchor. 1 gemischter Chor der Stadtschüler.			1 gemischter Chor der Alumnen.		1 Sopran und Alt der Alumnen. 1 Sopran und Alt der Stadtschüler					2 Singen	2 Singen
23. Konvikts-Kandidat Dr. **Thimme.**									2 Rel. 2 Dtsch)			
24. Konvikts-Kand. **Weber.**						2 Rel. (2 Dtsch)						
25. Konvikts-Kandidat **Hildebrand.**			(2 Hebr.)								2 Rel.	
26. Turnlehrer **Hänsgen.**					3 Turnen	3 Turnen						
27. Turnlehrer **Arth. Müller.**								3 Turnen				

rteilung des Unterrichts unter die Lehrer im Winter 1903|4.

der Lehrer.	Ia.	Ib.	IIa[1].	IIa[2].	IIb.	IIIa[1].	IIIa[2].	IIIb[1].	IIIb[2].	IV.	V.	VI.	Wöchentl. Stunden.
)r. **Urban,** Propst rektor, Geh. Reg.-)rd. Ia).	6Griech.									2 Geogr.			8
iegler, geistlicher or.	2 Rel.	2 Rel.		2 Rel.									6
)r Dr. **Decker** b).		7 Latein		6Griech. 3 Gesch.									16
)r Dr. **Gantzer.**	4 Math. 2 Physik	4 Math. 2 Physik	4 Math. 2 Physik										18
r Dr. **Giseke** b).	3 Gesch.		3 Dtsch. 3 Gesch.		7 Latein 3 Gesch.								19
)r **Knaake.**	3 Franz. 2 Englisch	3 Franz.	2 Englisch	3 Franz.						4 Franz.			17
r Dr. **Bahr.**	7 Latein		6Griech.				2 Dtsch. 2 Franz.						17
rer Dr. **Frantz.**				4 Math. 2 Physik	4 Math. 2 Physik		3 Math. 2 Nat.		3 Math.				20
rer **Hildebrandt** a[2]).				7 Latein	6 Griech.				2 Dtsch.	3 Dtsch. 2 Gesch.			20
rer Dr. **Müller** 7).						2 Dtsch. 3 Gesch. u. Geogr.			3 Gesch. u. Geogr.	8 Latein		3Turnen	19
rer **Kratzenstein.**	3 Dtsch. 2 Hebr.		2 Rel. 2 Hebr.		2 Rel. 3 Dtsch.			2 Rel.				3 Rel.	19
rer **Schröter** [a[1]).						3 Math. 2 Nat.		3 Math. 2 Nat.		4 Math. 2 Nat.	4 Rechn.		20
rer Dr. **Schlock-** (Ord. IIa[1]).		6Griech. 3 Gesch.	7 Latein					2 Dtsch. 3 Gesch. u.Geogr.					21
er **Harth** [a[2]).						6 Griech.	8 Latein	6Griech.					20
er **Peters** [b[1]).			3 Franz.		3 Franz.	2 Franz.		8 Latein 2 Franz.					18
er **Grussendorf** .							6Griech.				3 Dtsch. 8 Latein 3Turnen		20
er Dr. **Weidel** [b[2]).		3 Dtsch.		3 Dtsch.					8 Latein 2 Franz.	2 Rel.	2 Geogr.		20
er **Ideler**).									6Griech.			4 Dtsch. 8 Latein 2 Geogr.	20
allehrer **Kohl-**	3 Turnen		3 Turnen					1 Schreiben	2 Nat.	3 Turn.	2 Nat. 2 Schreib.	4 Rechn. 2 Nat. 2 Schreib.	24
iller, Zeichen-	2 Zeichnen					2 Zeichnen.		2Zeichn.	2Zeichn.	2Zeichn.	2Zeichn.		12
ektor **Forch-** Gesanglehrer.	1 Männerchor. 1 gemischter Chor der Stadtschüler.				1 gemischter Chor der Alumnen.			1 Sopran und Alt der Alumnen. 1 Sopran und Alt der Stadtschüler.			2 Singen	2 Singen	9
-Kandidat **Petri.**						8 Latein 2 Rel.							10
nd. **Fittbogen.**			2 Hebr.								2 Rel.		(2) 2
-Kand. **Zander.**									(2 Dtsch.) 2 Rel.				(2) 2
r **Hänsgen.**					3Turnen	3 Turnen							6
r **Arth. Müller.**								3 Turnen					3

3. Die durchgenommenen Pensen.

Oberprima (Ordinarius: Der Propst).

Religionslehre. Das Wichtigste aus der Glaubens- und Sittenlehre im Anschluß an die heilige Schrift und unter Heranziehung der Confessio Augustana. Erklärung des Römerbriefes. Wiederholungen. 2 St. Ziegler.

Deutsch. Schillers Leben und Auswahl aus seinen Gedichten, besonders der Gedankenlyrik. Wallenstein, Braut von Messina, Über das Erhabene, Über naive und sentimentalische Dichtung. Goethes Leben mit Auswahl aus seiner Lyrik und aus Dichtung und Wahrheit. Iphigenie. Die Romantik. 3 St. Kratzenstein.

Aufsätze: 1. „Was langjährig ersehnt sich bereitet im Schoß der Gesamtheit, Plötzlich am Tag des Geschicks führt es der Genius aus." 2. a) Der tragische Konflikt in Grillparzers Sappho. b) Ti tirannos als Motto zu Schillers Jugenddramen. 3. „Sie sieht den Menschen in des Lebens Drang Und wälz die größre Hälfte seiner Schuld den unglückseligen Gestirnen zu" (nach Schillers Wallenstein. Klassenarbeit). 4. Der Gedankengang in Schillers Gedicht „Die Künstler". 5. Ein selbstgewähltes Thema. 6. „Un was man ist, das blieb man andern schuldig" (Klassenaufsatz). 7. Lessings Nathan und Goethes Iphigenie zwei Denkmäler der Humanitätszeit.

Abituriententhemen. Michaelis 1903: Warum nennt man Rom die ewige Stadt?

Ostern 1904: Für und wider Oktavio Piccolomini.

Lateinisch. Im Sommer: Tacitus Annalen I und II in Auswahl. Privatim: Livius XXV und Cicero Somnium Scipionis. Im Winter: Cicero de oratore I, privatim: de natura deorum I und II in Auswahl. Im S. und W.: Horatius carm. I und III und die meisten Episteln. Mündliche Übersetzung aus Ostermann-Müllers lateinischem Übungsbuch, grammatische Wiederholungen. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit (Extemporalien, Klassenexercitien, Übersetzungen). 7 St. Bahr.

Griechisch. Homer Ilias XIII, 1—327; XIV, 1—311, XV, 1—404, 572—746 XVI, 1—284, 419—568, 786—867; XVII, 1—303, 626—761; XVIII; XIX, 1—308 XX, 1—381; XXI; XXII; XXIII; XXIV. Platos Phaedon 1—48 und 63 bis Schluß. Sophokles Philoktet. Aus dem Lesebuch von Wilamowitz-Moellendorff: Pseudo-Aristoteles *περὶ κόσμου*, Stücke aus Strabo, Euklid, Diokles u. A. Schriftliche Übersetzungen in Deutsche und Griechische; grammatische Wiederholungen. 6 St. Der Propst.

Französisch. Molière, les Femmes savantes; V. Hugo, Ausgewählte Gedichte. Mignet, Histoire de la Terreur. Synonymisches, Metrisches, Etymologisches, Stilistisches, Sprechübungen. Gelegentliche grammatische Wiederholungen. Alle drei Wochen ein Klassenarbeit. 3 St. Knaake.

Englisch. (Wahlfrei, vereinigt mit Unterprima.) Lesestücke aus Tendering, Lehrbuch der englischen Sprache; Dickens, Sketches; Shakespeare, Julius Caesar, Sprechübungen, Diktate und Wiedergaben von Gelesenem oder Erzähltem. 2 St. Knaake.

Hebräisch. (Wahlfrei, vereinigt mit Unterprima). Vervollständigung der Formenlehre mit Übungen nach Kautzsch, Übungsbuch § 59—69. Gelesen wurde Auswahl aus der Genesis und aus den Psalmen, Prophet Joël. 2 St. Kratzenstein.

Geschichte und Geographie. Geschichte der neuen Zeit vom Ende des dreißigjährigen Krieges bis zur Gegenwart. Rückblicke auf die Geschichte des Mittelalters und Wiederholungen aus der physischen und politischen Geographie. 3 St. Im S. Herter, im W. Giseke.

Mathematik. Die Berechnung der Kugel. Einige Formeln der sphärischen igonometrie. Kombinationslehre. Der binomische Lehrsatz für ganze positive Expo- nten. Die Elemente der analytischen Geometrie bis zu den Kegelschnitten einschl. iederholungen aus allen Gebieten der Mathematik, verbunden mit zahlreichen Übungen. le 14 Tage eine schriftliche Arbeit. 4 St. Gantzer.

Abiturienten-Aufgaben. Zu Michaelis 1903: 1. Ein Dreieck zu konstruieren aus dem erschied zweier Seiten $= d$, dem Unterschied ihrer Gegenwinkel $= \delta$ und dem Radius des zu der dritten e gehörenden anbeschriebenen Kreises $= \varrho$. 2. Eine hohle Kugel aus Kupferblech, deren äußerer Durch- ser $2r = 250$ mm beträgt, sinkt in Wasser von 4,08° genau bis zur Hälfte ein. Wie dick ist das ferblech? Das spezif. Gewicht des Kupfers ist $\varsigma = 8{,}8$. 3. Ein Dreieck hat den Flächeninhalt = 0,3095, und zwei seiner Winkel sind $\alpha = 36°\,49'\,40''$ und $\beta = 77°\,52'\,8''$. Wie groß ist der Flächen- lt des Kreises, dessen Radius geometrische Mittel zwischen den Radien des dem Dreiecke umbeschriebenen des ihm einbeschriebenen Kreises ist? 4. Um die ersten Kosten der Einrichtung eines Elektrizitäts- s zu decken, beschließt eine Stadtgemeinde, ein mit $z = 4$ vom Hundert verzinsliches Darlehen von = 120 000 Mk. aufzunehmen, mit der Verpflichtung, diese Schuld in den nächsten $n = 25$ Jahren durch iche Tilgungssummen (zu denen die ersparten Zinsen hinzutreten) heimzuzahlen. Mit wie viel Prozent ie Anleihe zu tilgen?

Zu Ostern 1904: 1. Ein Dreieck zu konstruieren aus der Summe zweier Seiten $= s$, der Summe zu diesen Seiten gehörenden Höhen $= \varsigma$ und dem Winkel $= \alpha$, von dessen Spitze aus eine dieser n gezogen ist. 2. Ein Dreieck, dessen eine Seite $= c$ und dessen anliegende Winkel $= \alpha$ und β sind. um die gegebene Seite gedreht werden. Wie groß ist der Rauminhalt und die Oberfläche des ent- nden Rotationskörpers? 3. Unmittelbar an einem unter dem Winkel α ansteigenden Berghang steht Haus. Die das Haus bescheinenden Sonnenstrahlen erzeugen in einer zu dem Berghang senkrechten e einen Schatten des Gebäudes, der sich a m den Abhang hinauferstreckt. Wie hoch ist das Haus, die Sonnenhöhe β beträgt? $a = 7{,}63$, $\alpha = 25°\,8'$, $\beta = 55°\,6'$. 4. Jemand will von seinem Einkommen ch am Schluß jeden Jahres soviel ersparen, daß er nach $n = 30$ Jahren von den Zinsen des ersparten als leben kann. Er berechnet die späteren jährlichen Ausgaben für seinen Lebensunterhalt auf 5000 M. Wieviel muß er jährlich ersparen, wenn der Zinsfuß $z = 4^1/_4$ vom Hundert beträgt?

Physik. Optik. Mathematische Geographie. Wiederholungen aus der Wärmelehre im Anschluß daran das Wichtigste aus der Meteorologie. 2 St. Gantzer.

Unterprima (Ordinarius: Prof. Dr. Decker).

Religionslehre. Kirchengeschichte. Ausgewählte Abschnitte aus dem Johannes- gelium. 2 St. Ziegler.

Deutsch. Die Reformationszeit. Überblick über die Entwicklung der deutschen atur bis zur zweiten Blüteperiode. Klopstock, Lessing. Klassenlektüre: Auswahl Klopstocks Oden; Lessings Laokoon und Hamburgische Dramaturgie in Verbindung Aristoteles Poëtik. Lessings Emilia Galotti und Nathan. Shakespeares Julius Caesar. äge. Dispositionsbesprechungen. Poëtik. 3 St. Im S. Thimme I, im W. Weidel.

Aufsätze: 1. Vier Standbilder Magdeburgs: Kaiser Otto und Wilhelm, Luther und Bismarck gleichender Betrachtung und Würdigung. 2. „Im Wahllokal" nach dem Gemälde von F. Brütt. ber die Kunst Stimmung zu schaffen in den Eingängen von Klopstocks Oden. 3. b) Gotteserkenntnis ndacht im Anblick der Natur (nach Klopstocks Oden). 4. Die Motivierung der Katastrophe in Galotti". (Klassenaufsatz.) 5. a) Mit welchem Recht kann man Lessings „Emilia Galotti" ein ionäres Drama nennen? 5. b) Wie ist Lessings Ausspruch (Laok. XXIV): „Die Malerei als nach- e Fertigkeit kann die Häßlichkeit ausdrücken, die Malerei als schöne Kunst will sie nicht ausdrücken" rteilen? 6. Nathans Religion. 7. Welchen Einblick in Lessings Persönlichkeit und Bestrebungen t uns das Schlußstück der Hamburgischen Dramaturgie? (Klassenaufsatz.) 8. Leb in der Gegen- Zu leer ist und zu weit Der Zukunft Haus, zu groß das der Vergangenheit. Doch daß die art nicht eng dir sei und klein, Zieh die Vergangenheit und Zukunft mit herein! (Rückert).

Lateinisch. Tacitus Germania und ausgewählte Briefe Ciceros. privatim Tacitus bla. Cicero in Verrem IV und Tusculanen V. Horaz Od. I 1, 2, 3, 4, 9, 18, 22; 2, 3, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20; IV 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. 12. 5. Epod. 2, 16. Sat. I 1, 4, 6, 9. II 1, 6. Gelernt wurden: Od I 4, 9, 22; 10. IV 3, 5, 7. Grammatische Repetitionen, stilistische Winke, synonymische

Unterscheidungen. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit, auch gelegentliche mündlich Übersetzungen ins Lateinische. 7 St. Decker.

Griechisch. Platos Apologie und Kriton. Sophokles Aias. Homer Ilias I—V privatim IX. Aus Wilamowitz-Moellendorff: Thucydides, über Pausanias u Themistokles. Demosthenes, Stück aus der Kranzrede. Schriftliche Übungen u grammatische Repetitionen. Im S. Thimme I, im W. Schlockwerder.

Französisch. Corneille, Horace; Béranger, Ausgewählte Gedichte; Ségu Napoléon à Moscou et Passage de la Bérésina. Sprechübungen. Metrisches, Synonymische Etymologisches, Stilistisches. Repetition ausgewählter Abschnitte der Grammatik. 3 S Knaake.

Englisch. Vereinigt mit Oberprima.

Hebräisch. Vereinigt mit Oberprima.

Geschichte und Geographie. Geschichte des Mittelalters vom Tode des August bis zum westfälischen Frieden. Wiederholungen aus der Erdkunde. 3 St. Im S. Hert im W. Schlockwerder.

Mathematik. 1. Arithmetik: Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannt Gleichungen höherer Grade, welche sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lass insbesondere reciproke und eingekleidete Gleichungen; Exponential-Gleichungen. Ari metische und geometrische Reihen, Zinseszins- und Renten-Rechnung. 2. Planimetr Konstruktionsaufgaben, auch solche mit algebraischer Analysis. Metrische Beziehung am Dreieck. 3. Trigonometrie: Berechnung schiefwinkliger Dreiecke in zusammengesetz Aufgaben. 4. Stereometrie: Die gerade Linie und die Ebene, die körperliche Ec das Prisma, die Pyramide, der Cylinder, der Kegel und die Kugel. Alle 14 Tage e schriftliche Arbeit. 4 St. Gantzer.

Physik. Akustik. Mechanik. 2 St. Gantzer.

Obersekunda I (Ordinarius: Oberlehrer Dr. Schlockwerder).

Religionslehre. Die Apostelgeschichte. Ausgewählte Abschnitte aus r testamentlichen Briefen. Die Kirchengeschichte während der ersten drei Jahrhunde 2 St. Kratzenstein.

Deutsch. Ausgewählte Abschnitte aus dem Nibelungenlied, der Gudrun und Anzahl von Liedern Walthers von der Vogelweide im Urtext und Übersetzungen. Anschluß hieran Ausblicke auf die großen germanischen Sagenkreise, auf die höfis Epik (Inhalt des Parzival) und die höfische Lyrik. Übersicht über einige Ha erscheinungen der geschichtlichen Entwicklung der deutschen Sprache. Goethes Herr und Dorothea, Götz, Egmont. Schillers kulturhistorische Gedichte. Vorträge. Dispositi besprechungen. 3 St. Giseke.

Aufsätze: 1. Erleidet Maria Stuart schuldig oder unschuldig den Tod auf dem Scha 2. Züge altgermanischen Heldentums. 3. Die Treue der Gudrun. (Klassenaufsatz.) 4. Volker und H (ein Vergleich). 5. Alcibiades und Demosthenes (ein Vergleich). 6. Welche Umstände machen des Ody Ankunft in Ithaka besonders ergreifend? 7. Die beiden Bürger in Goethes Hermann und Dor (Klassenaufsatz.) 8. Der Tod der drei Hauptpersonen in Goethes Götz (ein Vergleich).

Lateinisch. Cic. pro Dejotaro und pro Ligario. Livius lib. XXIII u. X mit Auswahl. Das Ausgelassene wurde durch Erzählen ergänzt. Verg. Aeneis mit wahl nach einem Kanon aus lib. III—XII; Erzählen des Ausgelassenen. Privatlekt Sall. Cat. Alle 14 Tage eine schriftliche Übersetzung ins Lateinische als Klas oder Hausarbeit. Neben der Übersetzung in das Lateinische trat jedes Vierteljahr Übertragung in das Deutsche als Klassenarbeit ein. Stilistische und grammatische Wi holungen und Zusammenfassungen. 7 St. Schlockwerder.

Griechisch. Im Sommer: Xenophon Memorab. I, 1: 2, 1—28, 32—64; 3; 4; 1; Wilamowitz: Solon und Schlacht bei Salamis. Im Winter: Herodot VII in Aus- l. Im Sommer und Winter: Homer Odyssee IX, X, XIII, XIV, XVI, XVIII bis I mit Auslassungen. Das Übrige wurde durch Erzählen ergänzt. 5 St. — mmatik: Die Lehre von den Tempora und Modi, Nebensätze, Infinitiv, Participium. etitionen aus der Formenlehre. Alle 2 Wochen ein Extemporale oder eine Übersetzung. t. Bahr.

Französisch. Im Sommer: Augier-Sandeau, Le Gendre de monsieur Poirier. Im ıter: Thiers, Expédition d'Égypte. Grammatisches, Synonymisches, Stilistisches und chübungen im Anschluß an die Lektüre. Schriftliche Übersetzungen ins Deutsche, tate. 2 St. Peters.

Englisch (wahlfrei). Aussprache-Regeln. Einübung der Aussprache, vornehmlich h Vorsprechen und Nachsprechen. Die wichtigsten Redeteile nach Tendering, Lehr- ı der englischen Sprache. Lektüre nach demselben Buche. Mündliche und schriftliche rsetzungen und Diktate. Lese-, Schreib- und Sprechübungen. 2 St. Knaake.

Hebräisch (wahlfrei). Die Elemente, die Lehre vom Nomen und ein Teil der vachen Verba. Vokabeln, Übersetzen und schriftliche Übungen aus Kautzsch' Übungs- ı § 1—51. 2 St. Im S. Hildebrand, im W. Fittbogen.

Geschichte und Geographie. Griechische Geschichte bis zu den Diadochen. ıische Geschichte bis in den Anfang der Kaiserzeit. Wiederholungen aus der ıischen und politischen Erdkunde. 3 St. Giseke.

Mathematik. 1. Arithmetik: Quadratische Gleichungen, besonders eingekleidet, einer und zwei Unbekannten. 2. Planimetrie: Harmonische Punkte und Strahlen. ısversalen, Metrische Beziehungen am Dreieck. Wiederholung früherer Pensa durch reiche Konstruktionsaufgaben. 3. Trigonometrie: Goniometrie bis zu den Additions- remen einschließlich, Berechnung von Dreiecken, Parallelogrammen, Trapezen, regel- igen Vielecken. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. 4 St. Gantzer.

Physik. Magnetismus, Galvanismus, Wärmelehre. 2 St. Gantzer.

Obersekunda II (Ordinarius im Sommer: Prof. Dr. Thimme, im Winter: Oberlehrer Hildebrandt).

Religionslehre. 2 St. Ziegler.

Deutsch. Aufsätze: 1. Kriemhildens Traum. 2. Wie schildert uns Homer die Natur? Je diu liebe leide an dem ende gerne git", das Thema des Nibelungenliedes (Klassenaufsatz). ttmanns Gemälde „Feierabend". 5. Hêr Walther von der Vogelweide, Swer des vergaez', der taet mir 6. Welches Bild von den Zuständen und Hauptpersonen gewinnen wir aus dem ersten Akt von es „Götz"? 7. Die Einheit der Handlung in Goethes „Götz" (Klassenaufsatz). 8. *Πολλὰ τὰ δεινά, ν ἀνθρώπου δεινότερον πέλει.* 3 St. Weidel.

Lateinisch. 7 St. Im S. Thimme, im W. Hildebrandt.

Griechisch. 6 St. Decker.

Französisch. 3 St. Knaake.

Englisch. Vereint mit Obersekunda I. Knaake.

Hebräisch. Vereint mit Obersekunda I; im S. Kand. Hildebrand, im W. ogen.

Geschichte und Geographie. 3 St. Decker.

Mathematik. 4 St. Frantz.

Physik. 2 St. Frantz.

Untersekunda (Ordinarius: Prof. Dr. Giseke).

Religionslehre. Geschichte des Reiches Gottes im alten Testament in Anschlu an ausgewählte prophetische Stellen und Psalmen. Das Evangelium und die Persönlich keit Jesu, vornehmlich auf Grund der Gleichnisse und der Bergpredigt. Vertiefte Ein führung in den Katechismus und seine Gliederung. 2 St. Im W. Ziegler, im S Kratzenstein.

Deutsch. Schillers Jungfrau von Orleans, Lessings Minna von Barnhelm, Schille Maria Stuart. Praktische Anleitung zur Aufsatzbildung in Invention und Disposition i der Klasse. 3 St. Kratzenstein.

Aufsätze: 1. Anordnung und Verknüpfung der einzelnen Strophen in Schillers Glock 2. Metrische Übersetzung von Ovids Metamorphosen I, 89—150. 3. Inhalt des vierten Aktes in Schille Tell (Klassenaufsatz). 4. Tells Heimatland. 5. Die Freiheitskriege im Spiegel des deutschen Liede 6. Johanna als Kriegerin und Friedensstifterin (Klassenaufsatz). 7. Auf dem Bahnhof. 8. Soldat Friedrichs des Großen in Lessings Minna von Barnhelm.

Lateinisch. Grammatik 3 St. Wiederholung der gesamten Syntax nebst E gänzungen nach Müller. Alle 8 Tage ein Extemporale oder Exercitium im Anschluß a die Lektüre oder eine Übersetzung aus dem Lateinischen. Lektüre 4 St. Cicero imperio Cn. Pompei; Cicero in Catilinam I und IV; Livius Auswahl aus I und I privatim in Catilinam II. Aus Seyfferts Lesestücken: Ovid, Trist. I, 1. 3. IV, 1 Vergil aus Aeneis I und II. Auswendiglernen einiger Abschnitte. 7 St. Giseke.

Griechisch. Grammatik. 2 St. Syntax des Nomens (Artikel, Pronomen, Kasu lehre), sowie die notwendigsten Regeln der Moduslehre. Alle 8 Tage ein Extemporal bisweilen eine Übersetzung aus dem Griechischen oder eine freie Arbeit. Lektüre 4 S Xenophon Anabasis III und IV (bis 7). Auswahl aus dem Lesebuch von Wilamowit Moellendorff (Fabeln, Gnomen und Apophthegmen, aus Arrians Anabasis). Hom Odyssee I, V, VI, VII, VIII, 1—253. Auswendiglernen von 100 Versen. 6 S Hildebrandt.

Französisch. Grammatik: Rektion der Verba, Gebrauch der Zeiten und Mod Infinitiv, Participia, Gerundium, Pronomina, Vergleichungssätze, Negationen. — Lektür Brunnemann, Les Grandidier. Sprechübungen, Übersetzungen ins Französische. E weiterung des Wort- und Phrasenschatzes. Alle 3 Wochen eine schriftliche Arbe 3 St. Peters.

Geschichte und Geographie. Deutsche Geschichte vom Beginn der Regieru Friedrichs des Großen bis zur Gegenwart. Wiederholung der Erdkunde Europas. 3 S Giseke.

Mathematik. Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. Quadratisc Gleichungen mit einer Unbekannten. Proportionalität gerader Linien. Ähnlichkeit d Dreiecke; merkwürdige Linien im Dreieck. Proportionen am Kreise. Linien- u Flächenberechnung am Kreise. Konstruktionsaufgaben. 4 St. Frantz.

Physik. Im S. Die einfachsten chemischen Erscheinungen und Gesetze. Im W Einfachste Erscheinungen aus der Lehre vom Magnetismus und der Elektrizität. 2 S Frantz.

Obertertia I (Ordinarius: Im S. Prof. Dr. Hertel, im W. Oberl. Schröte

Religionslehre. Leben Jesu, nach dem Matthäus-Evangelium, unter besonde Berücksichtigung der Bergpredigt und der Gleichnisse. Luthers Leben. Geschichte d evangelischen Kirchenliedes. Erstes und zweites Hauptstück. Lektüre einiger Psalm 2 St. Im S. Weber, im W. Petri.

Deutsch. Beleuchtung von Analogie und Isolierung. Das Wichtigste aus der ortbildungslehre. Das Notwendigste aus Metrik und Poetik. Gelesen wurde: Heyses olberg, Uhlands Herzog Ernst von Schwaben, Körners Zriny, aus Hopf und Paulsiek sgewählte Gedichte und Prosastücke. Vortrag von Gedichten. Alle 4 Wochen ein ufsatz. 2 St. Im S. Weber, im W. Müller I.

Lateinisch. Caesar bell. gall. V, VI, VII; aus I die indirekten Reden. Auswahl s Ovids Metamorphosen (die Schöpfung, die vier Weltalter, Deucalion, Pyramus und isbe, Philemon und Baucis, Niobe). Wiederholung der Tempus- und Moduslehre und gänzung derselben nach der Grammatik von Müller; Wiederholung der Casuslehre. ersetzen aus dem Übungsbuch von Ostermann-Müller für Obertertia. Alle 8 Tage ein temporale, Exercitium oder schriftliche Übersetzung aus Caesar. 8 St. Im S. Hertel, W. Petri.

Griechisch. Xenophon anab. I und II in wöchentlich 3 St. Nach der Grammatik n Kaegi wurde gelernt und eingeübt, was §§ 80—96 über die Verba auf ω und §§ 97—111 er die Verba auf $\mu\iota$ enthalten. Alle 8 Tage im Anschluß an die Lektüre eine Klassenbeit. Grammatik im Sommer 3 St. Harth.

Französisch. Wiederholung der regelmäßigen Konjugation. Die unregelmäßigen rba. Gebrauch von avoir und être. — Ploetz-Kares, Sprachlehre und Übungsbuch. — rechübungen. Alle 3 Wochen eine schriftliche Arbeit. 2 St. Peters.

Geschichte und Geographie. Deutsche Geschichte vom Ausgang des Mittelers bis zum Regierungsantritt Friedrichs des Großen, insbesondere brandenburgisch-ußische. Wiederholung und Ergänzung der Landeskunde des Deutschen Reiches. rtenskizzen wie in IV. 3 St. Müller.

Mathematik. Planimetrie: Zwei Kreise; Flächengleichheit von Parallelogrammen, iecken, Polygonen. Im Anschluß daran Konstruktions-, Verwandlungs-, Teilungsgaben. Flächenberechnungen. Im Sommer: 2 St., im Winter: 1 St. — Arithmetik: ichungen 1. Grades mit 1 und 2 Unbekannten, Multipl. und Divis. von Potenzen mit zen Exponenten; Bruchrechnung mit unbestimmten Zahlen; Division mehrgliedriger ebraischer Ausdrücke. Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen und Dezimalbrüchen. portionen. Im Sommer: 1 St., im Winter: 2 St. Schröter.

Naturgeschichte. Im Sommer: Beschreibung des menschlichen Körperbaues. Im nter: Physik: Allgemeine Eigenschaften der Körper. Die einfachen Maschinen. Die htigsten Erscheinungen der Hydromechanik. Bestimmung des specif. Gewichtes fester flüssiger Körper. Barometer. Wasserpumpen, Feuerspritze, Heber, Grundzüge der rmelehre. 2 St. Schröter.

Zeichnen. Skizzen- und Schattierungsübungen nach Gefäßen, Gerätschaften, men, Pflanzenzweigen, Architekturteilen, Gipsabgüssen und Gegenständen des Naturalienmetts. Freiarm- und Tafelzeichnen. Übungen im Treffen von Farben und im Zeichnen dem Gedächtnis. 2 St. Müller II.

Obertertia II (Ordinarius: Oberlehrer Harth).

Religionslehre. 2 St. Im S. Weber, im W. Petri.
Deutsch. 2 St. Bahr.
Lateinisch. 8 St. Harth.
Griechisch. 6 St. Grußendorf.
Französisch. 2 St. Im S. Hertel, im W. Bahr.
Geschichte und Geographie. 3 St. Im S. Hertel, im W. Müller.

Mathematik. 3 St. Frantz.
Naturgeschichte. 2 St. Frantz.
Zeichnen. 2 St. Müller II.

Untertertia I (Ordinarius: Oberlehrer Peters).

Religionslehre. Geschichte Israels nach ausgewählten Abschnitten aus den schichtlichen Büchern des alten Testaments. Geographie von Palästina. Das christli Kirchenjahr und die gottesdienstlichen Ordnungen. 1. Artikel, 4. und 5. Hauptstü Psalmen und Kirchenlieder. 2 St. Kratzenstein.

Deutsch. Ergänzung der deutschen Konjugation und Deklination. 6 häusli Aufsätze, dazu 4 Klassenaufsätze. Erklärung der in der Klasse gelesenen prosaisch und poetischen Stücke Walther und Hildegunde, Nibelungen, Gudrun mit Auswahl, er Bekanntschaft mit Uhlands und Schillers Balladen. Gedichte gelernt und deklamie 2 St. Schlockwerder.

Lateinisch. Wiederholung und Ergänzung der Casuslehre. Hauptregeln Tempus- und Moduslehre nach Müllers Schulgrammatik. Mündliche und schriftliche Üb setzungen aus der Aufgabensammlung von Ostermann. Alle 8 Tage eine schriftli Arbeit (Extemporalien, Exercitien, Übersetzungen, freie Arbeiten). Caesar de bello Gall I—IV. Ovid. Metam. Cadmus. 8 St. Peters.

Griechisch. Formenlehre bis zu den Verbis liquidis und den Temporibus secun einschließlich. Einzelne syntaktische Regeln. Übersetzungen aus dem Elementarbuc Alle 8 Tage ein Extemporale oder Exercitium. 6 St. Harth.

Französisch. Fortsetzung der Lese- und Sprechübungen. Vokabellernen. Fo gesetzte Einübung der regelmäßigen Konjugation, besonders des Konjunktivs und fragenden und verneinenden Form in Verbindung mit Fürwörtern. Schriftliche und mündli Übersetzungen, Umformungen, Diktate. Ploetz-Kares, Elementarbuch (Ausgabe B). 2 St. Pet

Geschichte und Geographie. Kurzer Überblick über die römische Kais geschichte vom Tode des Augustus an; deutsche Geschichte bis zum Ausgang des Mit alters. In der Geographie: Länderkunde der außereuropäischen Erdteile. Die deutsc Kolonien; Vergleichung mit den Kolonialgebieten anderer Staaten. Kartenskizzen. 3 Schlockwerder.

Mathematik. Planimetrie: Lehrsätze und Aufgaben über das Parallelogramm Trapez. Linien und Winkel am Kreise. Dreieckskonstruktionen. Köstler, Leitfa Heft 1, §§ 74—121. 2 St. Arithmetik: Die 4 Grundrechnungsarten mit unbestimm und mit algebraischen bestimmten Zahlen. Multiplikation und Division mehrgliedri Ausdrücke. Einführung in die Lehre der Gleichungen 1. Grades mit 1 Unbekann 3 St. Schröter.

Naturgeschichte. Im Sommer: Besprechung der wichtigsten Pflanzenfami zur Ergänzung der Erkenntnisse in der Formenlehre. Systematik und Biologie. sprechung der wichtigen ausländischen Nutzpflanzen. Im Winter: Einiges aus Anatomie und Physiologie der Pflanzen, sowie über Kryptogamen und Pflanzenkra heiten, niedere Tiere nnd Überblick über das Tierreich, Grundbegriffe der Tiergeograp 2 St. Schröter.

Zeichnen. Die freie Perspektive in Verbindung mit Schattierungsübungen n geometrischen Körpern, Gebrauchsgegenständen und Teilen des Zeichensaales. Freia übungen und Tafelzeichnen. Farben-Treffübungen nach Gefäßen, Gerätschaften Pflanzenzweigen. Übungen im Skizzieren und im Zeichnen aus dem Gedächtnis. 2 Müller II.

Untertertia II (Ordinarius: Im S. Hildebrandt, im W. Dr. Weidel).

Religionslehre. 2 St. Im S. Thimme II, im W. Zander.
Deutsch. 2 St. Im S. Thimme II, im W. Zander.
Lateinisch. 8 St. Im S. Hildebrandt, im W. Weidel.
Griechisch. 6 St. Im S. Schlockwerder, im W. Ideler.
Französisch. 2 St. Im S. Thimme I, im W. Weidel.
Geschichte und Geographie. 3 St. Müller.
Mathematik. 3 St. Frantz.
Naturgeschichte. 2 St. Kohlrausch.
Zeichnen. 2 St. Müller II.

Quarta (Ordinarius: Dr. Müller).

Religionslehre. Einführung in die Bibel. Reihenfolge der biblischen Bücher. Apostel-chichte und einige Stellen aus den Paulusbriefen. 3. Hauptstück und 3. Artikel. rüche und Kirchenlieder. Patriarchengeschichten. Bilder aus der Kirchengeschichte. St. Weidel.

Deutsch. Leseübungen und Erlernen von Gedichten aus Hopf und Paulsiek. ungen im Nacherzählen. Der zusammengesetzte Satz. Starke und schwache Flexion. s Wichtigste aus der Wortbildungslehre. Alle 3 Wochen Aufsätze und Rechtschreib-ngen. 3 St. Hildebrandt.

Lateinisch. Wiederholung der Formenlehre, Grundregeln der Casuslehre, der ensätze und der Consecutio temporum. Übersetzungen aus dem Übungsbuch von ermann-Müller. 4 St. Cornelius Nepos: Miltiades, Themistocles, Pausanias, Aristides, minondas, Pelopidas, Hamilcar, Hannibal. Wöchentlich ein Extemporale oder Exer-um; dazu schriftliche Übersetzungen ins Deutsche. 4 St. Müller.

Französisch. Einübung einer richtigen Aussprache. Lese- und Sprechübungen. abellernen. Einprägung von avoir und être und der regelmäßigen Konjugation. chlechtswort, Hauptwort, Teilungssinn, Eigenschaftswort nebst Steigerungsformen, standswort, Fürwörter und Zahlwörter. Negation und Fragestellung. Diktate, formungen, Übersetzungen ins Französische. Wöchentlich eine Arbeit. 4 St. aake.

Geschichte und Geographie. Griechische und römische Geschichte. Kleine iftliche Übungen in der Klasse. 2 St. Im S. Schlockwerder, im W. Hildebrandt. außerdeutschen Länder Europas. Skizzen von Umrissen der Länder, vom Lauf der sse und von der Richtung der Gebirge. 2 St. Urban.

Mathematik und Rechnen. Lehre von den Geraden, Winkeln und Dreiecken. ung von Aufgaben. 2 St. Rechnen mit Dezimalbrüchen. Zinsrechnung, zusammen-tzte Regel-de-tri. Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben. 2 St. Schröter.

Naturbeschreibung. Vergleichende Beschreibung verwandter Arten und Gattungen Blütenpflanzen. Natürliches Pflanzensystem. Lebenserscheinungen. Beschreibung der ntigsten Repräsentanten der Gliedertiere. 2 St. Schröter.

Zeichnen. Umrißzeichnen nach gepreßten, natürlichen Laubblättern. Freie Pinsel-gen und Farben-Treffübungen nach Blättern, Fliesen, Schmetterlingen und Stoffmustern. armübungen und Tafelzeichnen. Übungen im Skizzieren und im Zeichnen aus dem ächtnis. 2 St. Müller.

Quinta (Ordinarius: Oberlehrer Grussendorf).

Religionslehre. Biblische Geschichten des Neuen Testaments nach Zahn. Ein prägung des 1. und 2. Glaubensartikels mit Luthers Erklärung. 4 Kirchenlieder. 2 S Im S. Hildebrand, im W. Fittbogen.

Deutsch. Leseübungen und Erlernen von Gedichten aus Hopf und Paulsie für V. Übungen im Wiedererzählen des Gelesenen. Erklärung des einfachen und de erweiterten Satzes, das Wichtigste aus der Lehre vom zusammengesetzten Satze und de Interpunktionslehre. Rechtschreibe- und Interpunktionsübungen in wöchentlichen Diktate in der Klasse, mehrere Klassenaufsätze. 2 St. Erzählungen aus der griechischen Sag 1 St. Grußendorf.

Lateinisch. Wiederholung der regelmäßigen Formenlehre, die Deponentia, di unregelmäßige Formenlehre mit Beschränkung auf das Notwendige. Accusativus cu infinitivo und Participialkonstruktionen. Übersetzen aus dem Übungsbuch von Osterman Wöchentlich eine Klassenarbeit. 8 St. Grußendorf.

Geographie. Physische und politische Geographie Deutschlands nach Seydlit 2 St. Im S. Thimme, im W. Weidel.

Rechnen. Teilbarkeit der Zahlen, Rechnen mit gemeinen Brüchen. Einfache Au gaben der Regel-de-tri durch Schluß auf die Einheit. 3 St. Zeichnen von einfache geometrischen Figuren mit Lineal und Zirkel. 1 St. Schröter.

Naturgeschichte. Vervollständigung der Kenntnis der äußeren Organe d Blütenpflanzen im Anschluß an die Beschreibung und Vergleichung verwandter, gleic zeitig vorliegender Arten. Übungen im einfachen schematischen Zeichnen. Beschreibun wichtiger Wirbeltiere nach vorhandenen Exemplaren und Abbildungen nebst Mitteilung über ihre Lebensweise, ihren Nutzen oder Schaden. Bail, Zoologie §§ 26—50. Grun züge des Knochenbaues beim Menschen. 2 St. Kohlrausch.

Schreiben. Übungen in deutscher und lateinischer Schrift nach Vorschriften a der Wandtafel. In den letzten Wochen Einübung des kleinen griechischen Alphabet 2 St. Kohlrausch.

Zeichnen. Darstellung flächenhafter Formen und Gegenstände im Umriß. Fre Pinselübungen und Tafelzeichnen. Übungen im Treffen von Farben, im Skizzieren und i Zeichnen aus dem Gedächtnis. 2 St. Müller.

Singen. Fortsetzung der Durtonleitern und Intervalle. Molltonleitern. Übung aus Zimmers Chorgesangschule. Choräle. 2 und 3stimmige Lieder. 2 St. Forchhamme

Sexta (Ordinarius: Im S. Oberlehrer Dr. Weidel, im W. Oberlehrer Ideler).

Religionslehre. Biblische Geschichten des alten Testaments nach Zahn; vor d Hauptfesten die betreffenden Geschichten des neuen Testaments. Erlernung des I. Haup stücks und des III. (dieses ohne Luthers Erklärung), Einprägung von 4 Kirchenliede und mehreren Bibelsprüchen. 3 St. Kratzenstein.

Deutsch. Der einfache Satz, Deklination und Konjugation, Unterscheidung d starken und schwachen Formen. Lesen von Gedichten und Prosastücken aus Hopf u Paulsiek für VI. Lernen von 9 Gedichten. Wöchentlich ein Diktat. 3 St. Lebensbild aus der vaterländischen Geschichte. 1 St. Im S. Weidel, im W. Ideler.

Lateinisch. Die regelmäßige Formenlehre mit Ausschluß der Verba auf io na der 3. Konjugation und der Deponentia, Übersetzen von Übungsstücken aus dem Übung buch von Ostermann-Müller für VI; dabei Ableitung einiger elementaren syntaktisch Regeln. Wöchentlich ein Extemporale. 8 St. Im S. Weidel, im W. Ideler.

Geographie. Elementare Grundbegriffe der physischen und mathematischen ographie in Anlehnung an die nächste örtliche Umgebung. Verständnis des Reliefs, Globus und der Karten. Allgemeine Länderkunde. 2 St. Im S. Weidel, im Ideler.

Rechnen. Die Grundrechnungsarten mit ganzen unbenannten und mehr- benannten Zahlen. Resolvieren und Reduzieren. Die deutschen Maße, Gewichte Münzen nebst Übungen in der dezimalen Schreibweise und den einfachsten imalen Rechnungen. Teilbarkeit der Zahlen. Vorbereitung der Bruchrechnung. 4 St. hlrausch.

Naturgeschichte. Im Sommer: Beschreibung vorliegender Blütenpflanzen. Im nter: Beschreibung wichtiger Säugetiere und Vögel. Übungen im einfachen und ematischen Zeichnen. 2 St. Kohlrausch.

Schreiben. Übungen in deutscher und lateinischer Schrift nach Vorschriften an Wandtafel. 2 St. Kohlrausch.

Singen. Die Elemente der allgemeinen Musiklehre: Noten, Taktarten. Übung Erkennen und Treffen der leichtesten Intervalle. Übungen nach den Busseschen Tabellen aus Zimmers Chorgesangschule. Lieder und Choräle. 2 St. Forchhammer.

Turnunterricht und technischer Unterricht.

Die Anstalt besuchten im Sommer im ganzen 390, im Winter 379 Schüler. Von en waren vom Turnunterricht befreit:

	vom Turnunterricht überhaupt	von einzelnen Übungen
Grund ärztlichen Zeugnisses	im S.: 41, im W.: 46.	im S.: 2, im W.: 2.
anderen Gründen	im S.: 25, im W.: 26.	im S.: —, im W.: —.
Zusammen	im S.: 66, im W.: 72.	im S.: 2, im W.: 2.

von der Gesamtheit der Schüler im Sommer: 16,9 %, im Winter: 18,9 %.

Es bestanden bei 12 getrennt zu unterrichtenden Klassen 8 Turnabteilungen; zur sten gehörten 29 (IIA), zur größten 45 (IV) Schüler.

Für den Turnunterricht waren wöchentlich insgesamt 24 Stunden angesetzt. Ihn lten die Herren Lehrer Kohlrausch in den beiden obersten Abteilungen (I und IIA) in der 6. (IV), in der 3. und 4. (IIB und IIIA) Turnlehrer Hänsgen, in der 5. (IIIB) lehrer Arthur Müller, in der 7. (V) Oberlehrer Großendorf, in der 8. (VI) Oberlehrer Müller, wie auch aus den vorstehenden Tabellen entnommen werden kann. Vom lehrer Kohlrausch ist ein ausführlicher Lehrplan für den Turnunterricht aus- beitet worden.

Freischwimmer sind in VI 6, in V 9, in IV 23, in IIIB 32, in IIIA 33, in 32, in IIA 35, in IB 26, in IA 30, das sind zusammen 226. Da die Gesamtzahl Schüler 379 beträgt, so ergibt dies 59,6 % Freischwimmer.

Am fakultativen Zeichenunterricht beteiligten sich im Sommerhalbjahre 16, im erhalbjahre 7 Schüler.

Zusammenstellung der eingeführten Lehrbücher.

In allen Klassen: Neues Testament in Luthers Übersetzung, für die Alumne das evangelische Gesangbuch für die Provinz Sachsen, Müller, lateinische Schulgrammatik (zu Ostermanns Übungsbüchern), Ausgabe A, Schulatlas von Andree-Lehmann, 48. Auf Von Tertia aufwärts: Kägi, kurzgefaßte griechische Schulgrammatik. Von Oberterti an: Plötz-Kares, franz. Sprachlehre.

Sexta: 1) Zahn-Giebe, biblische Geschichte. 2) Hopf und Paulsiek, deutsche Lesebuch, Teil I, Abteilung I, neu bearbeitet von Muff. 3) Willmanns, deutsche Schul grammatik, Teil I, bearbeitet von Poppelreuter. 4) Ostermann-Müller, lateinisches Übungs buch, Teil I. 5) Harms und Kallius, Rechenbuch. 6) Bail, neuer methodischer Leitfade Botanik. 7) Derselbe, Zoologie. 8) Zimmer, Liederschatz, Heft II.

Quinta: 9) Hopf und Paulsiek, deutsches Lesebuch, Teil I, Abteilung 2, bea beitet von Muff. 10) Ostermann-Müller, lateinisches Übungsbuch, Teil II. 11) von Seydlitz Schulgeographie, Ausgabe D. Heft für Quinta. 12) Zimmer, Liederschatz, Heft II Außerdem 1. 3. 5. 6. 7.

Quarta: 13) Schäfer-Krebs, biblisches Lesebuch. Altes Testament. Ausgabe I 14) Hopf und Paulsiek, deutsches Lesebuch, Teil I, Abteilung 3, bearbeitet von Mu 15) Cornelius Nepos. 16) Ostermann-Müller, lateinisches Übungsbuch, Teil II 17) Köstler, Leitfaden der ebenen Geometrie, Heft I. 18) Neubauer, Geschichte d Altertums für IV. 19) von Seydlitz, Schulgeographie, Ausgabe D., Heft für Quart 20) Gustav Plötz, französisches Elementarbuch, Ausgabe B. Außerdem 5. 6. 7. 12.

Untertertia: 21) Muff, deutsches Lesebuch, Teil IV. 22) Caesar de bello Gallic 23) Ostermann-Müller, lateinisches Übungsbuch, Teil IV. 24) Kägi, griechisches Übung buch I. 25) von Seydlitz, Schulgeographie, Ausgabe D. Heft für Untertertia. 26) Reid Aufgaben zur Arithmetik und Algebra. 27) Neubauer, deutsche Geschichte für d mittleren Klassen. Außerdem 6. 7. 17. 20.

Obertertia: 28) Ovid Metamorphosen, Auswahl von Siebelis I und II (I auc schon in IIIb). 29) Xenophons Anabasis. 30) Gust. Plötz, französ. Übungsbuch, (Au gabe B. 31) von Seydlitz, Schulgeographie, Ausgabe D. Heft für Obertertia. 32) Köstle Leitfaden der ebenen Geometrie, Heft 2. 33) Koppe, Physik, Teil I. 34) Muff, deutsch Lesebuch, Teil V. Außerdem 7. 20. 22. 23. 26. 27.

Untersekunda: 35) Seyffert, Lesestücke aus griechischen und lateinisch Dichtern. 36) Muff, deutsches Lesebuch, Teil VI. 37) Vergils Aeneis. 38) Home Odyssee. 39) von Wilamowitz-Moellendorff, griechisches Lesebuch, 1. Halbban 40) Schlömilch, fünfstellige Logarithmentafeln. (Wohlfeile Ausgabe.) 41) Köstler, Lei faden der ebenen Geometrie, Heft 3. 42) Lieber-Lühmann-Müsebeck, Elementarmath. Außerdem 26. 27. 29. 33.

Obersekunda: 43) Kluge, deutsche Nationalliteratur, 24. Auflage. 44) Oste mann-Müller, lateinisches Übungsbuch, Teil V. 45) Reidt, Elemente der Mathemati Teil I, Arithmetik und Algebra. 46) Koppe, Physik, Teil II. 47) Neubauer, Geschich des Altertums für IIa. 48) Atlas antiquus. 49) Novum Testamentum Graece (Württem Bibelgesellsch.). 50) Kautzsch, hebräische Grammatik, Auszug für Schulen. 51) Kautzsc Übungsbuch zur hebräischen Grammatik. 52) Tendering, Lehrbuch der englischen Sprac Außerdem 26. 35. 36. 37. 38. 39. 40.

Prima: 53) Horatius. 54) Homer Ilias. 55) Plato Apologie und Krit 56) von Wilamowitz-Moellendorff, griechisches Lesebuch, 2. Halbband. 57) Sophok Antigone. 58) Fauth, Handbuch der evang. Religionslehre, Heft 3 und 4. 59) Rei Teil III, Stereometrie, 7. Auflage. 60) Neubauer, deutsche Geschichte für Ib und I 61) Historischer Atlas. Außerdem 35. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50.

II. Verfügungen der vorgesetzten Behörden.

n 19. Januar 1903. Das Buch Beier, „Die Berufsbildung nach den Berechtigungen der höheren Lehranstalten in Preußen“ (Halle, Waisenhaus) wird empfohlen.

n 9. März. Wiese, „Das höhere Schulwesen in Preußen“, Band 4, herausgg. von Irmer, wird als Geschenk des Herrn Ministers der Bibliothek überwiesen.

n 17. März. Nach einem Ministerial-Erlaß wird der von hier ausgegangene Antrag genehmigt, 9 Turnstunden durch Turnlehrer der Stadt erteilen zu lassen.

n 21. März. Ein kunstgeschichtlicher Ferienkursus für Gymnasiallehrer soll vom 14. bis 18. April in Dresden stattfinden.

n 26. März. Prof. Ziegler erhält unter dem 9. März den Rang der Räte 4. Kl.

n 7. April. Ein archäologischer Ferienkursus findet vom 2. bis 10. Juni in Trier statt.

n 8. April. Lehrer Hänsgen übernimmt von Ostern an 6 Turnstunden.

n 8. April. Die Konferenz der Direktoren der Provinz Sachsen findet vom 3. bis 5. Juni in Erfurt statt.

n 18. April. Englischer Ferienkursus vom 3. bis 15. August in Göttingen. (Oberlehrer Großendorf nimmt teil.)

n 20. April. Der Herr Minister gewährt aus Zentralfonds 2000 Mark (zahlbar in den Jahren 1903 und 1904) zur Herstellung einer steinernen Orgelempore in der Klosterkirche.

n 28. April. Der Lehrer Arthur Müller übernimmt 3 wöchentliche Turnstunden am Kloster.

n 4. Mai. Geographentag in Köln vom 2. bis 4. Juni, mit Ausflügen vom 5. bis 7. Juni.

n 5. Mai. In Breslau tagt vom 1. bis 5. Juni die Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und Naturwissenschaft.

n 23. Mai. Französischer Fortbildungskursus in Frankfurt a. M. vom 12. bis 24. Oktober.

n 10. Juni. „Sämundar Edda“ ed. Detter und Heinzel wird vom Herrn Minister der Bibliothek überwiesen.

16. Juni. 4 Exemplare der „Urkunde über die Einweihung der Erlöserkirche in Jerusalem“ werden der Anstalt überwiesen. (Die Primaner Strube, Giseke, Hille, Ulrich erhalten je ein Exemplar.)

24. Juni. Schulze, „Die römischen Grenzanlagen in Deutschland und das Limeskastell Saalburg“ (Gütersloh, Bertelsmann) wird empfohlen.

26. Juli. Naturwissenschaftlicher Ferienkursus in Berlin vom 6. bis 17. Oktober.

27. Juli. Betrifft das v. Münchhausensche Stipendium. Dasselbe gebührt in der Regel einem Klosterschüler; in den Jahren, wo das Königliche Provinzial-Schul-Kollegium darüber bestimmt, soll es nicht mehr geteilt, sondern ganz entweder einem Schüler des Domgymnasiums oder des Klosters gewährt werden.

4. August. Kromayer, „Antike Schlachtfelder“ wird empfohlen.

28. August. Oberlehrer Dr. Weidel übernimmt im Konvikt die Leitung der altdeutschen, Oberlehrer Kratzenstein dafür die der neudeutschen Sitzung.

3. September. Dem Propst wird der Charakter als Geheimer Regierungsrat erteilt.

7. September. Weitere Bestimmungen über Doppelschreibungen nach dem neuen deutschen Wörterverzeichnis sind erschienen bei Weidmann (Preis 10 Pf.).

26. September. 2 Exemplare der Verhandlungen der sächsischen Direktorenkonferenz werden übersandt, davon wird eins der Bibliothek einverleibt.

Vom 7. November. 3 Neujahrsblätter der historischen Kommission gehen der Anstalt davon erhalten zwei Exemplare die Primaner Hille und Lübeck, eins die Biblioth

Vom 17. November. Nicht versetzte Obersekundaner dürfen nach ihrem Abgange frühest am Schluß des nächsten Halbjahres zur Reifeprüfung für Prima zugelassen werd

Vom 27. November. Auf Antrag von hier sollen im nächsten Etatsentwurf die Aufnahr gebühren von 9 auf 6 Mark herabgesetzt werden.

Vom 16. Dezember. Vom 1. Januar 1904 an soll Professor Giseke die Verwaltung Hauptbibliothek, Professor Bahr die der Schülerbibliothek übernehmen.

Vom 16. Dezember. Ferienordnung. Osterferien: Sonnabend, 26. März 1904 bis Dienst 12. April. Pfingstferien: Freitag, 20. Mai bis Donnerstag, 26. Mai. Sommerferi Sonnabend, 2. Juli bis Dienstag, 2. August. Michaelisferien: Sonnabend, 1. Okto bis Dienstag, 18. Oktober. Weihnachtsferien: Mittwoch, 21. Dezember 1904 Donnerstag, 5. Januar 1905, wobei das erste Datum den Schulschluß, das zwe den Schulanfang bedeutet.

Vom 30. Dezember. Auf Allerhöchsten Befehl gehen der Anstalt 2 Exemplare „Wislicen Deutschlands Seemacht“ und 1 Exemplar „Bohrdt, deutsche Schiffahrt in Wort u Bild“ als Prämien für Klosterschüler zu. Diese Bücher erhielten der Unterprima Martin Brennecke, der Obersekundaner Paul Gieseke und der Obertertianer Walt Hornmann.

Vom 12. Januar 1904. Ein archäologischer Ferienkursus soll in Berlin vom 7. 14. April stattfinden.

Vom 10. Februar. Betrifft Anschaffung neuer Tisch- und Mundtücher für das Alum

Vom 12. Februar. Betrifft Maßregeln, um die alten gefährdeten Bauteile im Kreuzg durch Überzug mit wasserdichter Schicht aufs neue zu schützen.

Vom 22. Februar. Nach einem Erlaß vom 8. Februar weist der Herr Minister die ers tausend Mark für die steinerne Orgelempore in der Klosterkirche aus Staatsmitt an (vergl. oben unter 20. April).

III. Chronik.

Das zu Ende gehende Schuljahr brachte im Lehrerkollegium Veränderungen, z Teil schmerzlichster Art.

Zu Michaelis 1903 schied aus unserer Mitte Herr Professor Dr. Thimme, eine gleiche Stellung am Gymnasium zu Erfurt zu übernehmen. Schon seit Jahren seh er sich von hier fort, weil er in unserem Magdeburg Berg und Wald, Dinge, an die von jung auf gewöhnt war, nicht haben konnte. Er hat sich um unser Pädagogi an dem er seit dem 1. Juli 1890 tätig war, wohlverdient gemacht, indem er durch se freundliche und frische, anregende Art seine Schüler zu fördern verstand, und sich i Zuneigung und Anhänglichkeit in besonderem Grade erwarb.

An seine Stelle trat durch Tausch Herr Oberlehrer Rudolf Ideler. Derse wurde am 26. Oktober 1873 in Ermsleben geboren, besuchte die lateinische Hauptsch in Halle, bestand dort Michaelis 1891 die Reifeprüfung und studierte in Halle Philolo Die Prüfung für das höhere Lehramt legte er am 22. Oktober 1898 ab; von Ostern 1 war er Seminarkandidat an der Oberrealschule und am Wilhelms-Gymnasium in Magdeb von Ostern 1900 bis 1901 Probekandidat am Gymnasium zu Erfurt. Dort war er d wissenschaftlicher Hülfslehrer und seit 1. April 1903 Oberlehrer und kam Michaelis 1 in gleicher Eigenschaft zu uns.

Am Abend des 24. November 1903 wurde Herr Professor Dr. Gustav Hertel ach langen und schweren Leiden im fast vollendeten 56. Lebensjahre aus dieser Zeitchkeit abgerufen. Unsere Anstalt verliert in ihm einen hochverdienten, bewährten ehrer, dem unsere Jugend ein dankbares Andenken bewahren wird. Ausgerüstet mit nem Schatz gediegener Kenntnisse, widmete er seine wissenschaftliche Kraft vornehmlich r Geschichte unserer Provinz und der engeren Heimat. Auf diesem Gebiet war er ein folgreicher Forscher, wie es seine zahlreichen Veröffentlichungen bekunden, und eine erkannte Autorität. Eine wunderbare Gewandtheit in der Lesung mittelalterlicher exte war ihm bei diesen Studien förderlich, aber geleitet war doch seine Arbeit von der iebe zum großen deutschen Vaterland, für das er die Waffen in den Kriegsjahren 870/71 getragen hat: eine Erinnerung, die ihm immer aufs neue zu patriotischer rhebung diente. Uns, seinen Kollegen, hat er sich durch sein wahrhaftes, offenes esen, durch seinen geraden Charakter sowie durch die Treue seiner Gesinnung und ine niemals wankende Zuverlässigkeit lieb und wert gemacht. Er schied im kräftigen annesalter, ohne alle seine Pläne und Entwürfe zur Vollendung zu bringen, aus unserer itte zu unserer aufrichtigen Trauer und Betrübnis. Am 28. November gaben ihm seine mtsgenossen und viele seiner Schüler das letzte Geleit, in der Begräbniskapelle des estfriedhofs sang der Schülerchor ein Trauerlied, und von da bis zum Grabe geleitete ch der Kriegerverein den ehemaligen Kriegskameraden und erwies ihm die militärischen ren. — Seine Vertretung war schon seit Michaelis durch anderweitige Stundenverteilung ter Beteiligung des Konviktskandidaten Herrn Petri geordnet, wie oben in der Übersichtstabelle angegeben ist.

Da der Turnunterricht nicht mehr in der früheren Weise bestritten werden konnte d das Lehrerkollegium, dem bekanntlich auch eine zeitraubende Sorge für das Alumnat liegt, seit einigen Jahren überlastet erschien, so wurden zwei hiesige Lehrer Herr ugust Hänsgen und Herr Arthur Müller zur Übernahme von je 6 und 3 wöchentchen Turnstunden im Nebenamt mit Genehmigung der beteiligten Behörden gewonnen.

Herr Professor Ziegler erkrankte am 4. Juni und wurde in seinen Religionsunden in Untersekunda, Obersekunda 2 und Unterprima von den Konviktskandidaten nder, Fittbogen und Hildebrand, in Oberprima vom Propst vertreten. Für den onat August erhielt er zu seiner weiteren Wiederherstellung Urlaub und wurde in dieser it wie früher von den obengenannten Kandidaten und statt des Propstes, der seinerseits nen Teil des Unterrichts für den zu einem sogenannten Ferienkursus (4.—13. August) urlaubten Oberlehrer Grußendorf übernahm, von Herrn Oberlehrer Kratzenstein rtreten. Von seinem Leiden einigermaßen wiederhergestellt, übernahm er anfangs ptember nur erst die 2 Religionsstunden in Oberprima und die gesamte Arbeit im nvikt. Am 22. Juni predigte für ihn in der Klosterkirche Herr Konsistorialrat ttebohm, der auch das heilige Abendmahl austeilte, und am 16. und 30. August rr Konsistorialrat Siegmund-Schultze. Die volle Arbeit übernahm der Genannte t Beginn des Winterhalbjahres.

Herr Oberlehrer Dr. Müller war vom 17. bis 20. Juni durch Teilnahme am hwurgericht behindert. Herr Oberlehrer Peters mußte gegen Schluß des Schuljahres höffe sein.

Der Gesundheitszustand unter den Schülern war, einige langwierige Krankheiten gerechnet, recht befriedigend; einen Todesfall hatten wir nicht zu beklagen.

Die Schulfeste wurden in gewohnter Weise gefeiert; doch mußte der sogenannte osterball ausfallen. Es war nämlich am 23. November 1903 Herr Küchenmeister Koch storben, der sein für das Wohl der Alumnen wichtiges Amt fast 20 Jahre lang in erkennenswerter Weise geführt hatte. Unter solchen Umständen konnte es den uernden Hinterbliebenen nicht zugemutet werden, ein fröhliches Fest für eine große rsammlung auszurichten.

Bei der Vorfeier des Geburtstages Seiner Majestät hielt Herr Oberlehre Grußendorf die Festrede über den Freiherrn von Stein, die patriotischen Gesänge wurde von Herrn Musikdirektor Forchhammer geleitet.

Die Erbauung einer Orgelempore und einer Orgel in der Klosterkirche ist nun i nahe Zukunft gerückt, da die Mittel annähernd vorhanden sind. Seine Excellenz de Herr Minister hat aus Staatsmitteln für die steinerne Empore 2000 Mark bewilligt, un neuerdings hat im Andenken an die Schulzeit seines Sohnes Herr Dr. phil. Han Bennewitz 300 Mark „als Baustein“ für den gedachten Zweck gespendet.

Das Alumnat des Klosters wird in wenigen Monaten mit 72 neuen Schränke für die Alumnen ausgerüstet sein, die mit einem Aufwand von 4440 Mark beschaf wurden.

Seit Michaelis sind sämtliche Klassen der Anstalt mit Gasbeleuchtung versehe während dies vorher nur für diejenigen Klassen, in denen Nachmittagsunterricht ertei wird, vorgesehen war. Die neue Einrichtung hatte sich für die Morgenstunden vo 8—9 Uhr während der dunkelsten Monate Dezember und Januar seit Einführung de mitteleuropäischen Zeit immer notwendiger gemacht.

In den beiden Abiturienten-Prüfungen am 29. September 1903 und 15. un 16. Februar 1904, die unter dem Vorsitz des Herrn Oberregierungsrats Trosien stat fanden, erwarben sich 2 und 21 Oberprimaner, deren Namen in einer besonderen Tabel verzeichnet stehen, das Zeugnis der Reife.

Kandidaten-Konvikt.

Nach dem Weggang des Prof. Dr. Thimme übernahm Oberlehrer Kratzenstei die Leitung der Sitzung für neuere deutsche Literatur, und an seine Stelle trat Oberlehr Dr. Weidel, um den sprachlich-grammatischen germanistischen Übungen vorzustehe Ihre Arbeit mit den Kandidaten setzten wie früher fort: Geh. u. Ober-Regierungsr Trosien, der Propst, die Professoren Dr. Decker und Dr. Bahr und der geistlic Inspektor.

Im Sommer-Halbjahr waren Mitglieder des Konvikts: Dr. Thimme, Webe Hildebrand, Fittbogen, Zander und Petri. Für die drei ersten, die zum 1. Oktob ausschieden, traten neu ein: Schröder, Krüger und Melchert.

Über die unterrichtliche Tätigkeit der älteren Kandidaten — Petri wurde Vertretung des erkrankten und dann verstorbenen Prof. Dr. Hertel mit einer größer Zahl von Stunden betraut — gibt die Tabelle der „Verteilung der Stunden unter d Lehrer“ Auskunft.

IV. Statistische Mitteilungen.

A. Frequenztabelle für das Schuljahr 1903/1904.

	O I	U I	O II$_1$	O II$_2$	U II	O III$_1$	O III$_2$	U III$_1$	U III$_2$	IV	V	VI	Summa
Bestand am 1. Februar 1903	23	35	17	18	39	25	23	26	26	52	43	43	370
Abgang bis zum Schluß des Schuljahres	21	2	1	2	4	—	1	4	1	3	2	2	43
Zugang durch Versetzung zu Ostern	32	27	19	15	41	23	20	21	20	41	40	—	299
Zugang durch Aufnahme zu Ostern	—	—	—	—	—	—	1	4	5	4	4	41	59
Frequenz am Anfang d. Schuljahres 1903/1904	34	28	20	19	42	25	24	28	27	53	44	42	386
Zugang im Sommersemester	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	2	1	4
Abgang im Sommersemester	3	—	1	—	3	1	2	—	—	—	2	2	14
Zugang durch Versetzung zu Michaelis	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Zugang durch Aufnahme zu Michaelis	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1	1	3
Frequenz im Anfang des Wintersemesters	31	28	19	19	39	24	22	28	29	53	45	42	379
Zugang im Wintersemester	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	2
Abgang im Wintersemester	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1	—	—	2
Frequenz am 1. Februar 1904	31	28	19	19	39	23	22	28	29	53	46	42	379
Durchschnittsalter am 1. Februar 1904	18,3	17,8	16,7	16,9	16,1	14,7	15,1	13,9	13,8	12,6	11,6	10,4	

B. Religions- und Heimatverhältnisse der Schüler.

	Evang.	Kath.	Diss.	Juden.	Einheim.	Ausw.	Ausl.
Am Anfang des Sommersemesters	385	—	—	1	222	161	3
Am Anfang des Wintersemesters	378	—	—	1	217	159	3
Am 1. Februar 1903	378	—	—	1	217	159	3

Das Zeugnis für den einjährigen Militärdienst haben zu Ostern 1903 erhalten: 37, Michaelis — Untersekundaner. Davon zu einem praktischen Lebensberuf abgegangen: Ostern 1, Michaelis —.

C. Übersicht über die Abiturienten.

Namen.	Geburtstag.	Geburtsort.	Konf.	Stand u. Wohnort des Vaters.	Auf der Schule Jahre.	in I	in Ia	Be
a) Michaelis 1903.								
1. Ludwig Karl Dietrich **Giseke**	3. Dezbr. 1884	Magdeburg	ev.	Professor am Kloster	$9^1/_2$ seit Sexta	$2^1/_2$	$1^1/_2$	Theo
2. *Max Richard **Strube**	15. Mai 1884	Hötensleben	„	prakt. Arzt Dr. med. in Hötensleben	$6^1/_2$ seit Untertertia	$2^1/_2$	$1^1/_2$	Re
b) Ostern 1904.								
1. Heinrich Otto **Hille**	12. Novbr. 1885	Magdeburg	ev.	Kgl. Lokomotivführer hier	9 seit Sexta	2	1	Philo
2. Leopold Alexander **Lübeck**	1. Juni 1885	Lauban	„	Apotheker hier	9 seit Sexta	2	1	Philo
3. *Georg Martin **Mehlhose**	28. April 1886	Calbe a. d. S.	„	† Landwirt in Calbe	7 seit Quarta	2	1	Philo
4. August Adolf Anton Georg Wilhelm **Kessler**	6. Septbr. 1885	Arnsberg i. Westf.	„	Kgl. Polizeipräsident hier	7 seit Quarta	2	1	Me
5. Paul Theodor **Sendler**	24. Septbr. 1886	Magdeburg	„	Sanitätsrat Dr. med. hier	9 seit Sexta	2	1	Phil
6. *Moritz **Matthies**	9. August 1885	Gübs bei Magdeburg	„	† Lehrer in Gübs	9 seit Sexta	2	1	Ch
7. *Johannes Friedrich **Schwahn**	28. März 1885	Egeln	„	Superintendent in Egeln	$5^1/_2$ seit Untertertia	2	1	Phil
8. Wilhelm Erich **Senff**	21. Juli 1886	Calbe a. d. M.	„	Apothekenbesitzer in Calbe a. d. M.	7 seit Quarta	2	1	Re
9. Richard Bruno Edgard **Wellmann**	25. Juli 1885	Magdeburg	„	Reichsbank-Oberbuchhalter hier	10 seit Sexta	2	1	Re
10. Johannes Adolf **Moeller**	20. Novbr. 1884	„	„	Sanitätsrat Oberarzt Dr. med. hier	10 seit Sexta	2	1	Re
11. Gustav David Kurt **Bennewitz**	2. Januar 1886	„	„	Kaufmann Dr. phil. hier	9 seit Sexta	2	1	Natu scl
12. Gustav Kurt **Ebert**	18. Juni 1884	„	„	Eisenbahnsekretär hier	9 seit Sexta	2	1	Re
13. Franz **Favreau**	6 Septbr. 1884	„	„	Direktor d. Bau- u. Kreditbank hier	10 seit Sexta	2	1	Re
14. Heinrich **Martin**	1. Januar 1885	„	„	Dr. med. prakt. Arzt hier	10 seit Sexta	2	1	Kau
15. Christoph Gustav Johannes **Brennecke**	31. Januar 1885	„	„	Sanitätsrat Dr. med. hier	10 seit Sexta	2	1	Me
16. Paul Reinhard **Moeller**	5. Februar 1886	„	„	Sanitätsrat Oberarzt Dr. med. hier	9 seit Sexta	2	1	The
17. Karl Ernst Rudolf Hermann **Schneider**	2. März 1885	Halle a. d. S.	„	Oberbürgermeister hier	9 seit Quinta	2	1	Sc
18. Werner Achim Ferdinand **Stern**	28. Januar 1886	Magdeburg	„	Justizrat Dr. jur. hier	9 seit Sexta	2	1	Na ök
19. *Hermann Richard **Graf**	27. März 1885	Calbe a. d. S.	„	Konditor in Cöthen i. Anh.	6 seit Untertertia	2	1	Th
20. Erich **Kirchner**	7. Februar 1884	Magdeburg	„	† Kaufmann hier	9 seit Sexta	2	1	The ori
21. *Albrecht Hermann Werner **Lotze**	7. Septbr. 1883	Greiz (Reuss ä. L.)	„	† Dr. med. in Göttingen	8 seit Untertertia	2	1	Ri

Die mit * Bezeichneten sind Alumnen.

V. Sammlungen von Lehrmitteln.

a) Erwerbungen für die Hauptbibliothek.

Geschenkt vom Herrn Minister: Wiese, Das höhere Schulwesen in Preußen. . 4. — Detter und Heinzel, Saemundar Edda. — Jahrbuch für Volks- und Jugend-ele, 1903. — Vom Kgl. Schulkollegium: Verhandlungen der Direktorenversammlung. . 64. — Von Freifrau von Dörnberg: Konservative Monatsschrift. Bd. 1—46. — Vom rrn Verfasser: Kindermann, Volkswirtschaft und Kunst.

Angekauft: 1. Die in den früheren Programmen aufgeführten Zeitschriften und eferungswerke wurden fortgesetzt.

2. Neue Erwerbungen: Muther, Geschichte der englischen Malerei. — Muther, n Jahrhundert französischer Malerei. — Wahnschaffe, Die Ursachen der Oberflächen-staltung des Norddeutschen Flachlandes. — Gomperz, Griechische Denker. — Diels, e Fragmente der Vorsokratiker. — Kuno Fischer, Goethes Faust. — Pascal, Les ovinciales. — Dreydorf, Pascal, sein Leben und seine Kämpfe. — Timotheus, Die rser, ed. Wilamowitz-Moellendorff. — Winkelmann, Allgemeine Verfassungsgeschichte. — ste, Prokops Gothenkrieg. — Heyne, Körperpflege und Kleidung bei den Deutschen. — abonis Geographica ed. Meinecke. — Lamprecht, Zur jüngsten Deutschen Vergangenheit. — nst, Lessings Leben und Werke. — Prutz, Preußische Geschichte. — Hoppe, Syntax l Stil des Tertullian. — Koser, Friedrich der Große. — Wagner, Lehrbuch der Geo-phie. — Bugge, die Hauptparabeln Jesu. — Kuhnemann, Die Kantischen Studien illers. — Husch, Ausbreitung und Verfall der Romantik. — Schulze, Ernst, Die nischen Grenzanlagen und das Limeskastell Saalburg. — Kromayer, Antike Schlacht-ler in Griechenland. — Pausanias ed. Hitzig und Blümner. — Müller und Pouillet, rbuch der Physik. — Dietrich, Die Bruchstücke der Skeireins. — Windelband, Lehr-h der Geschichte der Philosophie. — Helmolt, Weltgeschichte. 8. Bd. — Lamprecht, ntsche Geschichte. 2. Ergänzungsb., 2. Hälfte. — Harnack, Reden und Aufsätze. — rgy, Die Tragödien Friedrich Hebbels nach ihrem Ideengehalt. — Lipps, Grundlegung der hetik. — Börinski, Die Poetik der Renaissance. — Witkowski, Martin Opitzens starchus sive de contemptu linguae Teutonicae. — Bousset, Das Wesen der Religion. — blevius, Die bedeutendsten deutschen Romane des 17. Jahrhunderts. — Smend, Lehrbuch alttestamentlichen Religionsgeschichte. — Lehmann, Freiherr von Stein. — Hauck, chengeschichte Deutschlands. T. 4. — Hohenzollern-Jahrbuch. T. 4. — Isocratis tiones ed. Benseler-Blaß. — Xenophontis Memorabilia recogn. Gilbert. — Tollin, chichte der französischen Kolonie in Magdeburg.

b) Für die Schülerbibliothek.

Die Buren und der Südafrikanische Krieg von J. Kürschner. III D 101c. — Hebbel, Sämtliche Werke. II C 509g. — Die französische Armee in ihrer gegen-tigen Uniformierung. IX 24. — Allerhand Sprachdummheiten von G. Wustmann. 24. — Gymnasial-Bibliothek von H. Hoffmann. — Die römischen Grenzanlagen in tschland und das Limeskastell Saalburg von Dr. E. Schulze. — Die Akropolis von en im Zeitalter des Perikles von Prof. Dr. S. Hachtmann. I A 23. — Hans von nen, des Kronprinzen Kadett von C. Tanera. II C 400. — Fritz Ohlsen, Kaiser helms Unteroffizier von O. von Bruneck. II C 401. — Der schweizerische Robinson J. D. Wyß, bearbeitet von J. Bonnet. II C 295d. — Dr. Martin Luthers Leben F. Fauth. III E 160b. — Deutsche Prosa. I. Teil: Rednerische Prosa. Aus-ählt von Prof. Dr. J. Wychgram. II. Teil: Patriotische Prosa. Ausgewählt von f. Dr. H. Windel. III., IV. u. V. Teil: Moderne erzählende Prosa von Dr. G. Porger. C 498. — Shakespeares dramatische Werke. Übersetzt von A. W. von Schlegel.

II C 537b. — Goethes sämtliche Werke. II C 79a. — Die Sandgräfin, Roman G. Frenßen. II C 410f. — Marie Helene von Kügelgen geb. Zöge von Manteuffel. Lebensbild in Briefen. Herausgegeben von A. u. E. von Kügelgen. III E T 2d. — Horn von Wanza. Eine Erzählung von W. Raabe. II C 418 i z. — Villa Schön von demselben. II C 418 i y. — Deutsche Sprach- und Stilgeschichte im Abriß, Prof. M. Evers. I A 25. — Goethe. Sein Leben und seine Werke von Dr. A. E schowsky. III E 57b. — Erinnerungen eines deutschen Seeoffiziers von H. Liersema V B 138. — Fürst von Bismarck. Ein Charakter- und Lebensbild von H. Jahn III E 179c. — Die Lebensanschauungen der großen Denker. Eine Entwickelun geschichte des Lebensproblems der Menschheit von Plato bis zur Gegenwart von R. Eucl I A 26. — Die Renaissance. Historische Scenen vom Grafen Gobineau. Deutsch Ludwig Schemann. II C 545. — Alexander. Tragödie in 5 Aufzügen vom Gra Gobineau. Deutsch von L. Schemann II C 545a. — Deutsche Jugend. Herausgege von Julius Lohmeyer. II 336d. — Neuer deutscher Jugendfreund. Band 58 II C — Die Ostereier und sechs andere Erzählungen von Chr. v. Schmid. II C 345. — Deuts Götter- und Heldensagen von H. Möbius. II C 436d. — Virtus Romana, Erzählung dem altrömischen Leben von Ludwig Gurlitt. II C 354a. — Herodot und sein schichtswerk von Dr. Adalbert Höck. — Gymnasialbibliothek von Prof. Hugo Hoffma I A 23. — Schillers Briefe von Fritz Jonas. III E 109a. — Wagner, Lehrbuch Geographie. V A 56a. — Frau Sorge. Roman von H. Sudermann. II C 411. — Warneck. Abriß einer Geschichte der protestantischen Missionen von der Reforma bis auf die Gegenwart. VI 19. — W. Bornemann, Einführung in die evangelis Missionskunde. VI 20. — O. Ehlers, Im Sattel durch Indo-China. V B 3a. — L. Ha Goldene Äpfel in silbernen Schalen. VI 8a. — R. Grundemann, Neuer Missionsa VI 3a. — E. Heyck, Der große Kurfürst, aus Monographien zur Weltgeschichte. III E 2 K. Scheid, chemisches Experimentierbuch für Knaben. VIII B 29. — Max Schill Quellenbuch zur Geschichte der Neuzeit. III D 42a. — E. Samter, Familienfeste Griechen und Römer. IV 50a. — Der deutsche Ritterorden von Wilhelm Holzgr III C 37.

c) Für das physikalische Kabinett.

Der Primaner Ulrich schenkte eine große einstiefelige Luftpumpe nebst abgeschliffenen Glasglocken.

Aus den etatmäßigen Mitteln wurde angekauft ein Differential-Thermoskop Looser mit einem großen Teil der dazu gehörenden Neben-Apparate.

d) Für den naturwissenschaftlichen Unterricht.

Angekauft: „Das Leben im Teiche“, ein Spirituspräparat.

Geschenkt: Eine Waldohreule von Herrn Kaufmann Kratzenstein. — Käfersammlung vom Obertertianer Kühne.

e) Landkarten, Bilder und andere Unterrichtsmittel.

Kiepert, Wandkarte von Alt-Italien. — Bamberg, Wandkarten von Skandina Rußland, Deutschland (polit. und physik.), Preußen (polit.), der Balkanhalbinsel, Italie Kiepert, Wandkarte von Altgriechenland.

VI. Stiftungen und Unterstützungen.

1. Den Halle'schen Freitisch hatte der Stud. theol. Ernst Cohnert.

2. Die v. Klevenow'schen Stipendien (4 zu 150 Mk.) erhielten: Stud. phil. Ewald ping, Stud. med. Oskar Liebau, Stud. math. Johannes Treu, bis Mich. 1903 Stud. Erich Klitzing, seit Mich. 1903 Stud. theol. Ludwig Giseke.

3. Die Klosterstipendien (4 zu 150 Mk.) erhielten: Stud. med. Gerhard Decker, phil. Hans Lösche, bis Michaelis Stud. phil. Richard Lohmann und Stud. theol. elm Arndt, seit Michaelis Stud. theol. Fritz Schulle und Stud. phil. Max Dorn.

4. Das Magdeburger Stadtstipendium (Zinsen von 6000 Mk.): Stud. math. Hoff.

5. Das Abgangsstipendium (75 Mk.) wurde dem Abiturienten Alfred Boldt prochen.

6. Die Kloster Berge'schen Schülerstipendien (4 zu 150 Mk.) erhielten die Primaner Hille und Moritz Matthies, der Obertertianer Walther Siegmund-Schultze, und je älfte die Primaner Erich Kirchner und Edwin Schuster.

7. Aus der v. Münchhausen'schen Stiftung erhielt der Obersekundaner Lothar 1 300 Mk.

8. Aus der Theodor Dschenfzig-Stiftung erhielten ein Sextaner 15, ein Sekundaner ark, einige andere zur Harzfahrt zusammen 21 Mark.

9. Aus der Ernst Dschenfzig-Stiftung erhielten 10 Schüler je 3 Mk. 50 Pf., men 35 Mk. zur Harzfahrt.

10. Das Ribbentrop'sche Stipendium (10 Mk. 50 Pf.) erhielt der Stud. theol. Schulle.

11. Aus der Schwalbe'schen Stiftung erhielt der Stud. phil. Max Pieper 90 Mk.

12. Prämien erhielten zu Ostern 1903:

a) Aus der Prämienstiftung des Klosters: Die Abiturienten Alfred Boldt ier, Das klassische Zeitalter der deutschen Literatur), Kurt Körber (Kautzsch. alte Testament), Otto Stenzel (Bismarck, Gedanken und Erinnerungen), Kurt (Christ, griechische Literaturgeschichte), Erich Klitzing (Windelband, Geschichte ilosophie), Friedrich Siegmund-Schultze (Wilke-Grimm, Clavis Novi Testamenti laß, Grammatik des neutestamentlichen Griechisch), Johannes Fehse (Teuffel. he Literaturgeschichte), der Unterprimaner Georg Mehlhose (Schanz, römische turgeschichte), die Obertertianer Georg Schuster (Wilamowitz-Moellendorff. isches Lesebuch) und Erwin Ziegler (Homer, Odyssee von Ameis und Hentze). ntertertianer Gustav Klär (Stowasser, lateinisches Schulwörterbuch).

b) Aus der Georg und Fritz Dschenfzig-Stiftung: Die Abiturienten Hermann nphardt (Wölflin, Die klassische Kunst und Helm, Gedanken über Goethe) und t Gantzer (Heinke, Elektrophysik), der Unterprimaner Otto Hille (Wychgram. er), der Obersekundaner Rudolf Keydell (Heinemann, Goethe), der Obertertianer g Radecke (Homer, Odyssee von Faesi), die Untertertianer Max Schulz (Schenkl. isch-deutsches Wörterbuch), und Walther Siegmund-Schultze (Harnack. ers Leben).

VII. Mitteilungen an die Eltern.

Schulaktus.

Dienstag, den 22. März 1904, vormittags 10 Uhr.

Choral: „Sollt ich meinem Gott nicht singen.“
Entlassung der Abiturienten. Prämienverteilung.
Chor aus dem „Aias“ von Bellermann.
Chor „Komm, holder Lenz“ aus dem Oratorium „Die Jahreszeiten“ von J. Haydn.
Schlußchoral: „Nun danket alle Gott.“

Schlussbemerkung.

Das nächste Schuljahr beginnt Dienstag, den 12. April um 7 Uhr. Die Prüfu der angemeldeten Schüler findet Sonnabend, den 26. März, statt, für die Sextaner 10 Uhr, für die übrigen um 11 Uhr.

Anmeldungen neuer Schüler geschehen am besten im Laufe des Monats Oktol solcher aber, die später Alumnen werden sollen, auch schon früher.

Propst Dr. Urban,
Geheimer Regierungs-Rat.

Sonderabdruck aus Zeitschr. f. mathem. u. naturw. Unterr. XXXV. Heft 4/5.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Elementare Berechnung der Logarithmen.

Von H. Schubert in Hamburg.

III.

Berechnung der dekadischen Logarithmen lediglich auf Grund der Formeln für $(a+b)(a-b)$, $(a-b)^2$, $(a-b)^3$ und $(a-b)^4$.

Schon in meinem Buche „Elementare Berechnung der Logarithmen“*) und in meinen beiden auf dasselbe Thema bezüglichen Artikeln**) habe ich es als ein pädagogisches Bedürfnis hingestellt, daß man den Schülern, welchen man die Logarithmentafeln in die Hand gibt, auch Wege zeigt, welche die Berechnung der Logarithmen ermöglichen. Den besten von diesen Wegen bieten die logarithmischen Reihen dar. Da diese jedoch nicht auf allen höheren Schulen zum Pensenplan gehören, so zeigte ich in dem zitierten Buche, wie auch der binomische Lehrsatz, falls der Exponent ein Buchstabe ist, der eine ganze Zahl bedeutet, völlig ausreicht, um den Logarithmus jeder Zahl in zwei Grenzen einzuschließen, die sich höchstens um ein Milliontel unterscheiden. Nun wird aber der binomische Lehrsatz meist erst in Prima durchgenommen, so daß es wünschenswert erscheint, Mittel zu haben, um auch schon dem Untersekundaner, der den Begriff und die Gesetze des Logarithmierens, ebenso wie die Logarithmentafeln soeben kennen gelernt hat, dem aber nur die elementarste Arithmetik bekannt ist, die Berechnung der Logarithmen zu zeigen. Schon im 8. Hefte dieser Zeitschrift zeigte ich, wie dies möglich ist. Während es mir aber dort nur darauf ankam, zu zeigen, daß es möglich ist, lediglich mit Benutzung der im Titel genannten Formeln, aus a zwei rationale Zahlen zu berechnen, von denen die eine kleiner, die andere größer als $\log a$ ist, will ich hier zeigen, daß es durch eine geschickte Wahl des Berechnungsweges, gelingt, die beiden zu berechnenden Grenzen für $\log a$ so nahe zu bringen, daß der Unterschied dieser Grenzen immer kleiner als ein Tausendtel bleibt. Der besseren Übersicht wegen leite ich hier die der Berechnung zugrunde liegenden Ungleichungen noch einmal ab.

---

*) Leipzig, 1903.
**) Diese Zeitschrift, 34. Jahrgang, 7. und 8. Heft.

§ 1.

Grundlegende Ungleichungen.

Aus $x^2 > x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ folgt durch Logarithmieren:

$$\log x > \tfrac{1}{2}\log(x-1) + \tfrac{1}{2}\log(x+1). \tag{1}$$

Durch diese Formel ist es möglich, für $\log x$ eine untere Grenze zu finden, falls für $\log(x-1)$ und für $\log(x+1)$ je eine untere Grenze bekannt sind. Um auch eine Formel für eine obere Grenze von $\log x$ zu finden, gehen wir davon aus, daß einerseits:

$$x^3(x-2) = x^4 - 2x^3$$

ist, und daß andrerseits:

$$(x-1)^3(x+1) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(x+1) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$$

ist, so daß $x^3(x-2)$ um $2x-1$ kleiner als $(x-1)^3(x+1)$ ist. Demnach ist für jedes positiv ganzzahlige x:

$$x^3(x-2) < (x-1)^3(x+1)$$

oder, wenn man logarithmiert:

$$3\log x + \log(x-2) < 3\log(x-1) + \log(x+1)$$

oder:

$$\log x < \log(x-1) + \tfrac{1}{3}\log(x+1) - \tfrac{1}{3}\log(x-2). \tag{2}$$

Durch diese Formel ist es möglich, für $\log x$ eine obere Grenze zu berechnen, falls für $\log(x-1)$ und für $\log(x+1)$ je eine obere Grenze und für $\log(x-2)$ eine untere Grenze bekannt sind. Um die dritte der drei grundlegenden Ungleichungen, die auch zu einer oberen Grenze für $\log x$ führt, zu finden, setzen wir einerseits:

$$x^6(x^2-4) = x^8 - 4x^6,$$

andrerseits:

$$(x^2-1)^4 = x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1,$$

so daß wir für jedes positiv ganzzahlige x erhalten:

$$x^6(x-2)(x+2) < (x-1)^4(x+1)^4,$$

woraus durch Logarithmieren folgt:

$$6\log x + \log(x-2) + \log(x+2) < 4\log(x-1) + 4\log(x+1)$$

oder:

$$\log x < \tfrac{2}{3}\log(x-1) + \tfrac{2}{3}\log(x+1) - \tfrac{1}{6}\log(x-2) - \tfrac{1}{6}\log(x+2). \tag{3}$$

*) Die mit (1), (2), (3) bezeichneten drei grundlegenden Ungleichungen bestehen beziehungsweise zwischen den Logarithmen von drei, vier und fünf aufeinanderfolgenden Zahlen. Allgemein habe ich in meinem Buche „Elementare Berechnung der Logarithmen" bewiesen daß

$$-\log a + n_1\log(a+1) - n_2\log(a+2) + n_3\log(a+3) \ldots \log(a+n)$$

stets positiv bleibt, aber bei wachsendem n und bei wachsendem a sich der Null nähert. Dabei bedeutet n_i den Binomialkoeffizienten, der gleich $\frac{n!}{i!(n-i)!}$ ist

Auch diese Formel liefert eine obere Grenze für $\log x$, und zwar aus zwei oberen Grenzen für $\log(x-1)$ und für $\log(x+1)$ und zwei unteren Grenzen für $\log(x-2)$ und für $\log(x+2)$.

§ 2.

Ungleichungen zwischen log 2 und log 3.

Wir benutzen nun die in § 1 ganz elementar abgeleiteten Ungleichungen, um vier Ungleichungen zwischen log 2 und log 3 abzuleiten, aus denen dann untere und obere Grenzen für log 2 und log 3 folgen werden.

Aus (1) folgt für $x = 81 = 3^4$ nach Fortschaffung der Brüche:

$$8 \log 3 - \log 41 - 4 \log 2 - 1 > 0, \tag{4}$$

wobei zu beachten war, daß $80 = 10.2^3$, $82 = 2.41$ ist. Wir setzen zweitens in (1) $x = 41$ und erhalten:

$$2 \log 41 > \log 40 + \log 42$$

oder:

$$2 \log 41 - \log 7 - \log 3 - 3 \log 2 - 1 > 0. \tag{5}$$

Drittens setzen wir in (1): $x = 49$, beachten, daß $48 = 2^4 \cdot 3$ und $50 = 100 : 2$ ist, und erhalten

$$4 \log 7 - \log 3 - 3 \log 2 - 2 > 0. \tag{6}$$

Durch Addition des Doppelten von (4) zu (5) fällt log 41 fort, und man erhält:

$$15 \log 3 - \log 7 - 11 \log 2 - 3 > 0.$$

Addiert man noch das Vierfache der zuletzt erhaltenen Ungleichung zu (6), so erscheint auch log 7 eliminiert, und wir erhalten die erste mit I zu bezeichnende, von den gesuchten vier Ungleichungen zwischen log 2 und log 3, nämlich:

$$59 \log 3 - 47 \log 2 - 14 > 0. \tag{I}$$

Um die zweite dieser Ungleichungen zu erhalten, setzen wir in (2) $x = 27$, wodurch wir zunächst erhalten:

$$-\log 25 + 3 \log 26 - 3 \log 27 + \log 28 > 0,$$

oder, nach Zerlegung in Primfaktoren und Beachtung, daß $25 = 100 : 2^2$ ist,

$$-2 + 2 \log 2 + 3 \log 2 + 3 \log 13 - 9 \log 3 + 2 \log 2 + \log 7 > 0$$

oder:

$$3 \log 13 + \log 7 - 9 \log 3 + 7 \log 2 - 2 > 0. \tag{7}$$

Ferner setzen wir in (1) $x = 64$. Dann kommt:

$$2 \log 64 - \log 63 - \log 65 > 0$$

oder:

$$12 \log 2 - \log 7 - 2 \log 3 - \log 13 - 1 + \log 2 > 0$$

oder:

(8) $$-\log 13 - \log 7 - 2\log 3 + 13\log 2 - 1 > 0.$$

Addiert man das Dreifache von (8) zu (7), so erscheint log 13 eliminiert und man erhält:

(9) $$-2\log 7 - 15\log 3 + 46\log 2 - 5 > 0.$$

Nun eliminieren wir noch log 7 aus (9) und (6), indem wir das Doppelte von (9) zu (6) addieren. Dadurch erhalten wir die mit II zu bezeichnende zweite von den gesuchten vier Ungleichungen zwischen log 2 und log 3, nämlich:

II $$-31\log 3 + 89\log 2 - 12 > 0.$$

Um die Ungleichung III zu erhalten, beachten wir zunächst, daß $\log 1025 > \log 1024$ ist, und daß deshalb:

$$\log 41 + \log 25 > 10\log 2$$

ist, woraus folgt:

(10) $$\log 41 - 12\log 2 + 2 > 0.$$

Ferner wenden wir Formel (2) an, indem wir $x = 125$ setzen, wodurch kommt:

(11) $$-\log 123 + 3\log 124 - 3\log 125 + \log 126 > 0.$$

Zweitens folgt aus (1) für $x = 125$:

(12) $$-\log 124 + 2\log 125 - \log 126 > 0.$$

Multiplizieren wir (12) mit 3, und addieren zu (11), erscheint log 124 eliminiert und wir erhalten:

$$-\log 123 + 3\log 125 - 2\log 126 > 0$$

oder:

(13) $$-\log 41 - 2\log 7 - 5\log 3 - 11\log 2 + 9 > 0.$$

Addiert man nun noch (13) zu (10), erhält man:

(14) $$-2\log 7 - 5\log 3 - 23\log 2 + 11 > 0.$$

Durch Addition des Doppelten von (14) zu (6) erhält man die mit III zu bezeichnende dritte der vier gesuchten Ungleichungen, nämlich:

III $$-11\log 3 - 49\log 2 + 20 > 0.$$

Um die Formel IV zu erhalten, wenden wir die grundlegende Ungleichung (3) an, indem wir in ihr $x = 26$ setzen. Dadurch erhalten wir:

$$-\log 24 + 4\log 25 - 6\log 26 + 4\log 27 - \log 28 > 0$$

oder:

(15) $$-6\log 13 - \log 7 + 11\log 3 - 19\log 2 + 8 > 0.$$

Hierzu addieren wir das Doppelte von (7), um log 13 zu eliminieren, und erhalten:

(16) $$\log 7 - 7\log 3 - 5\log 2 + 4 > 0.$$

Zweitens addieren wir zu (9) das Doppelte von (16) und erhalten die mit IV zu bezeichnende vierte der vier gesuchten Formeln:

$$\text{IV} \qquad -29\log 3 + 36\log 2 + 3 > 0.$$

Das Resultat der Untersuchung dieses § ist also der elementare Beweis der vier Ungleichungen:

$$\begin{cases} \text{I} & 59\log 3 - 47\log 2 - 14 > 0 \\ \text{II} & -31\log 3 + 89\log 2 - 12 > 0 \\ \text{III} & -11\log 3 - 49\log 2 + 20 > 0 \\ \text{IV} & -29\log 3 + 36\log 2 + 3 > 0. \end{cases}$$

§ 3.

Untere und obere Grenzen für log 2 und für log 3.

Die beiden Ungleichungen I und II, die in § 2 abgeleitet sind, geben nunmehr die untere Grenze von log 2, und ebenso auch die von log 3. Multipliziert man nämlich I mit 31, II mit 59, so erhält man nach der Addition:

$$(-1457 + 5251)\log 2 - 1142 > 0$$

oder:

$$\log 2 > \frac{1142}{3794} = \frac{571}{1897}$$

also:

$$\frac{571}{1897} < \log 2.$$

Nun ist:

$$\frac{571}{1897} > 0{,}30100, \text{ also ist:}$$

$$0{,}30100 < \log 2.$$

Um auch eine untere Grenze für log 3 zu finden, haben wir I mit 89, I mit 47 zu multiplizieren und dann zu addieren. So erhalten wir:

$$(-1457 + 5251)\log 3 - 1810 > 0$$

oder:

$$\frac{905}{1897} < \log 3$$

Also, da $0{,}47706 > \frac{905}{1897}$ ist,

$$0{,}47706 < \log 3.$$

Um zu einer oberen Grenze für log 2 zu gelangen, eliminieren wir log 3 aus den Ungleichungen I und III, indem wir I mit 11 und III mit 59 multiplizieren und dann addieren. So erhalten wir:

$$-3408\log 2 + 1026 > 0$$

oder:

$$\log 2 < \frac{171}{568} < 0{,}30106.$$

Eine obere Grenze für log 3 finden wir endlich aus III und IV durch Elimination von log 2. So erhalten wir:

$$-1817 \log 3 + 867 > 0$$

oder:

$$\log 3 < \frac{867}{1817} < 0{,}47717.$$

Von den Grenzen, die sich aus den grundlegenden Ungleichungen I bis IV ergeben können, sind die besten ausgewählt. Besser wird man natürlich eine untere Grenze nennen, wenn sie größer ist als eine andere, eine obere Grenze aber, wenn sie kleiner ist als eine andere. Das Resultat dieses § läßt sich nun kurz so schreiben:

$$\mathbf{0{,}30100} < \log 2 < \mathbf{0{,}30106}$$
$$\mathbf{0{,}47706} < \log 3 < \mathbf{0{,}47717.}$$

§ 4.

Vorläufige Berechnung von unteren Grenzen der Logarithmen der Primzahlen 7, 53, 29, 17, 13, 19, 31, 61, 11, 23, 37, 41.

Aus den in § 3 berechneten unteren Grenzen von log 2 und log 3 lassen sich schon ziemlich gute untere Grenzen der größeren Primzahlen berechnen, namentlich, falls man dieselben in geeigneter Reihenfolge berechnet und immer die Logarithmen der Quadrate dieser Primzahlen nach Formel (1) berechnet. Denn, da

$$\log (x^2) = 2 \log x$$

ist, so hat man, um $\log x$ zu finden, dann nicht durch zwei, sondern durch vier zu dividieren, wodurch die begangene Ungenauigkeit vermindert wird. Andrerseits erkennt man aus der Ableitung von Ungleichung (1), daß $\log x$ und $\frac{1}{2}\log(x-1) + \frac{1}{2}\log(x+1)$ sich um so weniger unterscheiden, je größer x ist, so daß zwei Gründe vorhanden sind, wodurch die untere Grenze von $\log x$ besser wird, wenn man Formel (1) auf x^2 anwendet.

Da $7^2 = 49$ von den Zahlen 48 und 50 eingeschlossen wird, so ist nach Ungleichung (1):

$$2 \log (7^2) > \log 48 + \log 50 = \log 2400 = 2 + 3 \log 2 + \log 3,$$

woraus folgt:

$$\log 7 > \tfrac{1}{4}(2 + 3 \log 2 + \log 3) > \mathbf{0{,}84501.}$$

Durch die unteren Grenzen von log 2, log 3, log 7 läßt sich nun allmählich eine gute untere Grenze für log 53 gewinnen, nämlich:

$$2 \log (53^2) > \log 2808 + \log 2810$$

oder:

$$4 \log 53 > 3 \log 2 + 3 \log 3 + \log 13 + 1 + \log 281.$$

Wir multiplizieren nun mit 2, um für $2 \log 281 > \log 280 + \log 282 = 1 + 3 \log 2 + \log 7 + \log 141$ setzen zu können. So kommt:

$$8 \log 53 > 3 + 9 \log 2 + 6 \log 3 + 2 \log 13 + \log 7 + \log 141.$$

Wir multiplizieren nochmals mit 2, um für $2 \log 141 > \log 140 + \log 142 = 1 + 2 \log 2 + \log 7 + \log 71$ setzen zu können. So erhalten wir:

$$16 \log 53 > 7 + 20 \log 2 + 12 \log 3 + 4 \log 13 + 3 \log 7 + \log 71$$

oder, indem wir $4 \log 13 = 2 \log 169 > (\log 168 + \log 170)$ setzen:

$$16 \log 53 > 7 + 20 \log 2 + 12 \log 3 + \log 168 + \log 170 + 3 \log 7 + \log 71$$

oder:

$$16 \log 53 > 8 + 23 \log 2 + 13 \log 3 + 4 \log 7 + \log 17 + \log 71.$$

Endlich multiplizieren wir nochmals mit 2 und ersetzen erstens $2 \log 71$ durch $\log 70 + \log 72$, zweitens $2 \log 17$ durch $\log 16 + \log 18$. So erhalten wir schließlich:

$$32 \log 53 > 17 + 54 \log 2 + 30 \log 3 + 9 \log 7.$$

Ersetzt man nun log 2, log 3, log 7 durch die schon berechneten unteren Grenzen 0,30100, 0,47706 und 0,84501, so erhält man $32 \log 53 > 55{,}17089$, woraus folgt:

$$\log 53 > \mathbf{1{,}72409.}$$

Nachdem untere Grenzen für log 2, log 3, log 7, log 53 berechnet sind, berechnen wir eine untere Grenze für log 29, wiederum aus dem Quadrate 841 von 29. So erhalten wir:

$$2 \log (29^2) > \log 840 + \log 842$$

oder:

$$4 \log 29 > 1 + 3 \log 2 + \log 3 + \log 7 + \log 421,$$

und, da $2 \log 421 > \log 420 + \log 422$ ist,

$$8 \log 29 > 3 + 8 \log 2 + 3 \log 3 + 3 \log 7 + \log 211.$$

Multiplizieren wir noch mit 2 und ersetzen $2 \log 211$ durch $\log 210 + \log 212 = 1 + 2 \log 2 + \log 3 + \log 7 + \log 53$, so erhalten wir:

$$16 \log 29 > 7 + 18 \log 2 + 7 \log 3 + 7 \log 7 + \log 53.$$

Setzt man die schon berechneten unteren Grenzen von log 2, log 3, log 7, log 53 in diese Ungleichung rechts ein, so erhalten wir:

$$16 \log 29 > 23{,}39676$$

oder:

$$\log 29 > \mathbf{1{,}46229.}$$

Aus den berechneten unteren Grenzen von log 2, log 3 und log 29 läßt sich nun eine untere Grenze von log 17 gewinnen. Denn:

$$2 \log (17^2) > \log 288 + \log 290$$

oder:

$$4 \log 17 > 1 + 5 \log 2 + 2 \log 3 + \log 29$$

oder:

$$4 \log 17 > 4{,}92141$$

oder:

$$\log 17 > \mathbf{1{,}23035.}$$

Nun folgt log 13 aus:

$$2 \log (13^2) > \log 168 + \log 170$$

oder:

$$4 \log 13 > 1 + 3 \log 2 + \log 3 + \log 7 + \log 17$$

oder:

$$4 \log 13 > 4{,}45542$$

oder:

$$\log 13 > \mathbf{1{,}11385.}$$

Dann gewinnt man eine untere Grenze für log 19 durch:

$$2 \log (19^2) > \log 360 + \log 362$$

oder:

$$4 \log 19 > 1 + 3 \log 2 + 2 \log 3 + \log 181.$$

Wir multiplizieren mit 2, um dann 2 log 181 durch die kleinere Summe von log 180 und log 182 ersetzen zu können. So erhalten wir:

$$8 \log 19 > 3 + 8 \log 2 + 6 \log 3 + \log 7 + \log 13 > 10{,}22922$$

oder:

$$\log 19 > \mathbf{1{,}27865.}$$

Um eine untere Grenze für log 31 zu erhalten, benutzen wir $31^2 = 961$, indem wir ausgehen von:

$$2 \log (31^2) > \log 960 + \log 962$$

oder:

$$4 \log 31 > 1 + 6 \log 2 + \log 3 + \log 481.$$

Wir multiplizieren mit 2, ersetzen 2 log 481 durch log 480 + log 482 und erhalten:

$$8 \log 31 > 3 + 17 \log 2 + 3 \log 3 + \log 241.$$

Wir multiplizieren wieder mit 2, ersetzen 2 log 241 durch log 240 + log 242, und erhalten:

$$16 \log 31 > 7 + 38 \log 2 + 7 \log 3 + \log 121.$$

Wir multiplizieren nochmal mit 2, ersetzen 2 log 121 durch log 120 + log 122 und erhalten:

$$32 \log 31 > 15 + 79 \log 2 + 15 \log 3 + \log 61.$$

Indem wir endlich nochmal mit 2 multiplizieren, und 2 log 61 durch log 60 + log 62 ersetzen, erhalten wir:

$$64 \log 31 > 31 + 160 \log 2 + 31 \log 3 + \log 31,$$

also:

$$63 \log 31 > 31 + 160 \log 2 + 31 \log 3$$

also:

$$63 \log 31 > 93{,}94886$$

oder:

$$\log 31 > \mathbf{1{,}49125.}$$

Für log 61 erhalten wir aus $61^2 = 3721$ nach und nach:

$$4 \log 61 > 1 + 3 \log 2 + \log 3 + \log 31 + \log 1861,$$

$$8 \log 61 > 2 + 6 \log 2 + 2 \log 3 + 2 \log 31 + \log 1860 + \log 1862$$

oder:

$$8 \log 61 > 3 + 8 \log 2 + 3 \log 3 + 3 \log 31 + 2 \log 7 + \log 19$$
$$> 14{,}28154$$

oder:

$$\log 61 > \mathbf{1{,}78519.}$$

Nunmehr gelingt die Berechnung einer guten unteren Grenze für log 11 aus:

$$2 \log (11^2) = 4 \log 11 > \log 120 + \log 122$$

oder:

$$4 \log 11 > 1 + 3 \log 2 + \log 3 + \log 61$$
$$> 4{,}16525$$

oder:

$$\log 11 > \mathbf{1{,}04131.}$$

Für log 23 erhalten wir:

$$2 \log (23^2) > \log 528 + \log 530$$

oder:

$$4 \log 23 > 1 + 4 \log 2 + \log 3 + \log 11 + \log 53$$
$$> 5{,}44646$$

oder:

$$\log 23 > \mathbf{1{,}36161.}$$

Dann berechnen wir noch eine gute untere Grenze für log 37 aus:

$$2 \log (37^2) > \log 1368 + \log 1370$$

oder:

$$4 \log 37 > 1 + 3 \log 2 + 2 \log 3 + \log 19 + \log 137.$$

Diese Ungleichung multiplizieren wir mit 2 und ersetzen dann 2 log 137 durch die kleinere Summe log 136 + log 138. So erhalten wir:

$$8 \log 37 > 2 + 10 \log 2 + 5 \log 3 + \log 17 + 2 \log 19 + \log 23$$
$$> 12{,}54456,$$

woraus folgt:

$$\log 37 > \mathbf{1{,}56807.}$$

Endlich berechnen wir noch eine untere Grenze von log 41 durch das Quadrat 1681 von 41. Wir erhalten:

$$2 \log (41^2) > \log 1680 + \log 1682$$

oder:

$$4 \log 41 > 1 + 4 \log 2 + \log 3 + \log 7 + \log 841.$$

Multiplizieren wir mit 2, um 2 log 841 durch die kleinere Summe log 840 + log 842 zu ersetzen, so erhalten wir:

$$8 \log 41 > 3 + 11 \log 2 + 3 \log 3 + 3 \log 7 + \log 421.$$

Das analoge Verfahren führt uns dann zu:

$$16 \log 41 > 7 + 24 \log 2 + 7 \log 3 + 7 \log 7 + \log 211$$

und darauf zu:

$$32 \log 41 > 15 + 50 \log 2 + 15 \log 3 + 15 \log 7 + \log 53$$
$$> 51{,}60514$$

oder:

$$\log 41 > \mathbf{1{,}61266.}$$

Man bemerke, daß allein die Ungleichung $x^2 > x^2 - 1$ und die aus ihr folgende Ungleichung (1) $2 \log x > \log (x-1) + \log (x+1)$ ausreichten, um die hier berechneten unteren Grenzen der Logarithmen der Primzahlen 7, 53, 29, 17, 13, 19, 31, 61, 11, 23, 37, 41 zu bestimmen.

§ 5.

Verbesserte untere Grenzen der Logarithmen aller Primzahlen unter Hundert.

Wir können nun die in § 4 berechneten unteren Grenzen benutzen, um noch bessere untere Grenzen für log 2 und log 3 zu erhalten, und zwar dadurch, daß wir von höheren Potenzen der Zahlen Zwei und Drei ausgehen.*) Dann können wir auch, indem wir den in § 4 eingeschlagenen Berechnungsweg wiederholen, noch bessere untere Grenzen der Logarithmen der übrigen Primzahlen erzielen.

Da $2^{10} = 1024$ ist, und $1023 = 3.341$, $1025 = 5^2.41 = 4100 : 2^2$ ist, so erhalten wir:

$$20 \log 2 > \log 3 + \log 341 + \log 41 + 2 - 2 \log 2$$

oder:

$$22 \log 2 > 2 + \log 3 + \log 41 + \log 341.$$

Durch Multiplikation mit 2 und Ersetzen von 2 log 341 durch log 340 + log 342 erhalten wir:

$$44 \log 2 > 4 + 2 \log 3 + 2 \log 41 + \log 340 + \log 342$$

oder:

$$42 \log 2 > 5 + 4 \log 3 + 2 \log 41 + \log 17 + \log 19$$
$$> 12{,}64256$$

oder:

$$\log 2 > 0{,}30101.$$

Um auch eine bessere untere Grenze für log 3 zu gewinnen, gehen wir davon aus, daß $3^6 = 729$ ist und erhalten:

$$12 \log 3 > 1 + 3 \log 2 + \log 91 + \log 73.$$

*) Hätte man von vornherein schon in § 3 diesen Ausgangspunkt gewählt, wären die Berechnungen mühsamer geworden.

Durch Multiplikation mit 2 und Ersetzen von 2 log 91 durch das kleinere log 90 + log 92 und von 2 log 73 durch log 72 + log 74 erhalten wir:

$$20 \log 3 > 3 + 12 \log 2 + \log 23 + \log 37$$
$$> 9{,}54180,$$

wenn man für log 2 schon die soeben gewonnene bessere Grenze 0,30101 nimmt. So erhält man:

$$\log 3 > 0{,}47709.$$

Wir wiederholen nun genau den in § 4 eingeschlagenen Berechnungsweg, indem wir aber für log 2 und log 3 die soeben gewonnenen besseren unteren Grenzen 0,30101 und 0,47709 einsetzen. So erhalten wir nacheinander:

$\log 7 > 0{,}84503$	$\log 13 > 1{,}11388$	$\log 11 > 1{,}04134$
$\log 53 > 1{,}72414$	$\log 19 > 1{,}27869$	$\log 23 > 1{,}36165$
$\log 29 > 1{,}46232$	$\log 31 > 1{,}49129$	$\log 37 > 1{,}56812$
$\log 17 > 1{,}23038$	$\log 61 > 1{,}78524$	$\log 41 > 1{,}61270$

Es sind nun von zehn Primzahlen unter Hundert die unteren Grenzen ihrer Logarithmen noch nicht berechnet, nämlich von:

$$43,\ 47,\ 59,\ 67,\ 71,\ 73,\ 79,\ 83,\ 89,\ 97.$$

Von den Quadraten dieser Zahlen ausgehend erhalten wir nun die gesuchten unteren Grenzen in folgender Reihenfolge aus:

(1) $4 \log 43 > 1 + 2 \log 2 + \log 3 + \log 7 + \log 11 + \log 37;$

(2) $4 \log 47 > 1 + 5 \log 2 + \log 3 + \log 13 + \log 17 + \log 23;$

(3) $32 \log 59 > 15 + 40 \log 2 + 17 \log 3 + \log 11 + 14 \log 29;$

(4) $8 \log 67 > 4 + 11 \log 2 + 4 \log 3 + \log 7 + 2 \log 11 + 2 \log 17;$

(5) $32 \log 97 > 13 + 66 \log 2 + 15 \log 3 + 16 \log 7 + 3 \log 13 + 4 \log 47;$

(6) $8 \log 71 > 3 + 11 \log 2 + 6 \log 3 + 3 \log 7 + \log 13 + \log 97;$

(7) $16 \log 73 > 5 + 25 \log 2 + 12 \log 3 + 2 \log 7 + \log 11 + 2 \log 19 + 4 \log 37;$

(8) $16 \log 79 > 6 + 34 \log 2 + 7 \log 3 + 3 \log 7 + 6 \log 13 + \log 37;$

(9) $16 \log 83 > 9 + 28 \log 2 + 5 \log 3 + 2 \log 23 + 5 \log 43;$

(10) $32 \log 89 > 13 + 52 \log 2 + 24 \log 3 + 5 \log 7 + 12 \log 11 + 3 \log 71.$

Aus diesen zehn Ungleichungen folgt nacheinander durch Einsetzung der schon gefundenen unteren Grenzen:

$\log 43 > 1{,}63340$	$\log 67 > 1{,}82599$	$\log 79 > 1{,}89752$
$\log 47 > 1{,}67201$	$\log 97 > 1{,}98666$	$\log 83 > 1{,}91900$
$\log 59 > 1{,}77077$	$\log 71 > 1{,}85116$	$\log 89 > 1{,}94929$
	$\log 73 > 1{,}86322$	

Da nunmehr für alle Primzahlen unter Hundert untere Grenzen ihrer Logarithmen berechnet sind, so stellen wir dieselben noch, ihrer Größenfolge nach, hier zusammen:

$0{,}30101 < \log 2$	$1{,}36165 < \log 23$	$1{,}78524 < \log 61$
$0{,}47709 < \log 3$	$1{,}46232 < \log 29$	$1{,}82599 < \log 67$
$0{,}69894 < \log 5$*)	$1{,}49129 < \log 31$	$1{,}85116 < \log 71$
$0{,}84503 < \log 7$	$1{,}56812 < \log 37$	$1{,}86322 < \log 73$
$1{,}04134 < \log 11$	$1{,}61270 < \log 41$	$1{,}89752 < \log 79$
$1{,}11388 < \log 13$	$1{,}63340 < \log 43$	$1{,}91900 < \log 83$
$1{,}23038 < \log 17$	$1{,}67201 < \log 47$	$1{,}94929 < \log 89$
$1{,}27869 < \log 19$	$1{,}72414 < \log 53$	$1{,}98666 < \log 97$
	$1{,}77077 < \log 59$	

§ 6.

Obere Grenzen der Logarithmen der Primzahlen unter Hundert.

Da $7^2 - 1$ und $7^2 + 1$ keine anderen Primfaktoren als 2, 3 und 5 enthalten, und da $5 = 10 : 2$ ist, so kann man aus den in § 3 berechneten oberen Grenzen für $\log 2$ und $\log 3$ eine obere Grenze für $\log 7$ berechnen, und zwar durch die grundlegende Ungleichung (3). Man erhält so:

$$12 \log 7 < 4 \log 48 + 4 \log 50 - \log 47 - \log 51$$

oder:

$$12 \log 7 < 4 \log 2400 - \log 47 - \log 17 - \log 3$$

oder:

$$12 \log 7 < 8 + 12 \log 2 + 3 \log 3 - \log 17 - \log 47,$$

wo nun rechts die aus § 3 bekannten oberen Grenzen für $\log 2$ und für $\log 3$, nämlich 0,30106 bezw. 0,47717, und die aus § 5 bekannten unteren Grenzen für $\log 17$ und $\log 47$, nämlich 1,23038 bezw. 1,67201 einzusetzen sind. So erhält man:

$$\log 7 < \mathbf{0{,}84516.}$$

Nunmehr suchen wir eine obere Grenze für $\log 41$ durch Anwendung der grundlegenden Ungleichung (2) auf die vier Zahlen 39, 40, 41, 42. So erhält man:

$$3 \log 41 < 3 \log 40 + \log 42 - \log 39$$

oder:

$$3 \log 41 < 3 + 7 \log 2 + \log 7 - \log 13,$$

wo $\log 3$ gehoben ist. Durch Einsetzung der bekannten oberen Grenzen für $\log 2$ und $\log 7$ und der aus § 5 bekannten unteren Grenze für $\log 13$ erhält man hieraus:

$$\log 41 < \mathbf{1{,}61290.}$$

---

*) Die untere Grenze von $\log 5$ folgt aus der oben berechneten oberen Grenze von $\log 2$ durch: $\log 5 = 1 - \log 2$.

Die nunmehr bekannten oberen Grenzen für log 2, log 7, log 41 reichen nun aus, um die in § 3 berechnete obere Grenze 0,47717 für log 3 um ein Hunderttausendtel zu verbessern. Wenn man nämlich die grundlegende Ungleichung (2) auf die Zahlengruppe 79, 80, 81, 82 anwendet, erhält man:

$$3 \log 81 < 3 \log 80 + \log 82 - \log 79$$

oder:

$$12 \log 3 < 3 + 10 \log 2 + \log 41 - \log 79.$$

Wir multiplizieren nun mit 2, ersetzen 2 log 79 durch die kleinere Summe log 78 + log 80, was gestattet ist, weil log 79 auf der größeren Seite der Ungleichung subtrahiert ist, und erhalten:

$$24 \log 3 < 6 + 20 \log 2 + 2 \log 41 - 1 - 3 \log 2 - \log 2 - \log 3 - \log 13$$

oder:

$$25 \log 3 < 5 + 16 \log 2 + 2 \log 41 - \log 13,$$

woraus, nach Einsetzung der bekannten oberen Grenzen von log 2 und log 41, und der aus § 5 bekannten unteren Grenze von log 13 hervorgeht:

$$\log 3 < \mathbf{0{,}47716.}$$

Durch Einsetzung der verbesserten oberen Grenze von log 3 wird die obere Grenze von log 7 bei fünf Dezimalstellen nicht verbessert, ebensowenig die von log 41, die ja aus einer Ungleichung hervorgeht, die log 3 gar nicht enthielt.

Eine gute obere Grenze für log 11 erhält man durch Formel (3) direkt, d. h. ohne $11^2 = 121$ der Formel (3) zu unterwerfen, nämlich:

$$6 \log 11 < 4 \log 10 + 4 \log 12 - \log 9 - \log 13$$

oder:

$$6 \log 11 < 4 + 8 \log 2 + 2 \log 3 - \log 13$$

oder:

$$\log 11 < \mathbf{1{,}04146.}$$

Eine obere Grenze für log 29 folgt nun durch Anwendung derselben grundlegenden Ungleichung direkt, nämlich:

$$6 \log 29 < 4 \log 28 + 4 \log 30 - \log 27 - \log 31$$

oder:

$$6 \log 29 < 4 + 8 \log 2 + \log 3 + 4 \log 7 - \log 31$$

oder:

$$\log 29 < \mathbf{1{,}46250.}$$

Da $290 = 29.10$ Nachbarzahl von $289 = 17^2$ ist, so ist nunmehr die Berechnung einer guten oberen Grenze für log 17 ermöglicht, nämlich:

$$6 \log 289 = 12 \log 17 < 4 \log 288 + 4 \log 290 - \log 287 - \log 291$$

oder:

$$2 \log 17 < 20 \log 2 + 4 + 7 \log 3 + 4 \log 29 - \log 7 - \log 41 - \log 97$$

woraus folgt:

$$\log 17 < \mathbf{1{,}23058.}$$

Nach Feststellung dieser oberen Grenze gelingt die Berechnung einer guten oberen Grenze für log 13, weil $170 = 17 \cdot 10 = 13^2 + 1$ ist. Nämlich:

$$6 \log 169 = 12 \log 13 < 4 \log 168 + 4 \log 170 - \log 167 - \log 171$$

oder:

$$12 \log 13 < 12 \log 2 + 4 + 4 \log 7 + 4 \log 17 + 2 \log 3 - \log 19 - \log 167.$$

Nunmehr ist mit 2 zu multiplizieren und dann

$$2 \log 167 \text{ durch } \log 166 + \log 168 = 4 \log 2 + \log 3 + \log 7 + \log 83$$

zu ersetzen. So erhält man:

$$24 \log 13 < 20 \log 2 + 8 + 7 \log 7 + 8 \log 17 + 3 \log 3 - 2 \log 19 - \log 83,$$

woraus hervorgeht:

$$\log 13 < \mathbf{1{,}11405.}$$

Eine gute obere Grenze für log 19 folgt aus der grundlegenden Ungleichung (3) direkt, nämlich:

$$6 \log 19 < 4 \log 20 + 4 \log 18 - \log 17 - \log 21$$

oder:

$$6 \log 19 < 4 + 8 \log 2 + 7 \log 3 - \log 7 - \log 17,$$

woraus, nach Einsetzung der oberen Grenzen von log 2 und log 3 und der unteren Grenzen von log 7 und log 17 hervorgeht:

$$\log 19 < \mathbf{1{,}27887.}$$

Durch Anwendung der grundlegenden Ungleichung (2) auf die Zahlen 51, 52, 53, 54 erhält man:

$$3 \log 53 < 3 \log 52 + \log 54 - \log 51,$$

woraus folgt:

$$3 \log 53 < 7 \log 2 + 2 \log 3 + 3 \log 13 - \log 17$$

oder:

$$\log 53 < \mathbf{1{,}72451.}$$

Eine obere Grenze von log 23 kann man nunmehr am besten durch das Quadrat 529 von 53 finden. Man erhält:

$$12 \log 23 < 4 \log 528 + 4 \log 530 - \log 527 - \log 531$$

oder:

$$12 \log 23 < 4 + 16 \log 2 + 2 \log 3 + 4 \log 11 + 4 \log 53 - \log 31 - \log 59 - \log 17,$$

woraus folgt:

$$\log 23 < \mathbf{1{,}36191.}$$

Um von log 73 eine gute obere Grenze zu gewinnen, gehen wir einmal von dem Doppelten der Zahl aus, deren Logarithmus wir suchen. Wir erhalten durch Anwendung der Formel (3):

$$6 \log 146 = 6 \log 2 + 6 \log 73$$

$$< 4 \log 145 + 4 \log 147 - \log 144 - \log 148$$

oder:

$$6 \log 73 < 4 + 2 \log 3 + 8 \log 7 + 4 \log 29 - 16 \log 2 - \log 37,$$

woraus folgt:

$$\log 73 < \mathbf{1{,}86356}.$$

Nunmehr berechnen wir direkt eine obere Grenze von log 31, um aus ihr eine für log 61 zu gewinnen. Wir erhalten:

$$6 \log 31 < 4 \log 30 + 4 \log 32 - \log 29 - \log 33$$

oder:

$$6 \log 31 < 20 \log 2 + 3 \log 3 + 4 - \log 11 - \log 29,$$

also:

$$\log 31 < \mathbf{1{,}49151}.$$

Nun kommt für log 61:

$$6 \log 61 < 4 \log 60 + 4 \log 62 - \log 59 - \log 63$$

oder:

$$6 \log 61 < 4 + 8 \log 2 + 2 \log 3 + 4 \log 31 - \log 7 - \log 59,$$

woraus folgt:

$$\log 61 < \mathbf{1{,}78551}.$$

Für log 37 kommt nacheinander:

$$6 \log 37 < 4 \log 36 + 4 \log 38 - \log 35 - \log 39,$$

$$6 \log 37 < 13 \log 2 + 7 \log 3 + 4 \log 19 - 1 - \log 7 - \log 13,$$

$$6 \log 37 < 13 \log 2 + 7 \log 3 + 4 \log 19 - 1 - \log 91,$$

$$12 \log 37 < 26 \log 2 + 14 \log 3 + 8 \log 19 - 2 - \log 90 - \log 92,$$

$$12 \log 37 < 24 \log 2 + 12 \log 3 + 8 \log 19 - 3 - \log 23$$

woraus folgt:

$$\log 37 < \mathbf{1{,}56839}.$$

Die nächste Primzahl, bei der eine obere Grenze ihres Logarithmus noch nicht berechnet ist, ist 43. Wir erhalten dafür:

$$6 \log 43 < 4 \log 42 + 4 \log 44 - \log 41 - \log 45$$

oder:

$$6 \log 43 < 13 \log 2 + 2 \log 3 + 4 \log 7 + 4 \log 11 - \log 41 - 1$$

oder:

$$\log 43 < \mathbf{1{,}63365}.$$

Für die noch fehlenden Primzahlen unter Hundert erhalten wir nach Vereinfachung:

$$6 \log 47 < 21 \log 2 + 4 \log 23 + 2 \log 3 - 1 - 2 \log 7$$

oder:

$$\log 47 < \mathbf{1{,}67236};$$

$$6 \log 59 < 4 + 8 \log 2 + 3 \log 3 + 4 \log 29 - \log 19 - \log 61$$

oder:

$$\log 59 < \mathbf{1{,}77101};$$

$$6 \log 67 < 13 \log 2 + 3 \log 3 + 4 \log 17 + 4 \log 11 - 1 - \log 13 - \log 23$$

oder:

$$\log 67 < \mathbf{1{,}82632};$$

$$6 \log 71 < 4 + 12 \log 2 + 7 \log 3 + 4 \log 7 - \log 23 - \log 73$$

oder:

$$\log 71 < \mathbf{1{,}85144};$$

$$6 \log 79 < 4 + 16 \log 2 + 4 \log 13 - \log 7 - \log 11$$

oder:

$$\log 79 < \mathbf{1{,}89780};$$

$$6 \log 83 < 4 \log 7 + 13 \log 2 + 4 \log 41 - 1 - \log 17$$

oder:

$$\log 83 < \mathbf{1{,}91930};$$

oder:

$$6 \log 89 < 4 + 12 \log 2 + 7 \log 3 + 4 \log 11 - \log 7 - \log 13 - \log 29$$

oder:

$$\log 89 < \mathbf{1{,}94958};$$

$$6 \log 97 < 25 \log 2 + 2 \log 3 + 8 \log 7 - 1 - \log 11 - \log 19$$

oder:

$$\log 97 < \mathbf{1{,}98702}.$$

Wir schließen diesen § mit der Zusammenstellung der berechneten oberen Grenzen, indem wir die Primzahlen, von deren Logarithmen die oberen Grenzen gefunden sind, nach ihrer Größe ordnen:

$\log 2 < 0{,}30106$	$\log 23 < 1{,}36191$	$\log 61 < 1{,}78551$
$\log 3 < 0{,}47716$	$\log 29 < 1{,}46250$	$\log 67 < 1{,}82632$
$\log 5 < 0{,}69899$*)	$\log 31 < 1{,}49151$	$\log 71 < 1{,}85144$
$\log 7 < 0{,}84516$	$\log 37 < 1{,}56839$	$\log 73 < 1{,}86356$
$\log 11 < 1{,}04146$	$\log 41 < 1{,}61290$	$\log 79 < 1{,}89780$
$\log 13 < 1{,}11405$	$\log 43 < 1{,}63365$	$\log 83 < 1{,}91930$
$\log 17 < 1{,}23058$	$\log 47 < 1{,}67236$	$\log 89 < 1{,}94958$
$\log 19 < 1{,}27887$	$\log 53 < 1{,}72451$	$\log 97 < 1{,}98702$
	$\log 59 < 1{,}77101$	

§ 7.

Liste der vereinigten unteren und oberen Grenzen.

Aus den Logarithmen der Primzahlen folgen die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen durch Addition der Vielfachen der Logarithmen ihrer Primfaktoren. Deshalb sind, da in § 5 und § 6 für den Logarithmus jeder Primzahl unter Hundert je eine untere und eine obere Grenze be-

*) Die obere Grenze 0,69899 für log 5 folgt aus der schon berechneten unteren Grenze 0,30101 für log 2.

rechnet sind, die Logarithmen aller ein- und zweiziffrigen Zahlen „genau“ bestimmt, d. h. es ist für jeden Logarithmus eine untere und eine obere Grenze berechnet, und zwar beträgt der Unterschied dieser Grenzen mindestens 5, höchstens 40 Hunderttausendtel. Was aber dem Verfasser am wichtigsten erscheint, ist dies, daß die Berechnung jeder Grenze lediglich auf Grund des Begriffs des Logarithmierens und der aller-elementarsten Formeln der Arithmetik geschehen ist, so daß es nunmehr dem Mathematiklehrer ermöglicht ist, dem Schüler schon in Untersekunda einen Weg zu zeigen, auf dem man zu dem gesuchten Logarithmus einer gegebenen Zahl eine untere und eine obere Grenze berechnen kann. Natürlich muß es dem Lehrer überlassen bleiben, zu entscheiden, bis zu welchen Primzahlen er eine derartige Berechnung zeigt. Wer nicht viel Zeit für dieses Kapitel der Arithmetik übrig hat, wird sich mit der Feststellung der Grenzen der Logarithmen der ersten zwölf Zahlen begnügen. Auch dann wird dem Untersekundaner eine Logarithmentafel nicht mehr wie ein Wunderbuch erscheinen, mit dessen Hilfe er bequemer rechnen kann, von dem er aber nicht erfahren hat, wie es möglich ist, die vielen Zahlen eines solchen Wunderbuches zu berechnen.

In der hier nun folgenden Liste der unteren und der oberen Grenzen der Logarithmen aller ein- und zweiziffrigen Zahlen ist der Unterschied der Grenzen in Hunderttausendteln immer in Klammer beigesetzt, und zwar sind alle Grenzen so angegeben, wie sie oben elementar berechnet sind.

Elementar berechnete Logarithmentafel aller ein- und zweiziffrigen Zahlen.

$$
\begin{aligned}
(0)\quad & 0{,}00000 = \log 1 = 0{,}00000\\
(5)\quad & 0{,}30101 < \log 2 < 0{,}30106\\
(7)\quad & 0{,}47709 < \log 3 < 0{,}47716\\
(10)\quad & 0{,}60202 < \log 4 < 0{,}60212\\
(5)\quad & 0{,}69894 < \log 5 < 0{,}69899\\
(12)\quad & 0{,}77810 < \log 6 < 0{,}77822\\
(13)\quad & 0{,}84503 < \log 7 < 0{,}84516\\
(15)\quad & 0{,}90303 < \log 8 < 0{,}90318\\
(14)\quad & 0{,}95418 < \log 9 < 0{,}95432\\
(0)\quad & 1{,}00000 = \log 10 = 1{,}00000\\
(12)\quad & 1{,}04134 < \log 11 < 1{,}04146\\
(17)\quad & 1{,}07911 < \log 12 < 1{,}07928\\
(17)\quad & 1{,}11388 < \log 13 < 1{,}11405\\
(18)\quad & 1{,}14604 < \log 14 < 1{,}14622\\
(12)\quad & 1{,}17603 < \log 15 < 1{,}17615\\
(20)\quad & 1{,}20404 < \log 16 < 1{,}20424\\
(20)\quad & 1{,}23038 < \log 17 < 1{,}23058\\
(19)\quad & 1{,}25519 < \log 18 < 1{,}25538
\end{aligned}
$$

(18) $1{,}27869 < \log 19 < 1{,}27887$
(5) $1{,}30101 < \log 20 < 1{,}30106$
(20) $1{,}32212 < \log 21 < 1{,}32232$
(17) $1{,}34235 < \log 22 < 1{,}34252$
(26) $1{,}36165 < \log 23 < 1{,}36191$
(22) $1{,}38012 < \log 24 < 1{,}38034$
(10) $1{,}39788 < \log 25 < 1{,}39798$
(22) $1{,}41489 < \log 26 < 1{,}41511$
(21) $1{,}43127 < \log 27 < 1{,}43148$
(23) $1{,}44705 < \log 28 < 1{,}44728$
(18) $1{,}46232 < \log 29 < 1{,}46250$
(7) $1{,}47709 < \log 30 < 1{,}47716$
(22) $1{,}49129 < \log 31 < 1{,}49151$
(25) $1{,}50505 < \log 32 < 1{,}50530$
(19) $1{,}51843 < \log 33 < 1{,}51862$
(25) $1{,}53139 < \log 34 < 1{,}53164$
(18) $1{,}54397 < \log 35 < 1{,}54415$
(19) $1{,}55620 < \log 36 < 1{,}55639$
(27) $1{,}56812 < \log 37 < 1{,}56839$
(23) $1{,}57970 < \log 38 < 1{,}57993$
(24) $1{,}59097 < \log 39 < 1{,}59121$
(10) $1{,}60202 < \log 40 < 1{,}60212$
(20) $1{,}61270 < \log 41 < 1{,}61290$
(25) $1{,}62313 < \log 42 < 1{,}62338$
(25) $1{,}63340 < \log 43 < 1{,}63365$
(22) $1{,}64336 < \log 44 < 1{,}64358$
(19) $1{,}65312 < \log 45 < 1{,}65331$
(31) $1{,}66266 < \log 46 < 1{,}66297$
(35) $1{,}67201 < \log 47 < 1{,}67236$
(27) $1{,}68113 < \log 48 < 1{,}68140$
(26) $1{,}69006 < \log 49 < 1{,}69032$
(5) $1{,}69894 < \log 50 < 1{,}69899$
(27) $1{,}70747 < \log 51 < 1{,}70774$
(27) $1{,}71590 < \log 52 < 1{,}71617$
(37) $1{,}72414 < \log 53 < 1{,}72451$
(26) $1{,}73228 < \log 54 < 1{,}73254$
(17) $1{,}74028 < \log 55 < 1{,}74045$
(28) $1{,}74806 < \log 56 < 1{,}74834$
(25) $1{,}75578 < \log 57 < 1{,}75603$
(23) $1{,}76333 < \log 58 < 1{,}76356$
(24) $1{,}77077 < \log 59 < 1{,}77101$

(12) $1{,}77810 < \log 60 < 1{,}77822$
(27) $1{,}78524 < \log 61 < 1{,}78551$
(27) $1{,}79230 < \log 62 < 1{,}79257$
(27) $1{,}79921 < \log 63 < 1{,}79948$
(30) $1{,}80606 < \log 64 < 1{,}80636$
(22) $1{,}81282 < \log 65 < 1{,}81304$
(24) $1{,}81944 < \log 66 < 1{,}81968$
(33) $1{,}82599 < \log 67 < 1{,}82632$
(30) $1{,}83240 < \log 68 < 1{,}83270$
(33) $1{,}83874 < \log 69 < 1{,}83907$
(13) $1{,}84503 < \log 70 < 1{,}84516$
(28) $1{,}85116 < \log 71 < 1{,}85144$
(24) $1{,}85721 < \log 72 < 1{,}85745$
(34) $1{,}86322 < \log 73 < 1{,}86356$
(32) $1{,}86913 < \log 74 < 1{,}86945$
(17) $1{,}87497 < \log 75 < 1{,}87514$
(28) $1{,}88071 < \log 76 < 1{,}88099$
(25) $1{,}88637 < \log 77 < 1{,}88662$
(29) $1{,}89198 < \log 78 < 1{,}89227$
(28) $1{,}89752 < \log 79 < 1{,}89780$
(15) $1{,}90303 < \log 80 < 1{,}90318$
(28) $1{,}90836 < \log 81 < 1{,}90864$
(25) $1{,}91371 < \log 82 < 1{,}91396$
(30) $1{,}91900 < \log 83 < 1{,}91930$
(30) $1{,}92414 < \log 84 < 1{,}92444$
(25) $1{,}92932 < \log 85 < 1{,}92957$
(30) $1{,}93441 < \log 86 < 1{,}93471$
(25) $1{,}93941 < \log 87 < 1{,}93966$
(27) $1{,}94437 < \log 88 < 1{,}94464$
(29) $1{,}94929 < \log 89 < 1{,}94958$
(14) $1{,}95418 < \log 90 < 1{,}95432$
(30) $1{,}95891 < \log 91 < 1{,}95921$
(36) $1{,}96367 < \log 92 < 1{,}96403$
(29) $1{,}96838 < \log 93 < 1{,}96867$
(40) $1{,}97302 < \log 94 < 1{,}97342$
(23) $1{,}97763 < \log 95 < 1{,}97786$
(32) $1{,}98214 < \log 96 < 1{,}98246$
(36) $1{,}98666 < \log 97 < 1{,}98702$
(31) $1{,}99107 < \log 98 < 1{,}99138$
(26) $1{,}99552 < \log 99 < 1{,}99578.$

Die in § 7 begonnene Liste der unteren und oberen Grenzen der Logarithmen der ein- und zweiziffrigen Zahlen, wie sie sich aus den elementar bewiesenen drei grundlegenden Ungleichungen ergeben hat, läßt sich beliebig weit fortsetzen; nur, daß es keinen rechten Sinn hat, solche Grenzen für die Logarithmen von Zahlen mit mehr als drei Stellen zu berechnen. Denn bei einer Zahl mit mehr als drei Ziffern wird man ebenso gute Grenzen erhalten, wenn man diese Zahl auf eine durch zehn teilbare vierziffrige Zahl abrundet, durch zehn dividiert und den Logarithmus der entstandenen dreiziffrigen Zahl nach dem Obigen in Grenzen einschließt und endlich die Kennziffer Zwei dieser dreiziffrigen Zahl um soviel Einheiten erhöht, wie die gegebene Zahl mehr als drei Ziffern hat.

Während wir oben, um eine gute untere Grenze des Logarithmus einer Primzahl zu finden, die grundlegende Ungleichung (1) auf das Quadrat dieser Primzahl anwandten, haben wir dies bei Primzahlen über Hundert nicht mehr nötig; sondern wir können Formel (1) direkt auf die Primzahl selbst anwenden. Auch wird man bei ungeraden zusammengesetzten Zahlen den gesuchten Logarithmus nicht immer aus den Logarithmen ihrer Primfaktoren znsammensetzen, sondern häufig die Grundformel (1) direkt auf die ungerade zusammengesetzte Zahl anwenden, und zwar immer denjenigen von den beiden Wegen wählen, der zu der größeren unteren Grenze des Logarithmus führt. Um zu einer guten unteren und oberen Grenze des Logarithmus einer geraden Zahl zu gelangen, wird man stets Formel (1) anwenden, d. h. zur unteren Grenze des Logarithmus der Hälfte dieser geraden Zahl 0,30101 addieren, um zur gesuchten unteren Grenze zu gelangen, und zur oberen Grenze des Logarithmus der Hälfte der geraden Zahl 0,30106 addieren, um zur gesuchten oberen Grenze zu gelangen. Nachdem bei einer Serie von Zahlen die unteren Grenzen ihrer Logarithmen berechnet sind, was sehr bequem ist, kann man die oberen Grenzen ihrer Logarithmen nach der grundlegenden Ungleichung (2) oder (3) berechnen, und zwar wird man meist die Ungleichung (3) bevorzugen, weil sie zur besseren oberen Grenze, d. h. zur kleineren Grenze führt. Dieses Verfahren, das wir Verdoppelungsverfahren*) nennen wollen, läßt sich auch kurz in Formelsprache ausdrücken, wenn wir die untere und die obere Grenze von $\log x$ kurz mit

$$u_x \text{ bezw. } o_x$$

bezeichnen. Wir haben dann:

$$u_2 + u_x < \log(2x) < o_2 + o_x,$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot u_{2x} + \tfrac{1}{2} \cdot u_{2x+2} < \log(2x+1), \qquad (F \cdot 1)$$

$$\log(2x+1) < o_{2x} + \tfrac{1}{3} o_{2x+2} - \tfrac{1}{3} u_{2x-1}, \qquad (F \cdot 2)$$

*) In einer nicht gedruckten Besprechung meines Buches „Elementare Berechnung der Logarithmen“ (Leipzig 1903) schlug mir Herr Braun in Trier vor, dieses Verfahren bei Anwendung der dort bewiesenen Tripelformel (Seite 30)

$$\frac{d}{2x^2-1} < 2\log x - \log(x-1) - \log(x+1) < \frac{d}{2x^2-1} + \frac{d}{7(2x^2-1)(x^2-1)}$$

anzuwenden, um für die Logarithmen größerer Zahlen gute Grenzen zu finden. Die Anwendung dieses Verdoppelungsverfahrens verdanke ich also Herrn Braun.

oder

$$\log(2x+1) < \tfrac{2}{3} o_{2x} + \tfrac{2}{3} o_{2x+2} - \tfrac{1}{6} u_{2x-1} - \tfrac{1}{6} u_{2x+3}, \qquad (F \cdot 3)$$

wo bei Formel (2) und (3) hinter den Minuszeichen die unteren Grenzen zu nehmen waren, damit dadurch die das Größere enthaltenden rechten Seiten noch größer werden.

Da die Grenzen von log 2 sich um fünf Hunderttausendtel unterscheiden, so wird durch Anwendung des Verdoppelungsverfahrens der Grenzunterschied für gerade Zahlen nur um fünf Hunderttausendtel erhöht. Der Grenzunterschied für den Logarithmus von ungeraden Zahlen wird zwar meist um etwas mehr erhöht, doch ist nicht zu befürchten, daß er auch nur annähernd den Betrag von einem Tausendtel erreicht.

Wir fügen nun noch einige Serien von Grenzunterschieden von Logarithmen dreiziffriger Zahlen beispielsweise hinzu.

Erste Serie log 120 bis log 126.

(17) $2{,}07911 < \log 120 < 2{,}07928$
(24) $2{,}08268 < \log 121 < 2{,}08292$
(32) $2{,}08625 < \log 122 < 2{,}08657$
(27) $2{,}08979 < \log 123 < 2{,}09006$
(32) $2{,}09331 < \log 124 < 2{,}09363$
(15) $2{,}09682 < \log 125 < 2{,}09697$
(32) $2{,}10022 < \log 126 < 2{,}10054$

Zweite Serie log 242 bis log 250.

(29) $2{,}38369 < \log 242 < 2{,}38398$
(33) $2{,}38547 < \log 243 < 2{,}38580$
(37) $2{,}38726 < \log 244 < 2{,}38763$
(28) $2{,}38903 < \log 245 < 2{,}38931$
(32) $2{,}39080 < \log 246 < 2{,}39112$
(35) $2{,}39257 < \log 247 < 2{,}39292$
(37) $2{,}39432 < \log 248 < 2{,}39469$
(27) $2{,}39610 < \log 249 < 2{,}39637$
(10)*) $2{,}39788 < \log 250 < 2{,}39798$

Dritte Serie von log 488 bis log 500.

(42) $2{,}68827 < \log 488 < 2{,}68869$
(47) $2{,}68916 < \log 489 < 2{,}68963$
(26) $2{,}69006 < \log 490 < 2{,}69032$
(43) $2{,}69093 < \log 491 < 2{,}69136$

*) Wir fügen im Hinblick auf die Anmerkung zur dritten Serie hinzu, daß die untere Grenze von log 252 die Summe von 0,30101 und 2,10022, als der unteren Grenze von log 126 ist, und daß deshalb die untere Grenze von log 251 das arithmetische Mittel zwischen 2,39788 und 2,40123, also gleich 2,39955 ist.

$$(37)\quad 2{,}69181 < \log 492 < 2{,}69218$$
$$(39)\quad 2{,}69269 < \log 493 < 2{,}69308$$
$$(40)\quad 2{,}69358 < \log 494 < 2{,}69398$$
$$(31)\quad 2{,}69446 < \log 495 < 2{,}69477$$
$$(42)\quad 2{,}69533 < \log 496 < 2{,}69575$$
$$(38)\quad 2{,}69622 < \log 497 < 2{,}69660$$
$$(32)\quad 2{,}69711 < \log 498 < 2{,}69743$$
$$(30)\quad 2{,}69802 < \log 499 < 2{,}69832^{*})$$
$$(5)\quad 2{,}69894 < \log 500 < 2{,}69899.$$

IV.

Eine noch viel genauere Berechnung der Logarithmen, allein durch die Tripelformel.

In meinem Buche „Elementare Berechnung der Logarithmen“**) sind die Logarithmen sowohl durch die Tripelformel, wie auch durch die von mir gefundene Sieglitzformel berechnet. In meinem Artikel I***) habe ich auf diese, wie es scheint, ganz neuen Methoden der Berechnung der Logarithmen, die mit Primanern höherer Schulen, die die logarithmischen Reihen nicht kennen lernen, durchgenommen werden können, nur aufmerksam gemacht. Sie setzen nur die Kenntnis des binomischen Lehrsatzes voraus, falls der Exponent ein Buchstabe ist. In meinen Artikeln II und III†) habe ich eine Methode gezeigt, durch welche man zu zwei Grenzen für den Logarithmus jeder Zahl gelangen kann, ohne daß man bei dem Schüler andere Kenntnisse, als die elementaren Gesetze des Logarithmierens und die Formen für $(a + b)(a - b)$, $(a - b)^2$, $(a - b)^3$ und $(a - b)^4$ als bekannt vorauszusetzen braucht, und ohne daß die gefundene untere und obere Grenze einige Zehntausendtel oder höchstens ein Tausendtel überschreiten kann.

Hier in diesem Artikel soll nun die in dem zitierten Buche mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes bewiesene Tripelformel benutzt werden, um die Logarithmen noch viel genauer zu berechnen, als es anfänglich geschehen ist. So wird sich für den Logarithmus der kleinsten Primzahl Zwei auf diesem Wege ergeben:

$$0{,}3010299955 < \log 2 < 0{,}3010299958,$$

also eine untere und eine obere Grenze, die sich um drei Zehntausendmilliontel unterscheiden.

---

*) Zur Berechnung der oberen Grenze von $\log 499$ nach Grundformel (3) war die untere Grenze von $\log 501$ nötig, die gleich 2,69975 ist, weil sie nach Formel (1) das arithmetische Mittel der unteren Grenzen von $\log 500 = 2{,}69894$ und von $\log 502 = 0{,}30101 + \log 251 = 0{,}30101 + 2{,}39955 = 2{,}70056$ ist.

**) Leipzig, 1903.

***) Zeitschrift für den mathematischen Unterricht, 1903, Heft 7.

†) Dieselbe Zeitschrift, 1903, Heft 8.

Wenn man nämlich die Tripelformel:

$$\frac{d}{x^2-1} < 2\log x - \log(x-1) - \log(x+1) < \frac{d}{2x^2-1} + \frac{d}{(2x^2-1)\cdot 7\cdot(x^2-1)},$$

wo d eine noch zu bestimmende Konstante ist, auf die Zahlen $x = 121$, 122, 123, 124, 125, 243, 244, 1024 anwendet, so erhält man, nachdem man jede der vorkommenden Zahlen in Primfaktoren zerlegt hat und immer für den Logarithmus eines Produktes die Summe der Logarithmen seiner Primfaktoren gesetzt hat, nacheinander:

1) $f_{121} < -\log 61 + 4\log 11 - \log 3 - 3\log 2 - 1 < g_{121}$,
2) $f_{122} < +2\log 61 - \log 41 - 2\log 11 - \log 3 + 2\log 2 < g_{122}$,
3) $f_{123} < -\log 61 + 2\log 41 - \log 31 + 2\log 3 - 3\log 2 < g_{123}$,
4) $f_{124} < -\log 41 + 2\log 31 - \log 3 + 7\log 2 - 3 < g_{124}$,
5) $f_{125} < -\log 31 - \log 7 - 2\log 3 - 9\log 2 + 6 < g_{125}$,
6) $f_{243} < -\log 61 - 2\log 11 + 10\log 3 - 3\log 2 < g_{243}$,
7) $f_{244} < +2\log 61 - 2\log 7 - 5\log 3 + 5\log 2 - 1 < g_{244}$,
8) $f_{1024} < -\log 41 - \log 31 - \log 11 - \log 3 + 22\log 2 - 2 < g_{1024}$.

Hier ist immer $\log 5 = 1 - \log 2$ gesetzt, und die untere Grenze

$$\frac{d}{2x^2-1} \text{ mit } f_x$$

bezeichnet, während für die obere Grenze

$$\frac{d}{2x^2-1} + \frac{d}{(2x^2-1)\cdot 7\cdot(x^2-1)}$$

das Zeichen g_x gesetzt ist. Die weitere Ausrechnung ergibt:

$f_{121} = 0{,}00003\,41518 \cdot d$	$g_{121} = 0{,}00003\,41522 \cdot d$
$f_{122} = 0{,}00003\,35942 \cdot d$	$g_{122} = 0{,}00003\,35946 \cdot d$
$f_{123} = 0{,}00003\,30502 \cdot d$	$g_{123} = 0{,}00003\,30506 \cdot d$
$f_{124} = 0{,}00003\,25192 \cdot d$	$g_{124} = 0{,}00003\,25196 \cdot d$
$f_{125} = 0{,}00003\,20010 \cdot d$	$g_{125} = 0{,}00003\,20014 \cdot d$
$f_{243} = 0{,}00000\,84676 \cdot d$	$g_{243} = 0{,}00000\,84677 \cdot d$
$f_{244} = 0{,}00000\,83983 \cdot d$	$g_{244} = 0{,}00000\,83984 \cdot d$
$f_{1024} = 0{,}00000\,04768 \cdot d$	$g_{1024} = 0{,}00000\,04769 \cdot d$.

Setzt man diese Zahlenwerte, die aus meiner Tripelformel ohne weiteres hervorgehen, in die Ungleichungen (1) bis (8) ein, so erhält man achtmal einen Ausdruck, der eine algebraische Summe von Vielfachen von Logarithmen ist, in zwei Grenzen eingeschlossen, von denen jede das Produkt eines zehnstelligen Dezimalbruchs mit der noch als Unbekannte zu betrachtenden Größe d ist, und zwar sind diese Logarithmen die von den sieben Primzahlen:

2, 3, 7, 11, 31, 41, 61.

Es ist nun sehr leicht, die Größe d und die unbekannten Logarithmen der Primzahlen 7, 11, 31, 41, 61 zu eliminieren, um $\log 2$ und $\log 3$ zu erhalten. Dabei hat man zunächst durch Multiplikation die beiden Koeffizienten des aus zwei Ungleichungen zu eliminierenden Logarithmus gleich zu machen. Wenn dann die Vorzeichen verschieden sind, hat man die beiden Ungleichungen zu addieren. Sind die Vorzeichen gleich, hat man vorher bei der einen alle Vorzeichen umzukehren, die beiden Grenzen f_x und g_x miteinander zu vertauschen, und dann zu addieren.

Da $\log 7$ nur in zwei von den acht Ungleichungen vorkommt, nämlich in (5) und (7), so wird man mit der Elimination von $\log 7$ beginnen. Dann erhält man zwischen d und $\log 2$, $\log 3$, $\log 11$, $\log 31$, $\log 41$, $\log 61$ das folgende System von Ungleichungen:

(9) $0{,}00005\,56036 \cdot d < -2\log 61 - 2\log 31 + \log 3 - 23\log 2 + 13 < 0{,}00005\,56045 \cdot d;$

(10) $0{,}00003\,41518 \cdot d < -\log 61 + 4\log 11 - \log 3 - 3\log 2 - 1 < 0{,}00003\,41522 \cdot d;$

(11) $0{,}00003\,35942 \cdot d < +2\log 61 - \log 41 - 2\log 11 - \log 3 + 2\log 2 < 0{,}00003\,35946 \cdot d;$

(12) $0{,}00003\,30502 \cdot d < -\log 61 + 2\log 41 - \log 31 + 2\log 3 - 3\log 2 < 0{,}00003\,30506 \cdot d;$

(13) $0{,}00003\,25192 \cdot d < -\log 41 + 2\log 31 - \log 3 + 7\log 2 - 3 < 0{,}00003\,25196 \cdot d;$

(14) $0{,}00000\,84676 \cdot d < -\log 61 - 2\log 11 + 10\log 3 - 3\log 2 < 0{,}00000\,84677 \cdot d;$

(15) $0{,}00000\,04768 \cdot d < -\log 41 - \log 31 - \log 11 - \log 3 + 22\log 2 - 2 < 0{,}0000\,04769 \cdot d.$

Wenn man nun weiter $\log 41$ in derselben Weise eliminiert, so erhält man:

(16) $0{,}00003\,31173 \cdot d < +2\log 61 + \log 31 - \log 11 - 20\log 2 + 2 < 0{,}00003\,31178 \cdot d;$

(17) $0{,}00003\,40038 \cdot d < -\log 61 - 3\log 31 - 2\log 11 + 41\log 2 - 4 < 0{,}00003\,40044 \cdot d;$

(18) $0{,}00003\,20423 \cdot d < +3\log 31 + \log 11 - 15\log 2 - 1 < 0{,}00003\,20428 \cdot d;$

(19) $0{,}00005\,56036 \cdot d < -2\log 61 - 2\log 31 + \log 3 - 23\log 2 + 13 < 0{,}00005\,56045 \cdot d;$

(20) $0{,}00003\,41518 \cdot d < -\log 61 + 4\log 11 - \log 3 - 3\log 2 - 1 < 0{,}00003\,41522 \cdot d;$

(21) $0{,}00000\,84676 \cdot d < -\log 61 - 2\log 11 + 10\log 3 - 3\log 2 < 0{,}00000\,84677 \cdot d.$

Die Elimination von log 61 ergibt dann:

(22) $0{,}00005\,00525 \cdot d < +\log 31 - 5\log 11 + 20\log 3 - 26\log 2 + 2 < 0{,}00005\,00532 \cdot d;$

(23) $0{,}00002\,55361 \cdot d < -3\log 31 - 10\log 3 + 44\log 2 - 4 < 0{,}00002\,55368 \cdot d;$

(24) $0{,}00003\,86682 \cdot d < -2\log 31 + 4\log 11 - 19\log 3 - 17\log 2 + 13 < 0{,}00003\,86693 \cdot d;$

(25) $0{,}00002\,56841 \cdot d < +6\log 11 - 11\log 3 - 1 < 0{,}00002\,56846 \cdot d;$

(26) $0{,}00003\,20423 \cdot d < +3\log 31 + \log 11 - 15\log 2 - 1 < 0{,}00003\,20428 \cdot d.$

Wenn man dann weiter log 31 eliminiert, so erhält man:

(27) $0{,}00017\,56936 \cdot d < -15\log 11 + 50\log 3 - 34\log 2 + 2 < 0{,}00017\,56964 \cdot d;$

(28) $0{,}00013\,87732 \cdot d < -6\log 11 + 21\log 3 - 69\log 2 + 17 < 0{,}00013\,87757 \cdot d;$

(29) $0{,}00011\,81147 \cdot d < -16\log 11 + 60\log 3 - 63\log 2 + 7 < 0{,}00011\,81173 \cdot d;$

(30) $0{,}00002\,56841 \cdot d < +6\log 11 - 11\log 3 - 1 < 0{,}00002\,56846 \cdot d.$

Wenn man nun noch log 11 eliminiert, so erhält man zwischen den drei Unbekannten d, log 2, log 3 das folgende System von drei Ungleichungen:

(31) $0{,}00034\,24732 \cdot d < +5\log 3 - 277\log 2 + 81 < 0{,}00034\,24913 \cdot d;$

(32) $0{,}00075\,58337 \cdot d < -12\log 3 - 363\log 2 + 115 < 0{,}00075\,58615 \cdot d;$

(33) $0{,}00016\,44573 \cdot d < +10\log 3 - 69\log 2 + 16 < 0{,}00016\,44603 \cdot d.$

Um hieraus log 2 zu berechnen, d. h. in Grenzen einzuschließen, die ihnstellige Dezimalbrüche sind, eliminieren wir log 3, und erhalten:

(34) $0{,}00052\,04861 \cdot d < -485\log 2 + 146 < 0{,}00052\,05253 \cdot d;$

(35) $0{,}00476\,59123 \cdot d < -2229\log 2 + 671 < 0{,}00476\,60693 \cdot d.$

Um die in (34) und (35) vorkommenden Koeffizienten etwas zu verringern, subtrahieren wir das Fünffache von (34) von der rückwärts, also mit Größenzeichen, gedachten Ungleichung (35) und erhalten:

(36) $0{,}00216\,32858 \cdot d < 196\log 2 - 59 < 0{,}00216\,36388 \cdot d.$

Nun erst eliminieren wir d, indem wir (36) durch die mit Größenzeichen gedachte Ungleichung (34) dividieren. Dann hebt sich d fort, und wir erhalten:

$$\frac{0{,}00216\,32858}{0{,}00052\,03253} < \frac{196\log 2 - 59}{146 - 485\log 2} < \frac{0{,}00216\,36388}{0{,}00052\,04861}$$

oder:

(38) $$0{,}31583\,97268 - 1{,}04819\,36130\log 2 < 0{,}10202\,29588\log 2 - 0{,}03071\,09927$$

und:

(39) $$0{,}10201\,52756\log 2 - 0{,}03070\,86799 < 0{,}31589\,12648 - 1{,}04936\,47180\cdot\log 2.$$

Aus (38) folgt dann:

$$\log 2 > \frac{34655\,07195}{115121\,65718} > 0{,}30102\,99955$$

und aus (39):

$$\log 2 < \frac{34659\,99447}{115138\,00936} < 0{,}30102\,99958.$$

Demnach ist nunmehr $\log 2$ in zwei Grenzen eingeschlossen, von denen die obere nur um drei Zehntausendmilliontel größer ist als die untere, sodaß

$$\log 2 = 0{,}30102\,9996$$

ein auf neun Dezimalstellen richtiges Resultat ist. Für $\log 3$ erhielt der Verfasser aus (31) bis (33)

$$0{,}47712\,1252 < \log 3 < 0{,}47712\,1258.$$

Da durch die Tripelformel die Logarithmen aller übrigen Primzahlen auf den als berechnet vorausgesetzten Logarithmen von Zwei und Drei beruhen, so werden nun die Grenzen dieser Logarithmen viel enger, als sie in meinem Buche berechnet sind. Doch ist das Verfahren genau dasselbe wie dort. Nur für die Logarithmen von Zahlen, die mehr als zwei Ziffern haben, ist ein Verfahren vorzuziehen, auf das mich Herr Braun in Trier aufmerksam gemacht hat, und das ich *Verdoppelungsverfahren* nennen möchte. Während in meinem Buche auch die Logarithmen von ungeraden zusammengesetzten Zahlen aus den Logarithmen ihrer Primfaktoren zusammengesetzt werden, werden bei dem Verdoppelungsverfahren solche Logarithmen aus den Logarithmen der beiden die ungerade Zahl einschließenden geraden Zahlen durch die Tripelformel berechnet, wodurch man bei größeren Zahlen meist engere Grenzen erhält. Hierbei ist vorausgesetzt, daß man die Logarithmen der geraden Zahlen schon kennt. Diese aber erhält man aus den Logarithmen ihrer Hälften, da:

$$u_2 + u_x < \log(2x) < o_2 + o_x,$$

wo u_i und o_i beziehungsweise die untere und die obere Grenze von $\log i$ sind. Da, wie oben berechnet ist,

$$u_2 = 0{,}30102\,99955,$$
$$o_2 = 0{,}30102\,99958$$

ist, so ist der Grenzunterschied bei $\log(2x)$ nur um höchstens:

$$0{,}00000\,00003$$

größer als bei $\log x$. Wegen der Tripelformel geschieht also, bei planmäßigem Vorgehen von den Logarithmen der kleineren Zahlen zu denen der größeren, die Berechnung des Logarithmus jeder ungeraden Zahl $2x+1$ aus den als berechnet vorliegenden unteren und oberen Grenzen von $\log x$, von $\log(x+1)$ und von $\log 2$. Vor Anwendung dieses Verfahrens müssen natürlich eine untere und eine obere Grenze der Konstanten d berechnet sein. Dies geschieht durch Elimination von $\log 2$ aus (34) und (35). —

Hamburg, 11. April 1904.

Die Transformation der Ausdrücke $[q\ q]$

n solche, deren Variablen Bedingungsgleichungen erfüllen

von

Oberlehrer **Dr. Ernst Schultz.**

Beilage zum Programm

des Schiller-Realgymnasiums zu Stettin.

Ostern 1906.

Gedruck bei Hermann Saran in Stettin.

34325

Transformation der Ausdrücke $[\varphi\psi]$ in solche, deren Variablen Bedingungsgleichungen erfüllen.

Jacobi behandelt in seiner Abhandlung: „Nova methodus aequationes differentiales partiales ordinis inter numerum variabilium quemqunque propositas integrandi" die Aufgabe, den Aus- $[\varphi\psi]$ in einen solchen zu transformieren, dessen Variablen Bedingungsgleichungen erfüllen. Problem führt Jacobi mit den Worten ein: Quum propter rei utilitatem, tum propter egregiam difficultatem, tum etiam, qui accurate examinare iuvat, quaecunque spectant ad expressionem antis proprietatibus gaudentem, investigabo hic expressionem." Um am Schlusse seiner Unter- g über diesen Gegenstand besonders auf die Schwierigkeit hinzudeuten, führt er die Worte an: formula generalis satis difficilis erat investigatu". Diese Schwierigkeit, welche das genannte m zeigt, reizte mich, dasselbe noch einmal zu behandeln in der Absicht, Gleichungssysteme auf- n, aus denen direct die zur Transformation notwendigen Gleichungen abgeleitet werden können. ergeben sich auf natürliche Weise die von Jacobi eingeführten Grössen, deren Einführung in reffenden Abhandlung recht künstlich erscheint. Gewiss werde ich hierbei auf dieselben Aus- geführt, aber durch meine Behandlung wird der innere Zusammenhang der betreffenden ein- en Grössen dargetan. Zum Schlusse werde ich einige Umkehrungen der von Jacobi aufgestellten bleiten, wenn eine der Functionen φ oder ψ eine Lösung des Systems der Differentialgleichungen en Variabeln die Bedingungsgleichungen erfüllen.

1.

Ist H eine Function der Grössen $q_1, q_2, \ldots q_m, q_1', q_2' \ldots q_m'$, wo $q_i' = \frac{dq_i}{dt} (i = 1, 2, \ldots m)$ d setzt man ferner $p_i = \frac{\partial H}{\partial q_i'}$ $(i = 1, 2, \ldots m)$, so besteht das System der Differentialgleichungen:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} ; \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots m)$$

Werden für die m Variablen q die μ Variablen $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_\mu$ eingeführt, welche die dingungsgleichungen erfüllen,

$$F_i(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu - m)$$

entspricht dem System 1) das Gleichungssystem

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots \mu)$$

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} - \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial \xi_i} - \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial \xi_2} \cdots - \lambda_{\mu-m} \frac{\partial F_{\mu-m}}{\partial \xi_i}$$

wo $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_\mu - m$ die bekannten Lagrange'schen Multiplicatoren sind. Ersetzt man in Gleichungssystemen 2) und 3) die Variabeln ξ durch die Variabeln q, so werden die Gleichu des Systems 2) identisch erfüllt, und das System 3) geht in das System 1) über. Sind φ u zwei Functionen der Grösse $\xi_1 \ldots \xi_\mu, \xi'_1, \ldots \xi'_\mu$ oder $q_1 \ldots q_m, q'_1 \ldots q'_m$, so soll die für $[\varphi\psi]$ gesucht werden, in welche sie übergeht, wenn für die Variabeln q die Variab eingeführt werden. Es ergiebt sich

$$[\varphi\psi] = \sum_{k,k',i} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k} \frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}} - \frac{\partial\varphi}{\partial v_{k'}} \frac{\partial\psi}{\partial\xi_k} \right\} \frac{\partial\xi_k}{\partial q_i} \frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i} +$$

$$+ \sum_{k,k',i} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial v_k} \frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}} - \frac{\partial\varphi}{\partial v_{k'}} \frac{\partial\psi}{\partial v_k} \right\} \frac{\partial v_k}{\partial q_i} \frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i}$$

wo die Summen über k und k' sich erstrecken von 1 bis μ, die Summe über i sich von 1 erstreckt.

Die Ableitung der Formeln

$$\frac{\partial\xi'_i}{\partial q'_s} = \frac{\partial\xi_i}{\partial q_s} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots \mu \\ s = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix}$$

ergiebt sich aus den Gleichungen

$$\xi'_i = \frac{\partial\xi_i}{\partial q_1} q'_1 + \ldots \frac{\partial\xi_i}{\partial q_m} q'_m \qquad (i = 1, 2 \ldots \mu).$$

4) Zur Ableitung der Formeln

$$p_i = v_1 \frac{\partial\xi_1}{\partial q_i} + v_2 \frac{\partial\xi_2}{\partial q_i} + \ldots v_\mu \frac{\partial\xi_\mu}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots m)$$

denken wir uns in den Formeln $p_i = \frac{\partial H}{\partial q'_i}$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ H als Function der Variablen ergiebt sich

$$p_i = \sum_{\sigma_2}^{\mu} \frac{\partial H}{\partial\xi'_\sigma} \frac{\partial\xi'_\sigma}{\partial q'_i}$$

Setzen wir $v_\sigma = \frac{\partial H}{\partial\xi_\sigma}$ $(\sigma = 1, 2 \ldots \mu)$ und wenden wir die Gleichung 3) an, so ergiebt die Formel

$$p_i = v_1 \frac{\partial\xi_1}{\partial q_i} + v_2 \frac{\partial\xi_2}{\partial q_i} + \ldots v_\mu \frac{\partial\xi_\mu}{\partial q_i}$$

Was die Bedingungsgleichungen $F_1 = 0; \ldots F_\mu - m = 0$ betrifft, so werden die Identitäten, wenn wir für die Variablen ξ die aus der Integration des Systems 3) sich ergeb Funktionen der Zeit einsetzen.

Führen wir dann die Differentiation nach t aus, so erhalten wir

$$\frac{\partial F_r}{\partial\xi_1} \frac{d\xi_1}{dt} + \frac{\partial F_r}{\partial\xi_2} \frac{d\xi_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial F_r}{\partial\xi_\mu} \frac{d\xi_\mu}{dt} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots \mu$$

woraus wir erhalten

$$\frac{\partial F_r}{\partial\xi_1} \frac{\partial H}{\partial v_1} + \frac{\partial F_r}{\partial\xi_2} \frac{\partial H}{\partial v_2} + \ldots + \frac{\partial F_r}{\partial\xi_\mu} \frac{\partial H}{\partial v_\mu} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots \mu$$

Setzen wir die linke Seite gleich A_r, so erhalten wir das System

5) $$A_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots \mu - m)$$

Dieses Gleichungssystem muss zwischen den Variablen ξ und v bestehen, wenn die Bedingungsgleichungen 2) erfüllt werden sollen. Führt man für die Variabeln ξ und v die Variabeln q und p ein, so muss das Gleichungssystem 5) identisch befriedigt werden.

2.

Der Ausdruck $\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} \frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i}$.

Nach Jacobi setzen wir:

$$\sum_{i=1}^{\mu-m} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} \frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i} = k_{k'}$$

$$\sum_{i=1}^{\mu-m} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} \frac{\partial v_k}{\partial p_i} = k_k \qquad (k, k' = 1, 2, \ldots \mu).$$

Um diese Ausdrücke in den Variabeln ξ und v darzustellen, gehen wir von den Formeln) aus. Da die angeführten Gleichungen durch Einsetzen der Variabeln q und p identisch efriedigt werden müssen, so ergiebt sich durch Differentiation nach der Variablen p_i das System:

$$\frac{\partial v_1}{\partial p_i} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_1} + \frac{\partial v_2}{\partial p_i} \frac{\partial \xi_2}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_1} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial p_i} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_2} + \frac{\partial v_2}{\partial p_i} \frac{\partial \xi_2}{\partial q_2} + \ldots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_2} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial p_i} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial v_2}{\partial p_i} \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \ldots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i} = 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial p_i} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_m} + \frac{\partial v_2}{\partial p_i} \frac{\partial \xi_2}{\partial q_m} + \ldots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_m} = 0$$

Multiplicieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_1}$, $\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_2}$, $\ldots$ $\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_m}$ und addieren wir die alsdann erhaltenen Gleichungen, so ergiebt sich bei Einführung der Grössen $k_{k'}$

$$\frac{\partial v_1}{\partial p_1} 1_{k'} + \frac{\partial v_2}{\partial p_1} 2_{k'} + \ldots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_1} \mu_{k'} = 0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial p_2} 1_{k'} + \frac{\partial v_2}{\partial p_2} 2_{k'} + \ldots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_2} \mu_{k'} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial p_m} 1_{k'} + \frac{\partial v_2}{\partial p_2} 2_{k'} + \ldots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_m} \mu_{k'} = 0$$

Um ein System von μ Gleichungen zu erhalten, differentieren wir das System $F_1 = 0$ $F_{\mu - m} = 0$ nach den Variabeln $q_1, q_2 \ldots q_m$, sodass wir erhalten

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_r}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial F_r}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_1} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (r = 1, 2, \ldots \mu \\ &\frac{\partial F_r}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_m} + \ldots + \frac{\partial F_r}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_m} = 0 \end{aligned} \qquad 9)$$

Multiplicieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{\partial v_{k'}}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_m}$ und addiere die so erhaltenen Gleichungen, so ergiebt sich mit Einführung der Grössen k_k das System

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} 1_{k'} + \frac{\partial F_1}{\partial \xi_2} 2_{k'} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial \xi_\mu} \mu_{k'} = -\frac{\partial F_1}{\partial \xi_{k'}} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (k' = 1, 2, \\ &\frac{\partial F_{\mu - m}}{\partial \xi_1} 1_{k'} + \frac{\partial F_{\mu - m}}{\partial \xi_2} 2_{k'} + - + \frac{\partial F_{\mu - m}}{\partial \xi_\mu} \mu_k = - \frac{\partial F_{\mu - m}}{\partial \xi_{k'}} \end{aligned} \qquad 10)$$

Die Gleichungen 8) und 10) liefern nun ein System, um die Grössen $1_{k'}, \ldots \mu_{k'}$ durch $\frac{\partial F_1}{\partial \xi_{k'}} \ldots \frac{\partial F_{\mu - m}}{\partial \xi_{k'}}$ auszudrücken.

Bezeichnen wir die Determinante dieses Systems mit O und die zu dem Gliede O_{ik} gehö Unterdeterminante mit ω_{ik}, so erhalten wir:

$$-O_{ik'} = \frac{\partial F_1}{\partial \xi_{k'}} \omega_{m+1,i} + \frac{\partial F_2}{\partial \xi_{k'}} \omega_{m+2,i} + \ldots \frac{\partial F_{\mu - m}}{\partial \xi_{k'}} \omega_{\mu,i} \qquad (i, k' = 1, 2, \qquad 11)$$

Um die Ausdrücke $\frac{\omega_{m+1,i}}{O}, \ldots \frac{\omega_{\mu,i}}{O}$ durch die Variabeln ξ und v auszudrü gehen wir von den Formeln 5) aus. Beachten wir, dass die Grössen p nur infolge der Grö eingeführt werden, so erhalten wir durch Differentiation der A_r nach der Grösse p_1, p_2

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A_r}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial p_1} + \frac{\partial A_r}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial A_r}{\partial v_\mu}\frac{\partial v_\mu}{\partial p_1} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (r = 1, 2, \ldots \\ &\frac{\partial A_r}{\partial v_1}\frac{\partial v_i}{\partial p_m} + \frac{\partial A_r}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial p_m} + \ldots + \frac{\partial A_r}{\partial v_\mu}\frac{\partial v_\mu}{\partial p_m} = 0 \end{aligned} \qquad 12)$$

Multiplicieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{\partial \xi_k}{\partial q_1}, \frac{\partial \xi_k}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial \xi_k}{\partial q_m}$ und ad die so erhaltenen Gleichungen, so ergiebt sich

$$\frac{\partial A_r}{\partial v_k} = -\sum_{i=1}^{\mu} \frac{\partial A_r}{\partial v_i} k_i \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots \mu \\ k = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

Setzen wir den in 11) für $i_{k'}$ erhaltenen Ausdruck ein, so erhalten wir

$$O\,\frac{\partial A_r}{\partial v_k} = \omega_{m+1,k} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_r}{\partial v_\sigma}\,\frac{\partial F_1}{\partial \xi_\sigma} + \omega_{m+2,k} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_r}{\partial v_\sigma}\,\frac{\partial F_2}{\partial \xi_\sigma} + \cdots$$

$$+ \omega_{\mu,k} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_r}{\partial v_\sigma}\,\frac{\partial F_{\mu-m}}{\partial \xi_\sigma} \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2 \ldots \mu-m \\ k = 1, 2 \ldots \mu \end{pmatrix}$$

Die Coefficienten der Grössen ω sind die von Jacobi mit a_1, a_2, b_1 . . . bezeichneten Ausdrücke. Bei Jacobi erscheinen diese Ausdrücke meines Erachtens völlig unvermittelt. Der Symmetrie wegen wollen wir diese Coefficienten mit b_{ik} (i, k = 1, 2 . . . μ — m) bezeichnen, so dass

$$b_{ik} = \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_i}{\partial v_\sigma}\,\frac{\partial F_k}{\partial \xi_\sigma} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots \mu - m)$$

ist, von denen sich leicht nachweisen lässt, dass $b_{ik} = b_{ki}$ ist. Mit Einführung der Grössen b_{ik} gehen die Gleichungen 3) über in

$$O\,\frac{\partial A_r}{\partial v_k} = b_{r1}\,\omega_{m+1,k} + b_{r2}\,\omega_{m+2,k} + \cdots b_{r,\mu-m}\,\omega_{\mu k} \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots \mu - m \\ k = 1, 2, \ldots \mu \end{pmatrix}$$

Aus diesem System von $\mu - m$ Gleichungen lassen sich die $\mu - m$ Grössen $\omega_{m+1,k}, \ldots \omega_{\mu,k}$ linear durch die $\frac{\partial A_r}{\partial v}$ ausdrücken. Bezeichnen wir die Determinante dieses Systems mit $B = |b_{ik}|$ und die zu b_{ik} gehörende Unterdeterminante mit β_{ik}, so ist

$$B\omega_{m+s,k} = O\,\frac{\partial A_1}{\partial v_k}\,\beta_{1s} + O\,\frac{\partial A_2}{\partial v_k}\,\beta_{2s} + \cdots + O\,\frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial v_k}\,\beta_{\mu-m,s} \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2, \ldots \mu-m \\ k = 1, 2, \ldots \mu \end{pmatrix}$$

Jetzt lässt sich zeigen, dass B = O . D ist, wo

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial q_m} & \frac{\partial \xi_2}{\partial q_m} & \cdots & \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_m} \\ \frac{\partial A_1}{\partial v_1} & \frac{\partial A_1}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial A_1}{\partial v_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial v_1} & \frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial v_\mu} \end{vmatrix}$$

die Determinante des Systems der Gleichungen 7) und 10) ist. Um die Ableitung durch den Beweis nicht zu unterbrechen, will ich ihn am Ende derselben liefern. Somit erhalten wir, wenn wir O . D für B einführen, nach Division beider Seiten durch O

$$D\omega_{m+s,k} = \frac{\partial A_1}{\partial v_k}\,\beta_{1s} + \frac{\partial A_2}{\partial v_k}\,\beta_{2s} + \cdots + \frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial v_k}\,\beta_{\mu-m,s} \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2 \ldots \mu-m \\ k = 1, 2 \ldots \mu \end{pmatrix}$$

Setzt man die für ω erhaltenen Werte in 11) ein, so ergiebt sich

$$-O_{ik'} = \frac{1}{D}\frac{\partial F_1}{\partial \xi_{k'}}\left[\frac{\partial A_1}{\partial v_i}\beta_{11} + \frac{\partial A_2}{\partial v_i}\beta_{21} + \cdots + \frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial v_i}\beta_{\mu-m,1}\right] +$$

$$+\frac{1}{D}\frac{\partial F_2}{\partial \xi_{k'}}\left[\frac{\partial A_1}{\partial v_i}\beta_{12} + \frac{\partial A_2}{\partial v_i}\beta_{22} + \cdots + \frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial v_i}\beta_{\mu-m,2}\right] +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{D}\frac{\partial F_{\mu-m}}{\partial \xi_{k'}}\left[\frac{\partial A_1}{\partial v_i}\beta_{1,\mu-m} + \frac{\partial A_2}{\partial v_i}\beta_{2,\mu-m} + \cdots + \frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial v_i}\beta_{\mu-m,\mu-m}\right]$$

$$(i,k = 1,2,\ldots$$

Dividieren wir beide Seiten durch $-O$ und ersetzen wir OD durch B, so ist

16)
$$i_{k'} = -\frac{1}{B}\sum_{r,s=1}^{\mu-m}\frac{\partial F_r}{\partial \xi_{k'}}\frac{\partial A_s}{\partial v_i}\beta_{sr} \qquad (i,k' = 1,2,\ldots$$

Somit haben wir den Ausdruck $\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i}$ in den Variabeln ξ und v dargestellt.

von Jacobi in dem § 41 eingeführten Grössen $\lambda_s^{(i)}$ sind in meiner Bezeichnung gleich $-\frac{\omega_{m+}}{(}$ was sich aus den Gleichungen 11) ergiebt. Mit Einführung der aus 15) sich ergebenden ' für $\omega_{m+s,i}$, erhalten wir

$$\lambda_s^{(i)} = -\frac{\partial A_1}{\partial v_i}\frac{\beta_{1s}}{\partial B} - \frac{\partial A_2}{\partial v_i}\frac{\beta_{2s}}{B} - \cdots - \frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial v_i}\frac{\beta_{\mu s}}{B} \qquad \begin{pmatrix} s = 1,2\ldots\mu- \\ i - 1,2\ldots\mu \end{pmatrix}$$

was zu zeigen war.

3.

Beweis der Gleichung $B = O.D.$

Die Richtigkeit dieser Gleichung lässt sich leicht nachweisen mit Hülfe des Multiplic theorems der Determinanten. Multiplicieren wir die Zeilen der Determinante D mit den der Determinante O, so erhalten wir Glieder folgender Form:

$$\sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_i}\frac{\partial v_\sigma}{\partial p_k};\quad \sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_i}\frac{\partial F_k}{\partial \xi_\sigma};\quad \sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{\partial A_i}{\partial v_\sigma}\frac{\partial v_\sigma}{\partial p_k};\quad \sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{\partial A_i}{\partial v_\sigma}\frac{\partial F_k}{\partial \xi_\sigma}$$

Mit Berücksichtigung der Gleichungen 7, 9, 12, 14 wird

$$O.D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & & & & 0 \\ \cdots & & & & & & & & \cdots \\ & & & & 1 & & 0 & & 0 \\ & & & & b_{11} & & b_{12} & & b_{1,\mu-m} \\ & & & & b_{21} & & b_{22} & & b_{2,\mu-m} \\ & & & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ & & & & b_{\mu-m,1} & & b_{\mu-m,2} & & b_{\mu-m,\mu-m} \end{vmatrix}$$

Folglich wird $O.D = |b_{ik}| = B$, was zu zeigen war.

4.

Der Ausdruck $\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial v_k}{\partial q_i} \frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i}$

Nach Jacobi setzen wir $(k)_{k'} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial v_k}{\partial q_i} \frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i}$ und um diesen Ausdruck $(k)_{k'}$ in den Variabeln ξ, v darzustellen, gehen wir von den Gleichungen 4) aus. Da diese Gleichungen zu Identitäten werden, wenn für die Variabeln p und q die Grössen v und ξ eingeführt werden, so erhalten wir durch Differentiation der für p_i geltenden Gleichung nach q_r und der für p_r geltenden Gleichung nach q_i

$$\sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial v_\sigma}{\partial q_i} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_r} + \sum_{\sigma=1}^{\mu} v_\sigma \frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial q_i \partial q_r} = 0$$

$$\sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial v_\sigma}{\partial q_r} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_i} + \sum_{\sigma=1}^{\mu} v_\sigma \frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial q_r \partial q_i} = 0$$

Durch Subtraction der zweiten Gleichung von der ersten erhalten wir

$$\sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial v_\sigma}{\partial q_i} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_r} = \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial v_\sigma}{\partial q_r} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_i}$$

Solche Gleichungen gelten für $i, r = 1, 2, \ldots m$.

Die noch $\mu - m$ fehlenden Gleichungen erhalten wir aus den Gleichungen $A_\varrho = 0$ ($\varrho = 1, 2, \ldots m$), wenn wir diese Gleichungen nach q_i differentieren. Es ergiebt sich alsdann:

$$\sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_\varrho}{\partial v_\sigma} \frac{\partial v_\sigma}{\partial q_i} = - \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_\varrho}{\partial v_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_i} \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots \mu - m \\ i = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix}$$

Die für den Index i geltenden Gleichungen liefern ein System von μ Gleichungen für

$$\frac{\partial v_1}{\partial q_i}, \frac{\partial v_2}{\partial q_i}, \ldots \frac{\partial v_\mu}{\partial q_i}$$

Die Determinante dieses Systems ist die in § 2 eingeführte Determinante D. Durch Auflösung dieses Systems erhalten wir

$$D \frac{\partial v_k}{\partial q_i} = D_{1k} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial v_\sigma}{\partial q_1} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_i} + D_{2k} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial v_\sigma}{\partial q_2} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_i} + \ldots + D_{mk} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial v_\sigma}{\partial q_m} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_i}$$

$$- D_{m+1,k} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_i} - \ldots - D_{\mu,k} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_i}$$

$$\begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots \mu \\ i = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix}$$

Aus den Gleichungssystemen 7) und 12) ergiebt sich, wenn wir die für den Ind geltenden Gleichungen zusammenfassen

$$20) \qquad D_{ik} = D\,\frac{\partial v_k}{\partial p_i} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2 \ldots \\ i = 1, 2 \ldots \end{pmatrix}$$

Setzen wir dies in 19) ein, so erhalten wir:

$$D\,\frac{\partial v_k}{\partial q_i} = D\,\frac{\partial v_k}{\partial p_1}\sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{\partial v_\sigma}{\partial q_1}\,\frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_i} + D\,\frac{\partial v_k}{\partial p_2}\sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{\partial v_\sigma}{\partial q_2}\,\frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_2} + \cdots$$

$$- D_{m+1,k}\sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{\partial A_1}{\partial \xi_\sigma}\,\frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_i} \cdots - D_{\mu,k}\sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial \xi_\sigma}\,\frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_i}$$

Diese Gleichung lässt sich auch in der Form schreiben:

$$D\,\frac{\partial v_k}{\partial q_i} = D\sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_i}\sum_{s=1}^{\mu}\frac{\partial v_\sigma}{\partial q_s}\,\frac{\partial v_k}{\partial p_s} - D_{m+1,k}\sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{\partial A_1}{\partial \xi_\sigma}\,\frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_i} \cdots - D_{\mu,k}\sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial \xi_\sigma}$$

Die über s von 1 bis m erstreckte Summe ist die Grösse $(\sigma)_k$, so dass wir mit führung dieser Grösse erhalten:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i}(1)_k + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i}(2)_k + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}(\mu)_k = \frac{\partial v_k}{\partial q_i} + \frac{D_{m+1,k}}{D}\sum_{\sigma-1}^{\mu}\frac{\partial A_1}{\partial \xi_\sigma}\,\frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_i} + \cdots$$

$$21) \qquad + \frac{D_{\mu,k}}{D}\sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial \xi_\sigma}\,\frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_i} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2 \ldots \\ i = 1, 2 \ldots \end{pmatrix}$$

Die weiteren $\mu - m$ Gleichungen ergeben sich aus dem Gleichungssystem 18). Mu cieren wir nämlich die Gleichungen 18) der Reihe nach mit $\frac{\partial v_k}{\partial p_1}, \frac{\partial v_k}{\partial p_2}, \ldots \frac{\partial v_k}{\partial p_m}$ und add die so erhaltenen Gleichungen, so ergiebt sich mit Einführung der Klammergrössen

$$\frac{\partial A_\varrho}{\partial v_1}(1)_k + \frac{\partial A}{\partial v_2}(2)_k + \cdots + \frac{\partial A_\varrho}{\partial v_\mu}(\mu)_k = -\frac{\partial A_\varrho}{\partial \xi_k} + \frac{D_{m+1,k}}{D}\sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{\partial A_\varrho}{\partial \xi_\sigma}\,\frac{\partial A_1}{\partial v_\sigma} +$$

$$22) \qquad + \cdots + \frac{D_{\mu,k}}{D}\sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{\partial A_\varrho}{\partial \xi_\sigma}\,\frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial v_\sigma} \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2 \ldots \mu \\ k = 1, 2 \ldots \mu \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem befindet sich bei Jacobi in § 43. Die Quotienten

$$\frac{D_{m+1,k}}{D}, \frac{D_{m+2,k}}{D} \cdots$$

sind dort mit $a_1, a_2 \ldots$ bezeichnet. Fassen wir die μ für den Index k der Klammergr geltenden Gleichungen 21) und 22) zusammen, so lassen sich die Grössen $(\varrho)_k$ durch die ξ u ausdrücken.

Es ergiebt sich μ_k

$$D(r)_k = \left[\frac{\partial v_k}{\partial q_1} + \frac{D_{m+1,k}}{D} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_1} + \frac{D_{m+2,k}}{D} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_1} + \cdots \right] D_{1r}$$

$$+ \left[\frac{\partial v_k}{\partial q_2} + \frac{D_{m+1,k}}{D} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_2} + \frac{D_{m+2,k}}{D} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_2} + \cdots \right] D_{2r} + \cdots$$

$$+ \left[\frac{\partial v_k}{\partial q_m} + \frac{D_{m+1,k}}{D} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_m} + \frac{D_{m+2,k}}{D} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_m} + \cdots \right] D_{mr} +$$

$$+ \left[- \frac{\partial A_1}{\partial \xi_k} + \frac{D_{m+1,k}}{D} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial A_1}{\partial v_\sigma} + \frac{D_{m+2,k}}{D} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial A_2}{\partial v_\sigma} + \cdots \right] D_{m+1,r}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \left[- \frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial \xi_k} + \frac{D_{m+1,k}}{D} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial A_1}{\partial v_\sigma} + \frac{D_{m+2,k}}{D} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial A_2}{\partial v_\sigma} + \cdots \right] D_{\mu,r}$$

Mit Anwendung der Gleichung 20) erhalten wir nach einer kleinen Umformung:

$$D(r)_k = D \left\{ \frac{\partial v_k}{\partial q_1} \frac{\partial v_r}{\partial p_1} + \cdots \frac{\partial v_k}{\partial q_m} \frac{\partial v_r}{\partial p_m} \right\} - \frac{\partial A_1}{\partial \xi_k} D_{m+1,r} - \frac{\partial A_2}{\partial \xi_k} D_{m+2,r} \cdots - \frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial \xi_k} D_{\mu r}$$

$$+ \frac{D_{m+1,k}}{D} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_1}{\partial \xi \sigma} \left[\frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_1} D_{1r} + \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_2} D_{2r} + \cdots + \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_m} D_{mr} + \frac{\partial A_1}{\partial v_\sigma} D_{m+1,r} + \cdots + \frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial v_\sigma} D_{\mu r} \right] + \cdots$$

$$+ \frac{D_{\mu k}}{D} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial \xi_\sigma} \left[\frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_1} D_{1r} + \cdots \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_m} D_{\mu r} + \frac{\partial A_1}{\partial v_\sigma} D_{m+1,r} \cdots + \frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial v_\sigma} D_{\mu r} \right]$$

$$+ \frac{D_{m+1,k}}{D} D_{m+2,r} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial A_1}{\partial v_\sigma} - \frac{D_{m+1,k}}{D} D_{m+2\,r} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial A_k}{\partial v_\sigma} +$$

$$+ \frac{D_{m+2,k}}{D} D_{m+1,r} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial A_2}{\partial v_\sigma} - \frac{D_{m+2,k}}{D} D_{m+1,r} \sum \frac{\partial A_2}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial A_1}{\partial v\sigma} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{D_{\mu k}}{D} D_{\mu-1,r} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_{\mu-m+1}}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial v_\sigma} - \frac{D_{\mu k}}{D} D_{\mu-1,r} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial A_{\mu-m+1}}{\partial v_\sigma} .$$

Beachten wir, dass die Ausdrücke in den Klammern [ ] gleich null oder gleich D sind, nachdem σ gleich oder ungleich r ist, setzen wir ferner mit Jacobi:

$$[A_i\, A_k]' = \sum_{\sigma=1}^{\mu} \left(\frac{\partial A_i}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial A_k}{\partial v_\sigma} - \frac{\partial A_i}{\partial v_\sigma} \frac{\partial A_k}{\partial \xi_\sigma} \right),$$

so erhalten wir nach Division durch D schliesslich die Formel:

$$(r)_k - (k)_r = \frac{D_{m+1,k}}{D}\frac{\partial A_1}{\partial \xi_r} + \frac{D_{m+2,k}}{D}\frac{\partial A_2}{\partial \xi_r} + \cdots + \frac{D_{\mu k}}{D}\frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial \xi_\sigma}$$
$$- \frac{D_{m+1,r}}{D}\frac{\partial A_1}{\partial \xi_k} - \frac{D_{m+2,r}}{D}\frac{\partial A_2}{\partial \xi_k} - \cdots - \frac{D_{\mu k}}{D}\frac{\partial A_{\mu-m}}{\partial \xi_k}$$
$$+ \left(\frac{D_{m+1,r}}{D}\frac{D_{m+2,k}}{D} - \frac{D_{m+1,k}}{D}\frac{D_{m+2,r}}{D}\right)[A_1, A_2]' + \cdots$$
$$+ \left(\frac{D_{\mu-1,r}}{D}\frac{D_{\mu,k}}{D} - \frac{D_{\mu-1,r}}{D}\frac{D_{\mu,r}}{D}\right)[A_{\mu-m+1}, A_{\mu-m}]' \qquad (r,k=1,2\ldots$$

Dies ist die von Jacobi in § 43 angeführte Formel, welche ich meines Erachtens v übersichtlicher mit Hülfe der Determinantensätze aus den betr. Gleichungen abgeleitet habe der letzten Formel kommen die Quotienten $\frac{D_{m+1,k}}{D}, \frac{D_{m+2,k}}{D}, \ldots \frac{D_{\mu,k}}{D}$ vor, von welche zeigen ist, dass sie Functionen von $\xi_1, \ldots \xi_\mu, v, \ldots v_\mu$ sind. Der Übersichtlichkeit wegen wi i hier nochmals den Beweis führen, welcher bei Jacobi in § 43 sich befindet.

Zu diesem Zweck gehe ich von den Gleichungen 9) und 14) aus. Aus ihnen ergiebt si

$$\frac{\partial F_k}{\partial \xi_\sigma} = \frac{D_{m+1,\sigma}}{D} b_{1k} + \frac{D_{m+2,\sigma}}{D} b_{2k} + \cdots + \frac{D_{\mu\sigma}}{D} b_{\mu-m,k}. \qquad (k=1,2,\ldots\mu$$

Wir haben somit ein System von $\mu - m$ Gleichungen für $\frac{D_{m+1,\sigma}}{D}, \ldots \frac{D_{\mu\sigma}}{D}$ erhi aus welchen sich mit Anwendung der in § 2 eingeführten Bezeichnungen ergiebt

23) $$\frac{D_{m-i,\sigma}}{D} = \frac{\partial F_1}{\partial \xi_\sigma}\frac{\beta_{1i}}{B} + \frac{\partial F_2}{\partial \xi_\sigma}\frac{\beta_{2i}}{B} + \cdots + \frac{\partial F_{\mu-m}}{\partial \xi_\sigma}\frac{\beta_{\mu-m,i}}{B} \qquad \begin{matrix} i=1,2,\ldots\mu-m \\ \sigma=1,2,\ldots\mu \end{matrix}$$

und da die rechte Seite nur die Variabeln ξ und v enthält, so ist der angeführte Beweis gelie Mit Hülfe der Gleichungen 23) lässt sich der Ausdruck für $(i)_{k'}$ der Gleichungen 16) einfa schreiben, so dass wir erhalten

24) $$(i)_{k'} = -\sum_{s=1}^{\mu-m}\frac{\partial A_s}{\partial v_i}\frac{D_{m-s,k'}}{D}. \qquad (i,k'=1,2,\ldots$$

5.

Der Ausdruck für $[\varphi\,\psi]$.

Führen wir in dem Ausdruck für $[\varphi\,\psi]$ des § 1 die Grössen i_k und $(i)_{k'}$ ein, so erhalte w

$$[\varphi\,\psi]' = \sum_{k=1}^{\mu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_k} - \frac{\partial\varphi}{\partial v_k}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\right) + \sum_{k,k'=1}^{\mu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}} - \frac{\partial\varphi}{\partial v_k}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_{k'}}\right)k_{k'}$$
$$+ \sum_{k,k'=1}^{\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}}\left\{(k)_{k'} - (k')_k\right\}.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichungen für $k_{k'}$ und $(k)_{k'} - (k')_k$ erhalten wir

$$[\varphi\,\psi] = [\varphi\,\psi]' - \sum_{k,k'=1}^{\mu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\,\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}} - \frac{\partial\varphi}{\partial v_{k'}}\,\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\right)\sum_{s=1}^{\mu-m}\frac{\partial A_s}{\partial v_k} - \frac{D_{m+s,k'}}{D} +$$

$$+ \sum_{k,k'=1}^{\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}\,\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}}\sum_{s=1}^{\mu-m}\left(\frac{D_{m+s,k'}}{D}\,\frac{\partial A_s}{\partial\xi_k} - \frac{D_{m+s,k}}{D}\,\frac{\partial A_s}{\partial\xi_{k'}}\right) +$$

$$+ [A_1\,A_2]'\sum_{k,k'=1}^{\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}\,\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}}\left(\frac{D_{m+1,k}}{D}\,\frac{D_{m+2,k'}}{D} - \frac{D_{m+1,k'}}{D}\,\frac{D_{m+2,k}}{D}\right)$$

. . . . . .

$$+ [A_{\mu-m+1}\,A_{\mu-m}]'\sum_{k,k'=1}^{\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}\,\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}}\left(\frac{D_{\mu-1,k}}{D}\,\frac{D_{\mu,k'}}{D} - \frac{D_{\mu-1,k'}}{D}\,\frac{D_{\mu,k}}{D}\right).$$

Die Differenzen in den dreifachen Summen lassen sich so umformen, dass in ihnen als Coefficienten die entsprechend $[A_i\,A_k]'$ gebildeten Ausdrücke $[\varphi A]'$ und $[\psi A]'$ auftreten, so erhalten wir endgültig

$$[\varphi\,\psi] = [\varphi\,\psi]' - [\varphi A_1]'\sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{D_{m+1,\sigma}}{D}\,\frac{\partial\psi}{\partial v_\sigma} - \cdots - [\varphi A_{\mu-m}]'\sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{D_{\mu,\sigma}}{D}\,\frac{\partial\psi}{\partial v_\sigma}$$

$$+ [\psi A_1]'\sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{D_{m+1}}{D}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v_\sigma} + \cdots + [\psi A_{\mu-m}]'\sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{D_{\mu,\sigma}}{D}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v_\sigma}$$

$$+ [A_1\,A_2]'\left\{\sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{D_{m+1,\sigma}}{D}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v_\sigma}\sum_{\varrho=1}^{\mu}\frac{D_{m+2,\sigma}}{D}\,\frac{\partial\psi}{\partial v_\varrho} - \sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{D_{m+1,\sigma}}{D}\,\frac{\partial\psi}{\partial v_\sigma}\sum_{\varrho=1}^{\mu}\frac{D_{m+2,\sigma}}{D}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v_\varrho}\right\}$$

. . . . . .

$$+ [A_{\mu-m+1}\,A_{\mu-m}]'\left\{\sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{D_{\mu-1,\sigma}}{D}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v_\sigma}\sum_{\varrho=1}^{\mu}\frac{D_{\mu,\sigma}}{D}\,\frac{\partial\psi}{\partial v_\varrho} - \sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{D_{\mu-1,\sigma}}{D}\,\frac{\partial\psi}{\partial v_\sigma}\sum_{\varrho=1}^{\mu}\frac{D_{\mu,\sigma}}{D}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v_\varrho}\right\}$$

Dies ist die von Jacobi in § 46 erhaltene Formel, mit welcher das gestellte Problem gelöst ist.

6.

Fälle, in denen $[\varphi\,\psi] = [\varphi\,\psi]'$ wird.

Jacobi knüpft einige Untersuchungen an über die Fälle, in denen $[\varphi\,\psi] = [\varphi\,\psi]'$ wird. Ich will hier einige Umkehrungen geben.

Nach Gleichung 25) des § 5 wird $[\varphi\,\psi] = [\varphi\,\psi]'$, wenn

$$\sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{D_{m-i}}{D}\,\frac{\partial\psi}{\partial v_\sigma} = 0\,;\quad \sum_{\sigma=1}^{\mu}\frac{D_{m+i}}{D}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v_\sigma} = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu - m)$$

Diese Bedingungsgleichungen werden erfüllt, wenn $[F_i\varphi]' = 0$ und $[F_i\psi]' = 0$ $(i = 1, 2, \ldots \mu$-

Um dies zu beweisen, multiplicieren wir die Gleichungen 23) der Reihe nach mit $\frac{\partial\varphi}{\partial v_\sigma}$ und add die erhaltenen Gleichungen für $\sigma = 1, 2, \ldots \mu$. Es ergiebt sich alsdann

$$\sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{D_{m+i,\sigma}}{D} \frac{\partial\varphi}{\partial v_\sigma} = \frac{\beta_{1i}}{B}[F_1\varphi]' + \frac{\beta_{2i}}{B}[F_2\varphi]' + \ldots \frac{\beta_{\mu-m,i}}{B}[F_{\mu-m},\varphi]'.$$

$(i = 1, 2, \ldots \mu$-

Da die linke Seite dieser Gleichungen gleich null sein soll, die Determinante sowie Unterdeterminanten dieses Systems von null verschieden sind, so muss jeder einzelne Ausd

1) $$[F_1\varphi]' = 0 \; ; \; \ldots \; [F_{\mu-m}\varphi]' = 0 \text{ sein.}$$

In gleicher Weise folgt auch, dass

2) $$[F_1\psi]' = 0 \; ; \; -- \; [F_{\mu-m}\psi]' = 0.$$

Ferner wird $[\varphi\,\psi] = [\varphi\,\psi]'$, wenn

3) $$[\varphi\,A_1]' = 0 \; ; \; \ldots \; [\varphi\,A_{\mu-m}]' = 0$$

$$\text{und} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{D_{m+1,\sigma}}{D} \frac{\partial\varphi}{\partial v_\sigma} = 0 \; ; \; \ldots \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{D_{\mu,\sigma}}{D} \frac{\partial\varphi}{\partial v_\sigma} = 0$$

oder auch die Function ψ diese Bedingungen erfüllt.

Ist $\varphi = \text{const.}$ eine Lösung des Systems der Differentialgleichungen 3) in § 1 und er φ die Bedingungen 1), so ist auch φ eine Lösung des Systems

4) $$\frac{d\xi_\sigma}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v_\sigma} \; ; \; \frac{dv_\sigma}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_\sigma}. \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots$$

Jacobi zeigt in seiner Abhandlung, dass, wenn $\varphi = \text{const.}$ eine Lösung des Systems 2 § 1 ist, und die Bedingungen 1) erfüllt, die Bedingungen 3) erfüllt werden müssen, und s $[\varphi\,\psi] = [\varphi\psi]'$ wird. Es lässt sich auch die Umkehrung beweisen, dass, wenn φ eine Lösung 4) ist, und die Bedingungen 3) erfüllt, die Bedingungen $[F_i\,\varphi]' = 0$; . . $[F_{\mu-m}\,\varphi]' = 0$ er werden müssen.

Ist nämlich $\varphi = \text{const}$ eine Lösung von 4), so lässt sich diese bekanntlich schre $[H\varphi]' = 0$. Nach dem bekannten Jacobischen Satze ist nun

$$\big[H\,[\varphi F_i]'\big]' + \big[\varphi\,[F_i H]'\big]' + \big[F_i\,[H\varphi]'\big]' = 0.$$

Es ist jedoch $[F_i\,H]' = A_i$ $(i = 1, 2, \ldots \mu$-

und da die Bedingungen 3) erfüllt werden sollen, so muss sein $\big[H\,[\varphi\,F_i]'\big]' = 0$. $(i = 1, 2, \ldots \mu$-

Hieraus folgt, dass $[F_i\,\varphi]' = \text{const.}$ $(i = 1, 2, \ldots \mu - m)$ eine Lösung des Systems 4) muss. Es lässt sich nun zunächst zeigen, dass diese Constante den Wert null haben m Führen wir nämlich für die Variabeln ξ und v die Variabeln q und p ein, und beachten, die Variabeln p allein die Grössen v explicite enthalten, so wird

$$[F_i\varphi]' = \sum_{\sigma-1}^{\mu} \frac{\partial F_i}{\partial \xi_\sigma} \sum_{\sigma=1}^{m} \frac{\partial\varphi}{\partial p_\varrho} \frac{\partial p_\varrho}{\partial v_\sigma} = \text{const.} \qquad (i = 1, 2 \ldots \mu$-

Aus den Formeln 4) des § 1 folgt $\frac{\partial p_\varrho}{\partial v_\sigma} = \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial p_\varrho}$ $\begin{pmatrix}\sigma = 1, 2 \ldots \mu \\ \varrho = 1, 2 \ldots m\end{pmatrix}$

Infolgedessen liefert die vorhergehende Formel

$$\sum_{\varrho=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial p_\varrho} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial F_i}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_\varrho} = \text{const.} \qquad (i = 1, 2 \ldots \mu - m)$$

Es ist nun $\sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial F_i}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial q_\varrho} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \mu - m \\ \varrho = 1, 2 \ldots m \end{pmatrix},$

olglich wird die linke Seite der vorhergehenden Gleichung gleich null, also muss auch die Constante gleich null sein. Mithin ist $[F_i \varphi]' = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots \mu - m)$

Die Gleichungen müssen jedoch von der Lösung $\varphi = \text{const.}$ identisch befriedigt werden, a in dem entgegengesetzten Falle zwischen Variabeln ξ und v mehr Gleichungen bestehen müssten ls die gegebenen: $A_1 = [F_1 H]' = 0; \ldots A_{\mu-m} = [F_{\mu-m} H]' = 0$.

as ausgeschlossen ist.

Wir sind also zu folgender Umkehrung gelangt:

Ist $\varphi = const.$ eine Lösung des Systems der Differentialgleichungen

$$\frac{d\xi_\sigma}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v_\sigma}; \quad \frac{dv_\sigma}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots \mu)$$

nd erfüllt die Lösung die Bedingungen

$$[\varphi A_1]' = 0; \ldots [\varphi A_{\mu-m}]' = 0$$

o $A_i = [F_i H]'$ $(i = 1, 2, \ldots \mu - m)$ ist, so müssen auch identisch die Bedingungen erfüllt werden

$$[F_1 \varphi]' = 0; \ldots [F_{\mu-m} \varphi]' = 0$$

nd $\varphi = const.$ wird dann auch eine Lösung des Systems

$$\frac{d\xi_\sigma}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v_\sigma}; \quad \frac{dv_\sigma}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_\sigma} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial \xi_\sigma} + \cdots + \lambda_{\mu-m} \frac{\partial F_{\mu-m}}{\partial \xi_\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots \mu).$$

7.

Über die Lösungen, welche das System der Differentialgleichungen befriedigen.

Ist ψ eine Lösung des Systems

$$\frac{d\xi_\sigma}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v_\sigma}; \quad \frac{dv_\sigma}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_\sigma} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial \xi_\sigma} + \cdots + \lambda_{\mu-m} \frac{\partial F_{\mu-m}}{\partial \xi_\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots \mu)$$

muss bekanntlich die Bedingung

$$[H\psi]' = \sum_{\sigma=1}^{\mu} \left(\frac{\partial (H + \lambda_1 F_1 + \cdots \lambda_{\mu-m} F_{\mu-m})}{\partial \xi_\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial v_\sigma} - \frac{\partial H}{\partial v_\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_\sigma} \right) = 0$$

ntisch befriedigt werden. Gelten keine Bedingungsgleichungen, oder erfüllen die Variabeln die Bedingungsgleichungen identisch, so geht das System (H) über in

$$\frac{d\xi_\sigma}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v_\sigma}; \quad \frac{dv_\sigma}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_\sigma} \qquad \sigma = 1, 2, \ldots \sigma$$

n. es muss hierfür $[H\psi]' = 0$ sein.

In § 49 seiner nova methodus zeigt Jacobi, dass stets eine Function ψ_0 gefunden v
kann, welche die Bedingungen

3) $$[F_i\,\psi_0]' = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots$$

identisch befriedigt, und immer $[H\psi_0]' = [H\psi_0]'$ wird.

Ist also ψ_0 eine Lösung des Systems (H), so muss es auch Lösung des Systems (H
Ich will jetzt den Satz beweisen, dass, wenn ψ_0 in der Form $\psi + \lambda_1' A_1 + \lambda_2' A_2 + .$
darstellen lässt, wo $\lambda_1', \ldots \lambda'_{\mu-m}$ Functionen von ξ und v sind, ψ auch eine Lösung des Sy
(H) sein muss. Setzen wir in 1)

4) $$\psi_0 = \psi + \lambda_1' A_1 + \lambda_2' A_2 + \cdots \lambda'_{\mu-m} A_{\mu-m},$$

so erhalten wir mit Berücksichtigung der Gleichungen 5) des § 1

$$[H\psi_0]' = [H\psi]' + \lambda_1' [HA_1]' + \cdots \lambda'_{\mu-m} [H A_{\mu-m}]'.$$

Setzen wir für $[HA_i]'$ die Summe $[HA_i]' + \lambda_1 [HF_1]' + \cdots + \lambda_{\mu-m} [HF_{\mu-m}]'$
$(i = 1, 2, \ldots \mu-$
so ergiebt sich:

$$[H\psi_0]' = [H\psi]' + \lambda_1' [HA_1]' + \cdots + \lambda'_{\mu-m} [HA_{\mu-m}]' +$$

$$+ \lambda_1' \sum_{i=1}^{\mu-m} \lambda_i [F_i A_1]' + \cdots \lambda'_{\mu-m} \sum_{i=1}^{\mu-m} \lambda_i [F_i A_{\mu-m}]'$$

Da nun $\lambda_i = \frac{\beta_{i1}}{B} [A_1 H]' + \frac{\beta_{i2}}{B} [A_2 H]' + \cdots \frac{\beta_{\mu-m}}{B} [A_{\mu-m} H]'$
$(i = 1, 2, \ldots \mu-$
ist, so wird

$$[H\psi_0]' = [H\psi]' + \lambda_1' [HA_1]' \left\{ 1 - \frac{\beta_{11}}{B} [F_1 A_1]' - \cdots \frac{\beta_{1\,\mu-m}}{B} [F_{\mu-m} A_1]' \right\}$$

$$+ \lambda_1' [A_2 H]' \left\{ \frac{\beta_{21}}{B} [F_1 A_1]' + \frac{\beta_{22}}{B} [F_2 A_1]' + \cdots \frac{\beta_{2,\mu-m}}{B} [F_{\mu-m} A_1]' \right\}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \lambda_1' [A_{\mu-m} H]' \left\{ \frac{\beta_{\mu-m,1}}{B} [F_1 A_1]' + \frac{\beta_{\mu-m,2}}{B} [F_2 A_1]' + \cdots \frac{\beta_{\mu-m,\mu-m}}{B} [F_{\mu-m}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \lambda_i' [A_1 H]' \left\{ \frac{\beta_{11}}{B} [F_1 A_i]' + \frac{\beta_{12}}{B} [F_2 A_i]' + \cdots + \frac{\beta_{i,\mu-m}}{B} [F_{\mu-m} A_i]' \right\}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \lambda_i' [HA_i]' \left\{ 1 - \frac{\beta_{i1}}{B} [F_1 A_i]' - \frac{\beta_{i2}}{B} [F_2 A_i]' - \cdots - \frac{\beta_{i,\mu-m}}{B} [F_{\mu-m} A_i]' \right\}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \lambda_i' [A_{\mu-m} H]' \left\{ \frac{\beta_{\mu-m,1}}{B} [F_1 A_i]' + \cdots + \frac{\beta_{\mu-m,\mu-m}}{B} [F_{\mu-m} A_i]' \right\}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Beachtet man, dass $b_{ik} = b_{ki} = [F_k A_i]'$ $\quad (i, k = 1, 2, \ldots \mu - m)$

ist und $\sum_{i=1}^{\mu-m} \frac{\beta_{si}}{B} b_{ki} = \begin{cases} 1 & s = k \\ 0 & s \leq k \end{cases}$ ist, so werden die Ausdrücke in den $\{\}'$ gleich null, und wir erhalten

$$[H\psi_0]' = [H\psi]'.$$

Dieses Ergebnis können wir in folgendem Satz aussprechen:

Ist $\psi_0 = const.$ eine Lösung des Systems der Differentialgleichungen

$$\frac{d\xi_\sigma}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v_\sigma}\ ;\ \frac{dv_\sigma}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_\sigma} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{d\xi_\sigma} + \ldots$$

und lässt sich ψ_0 in die Summe $\psi + \lambda_1' A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots \lambda'_{\mu-m} A_{\mu-m}$ zerlegen, wo $\lambda'_1, \ldots \lambda'_{\mu-m}$ beliebige Coefficienten sind und

$$A_r = [F_r H]' \qquad (r = 1, 2 \ldots \mu - m)$$

so ist auch $\psi = const.$ eine Lösung des Systems der Differentialgleichungen.

Es besteht auch ebenso die Umkehrung:

Ist $\psi = const.$ eine Lösung des Systems der Differentialgleichungen, so muss auch $\psi_0 = \psi + \lambda_1' A_1 + \ldots \lambda'_{\mu-m} A_{\mu-m} = const.$ eine Lösung des betreffenden Systems sein.

Werden die Coefficienten $\lambda_1', \lambda_2', \ldots \lambda'_{\mu-m}$ so bestimmt, dass $[F_1 \psi_0]' = 0\ ; \ldots$ $[F_{\mu-m} \psi_0]' = 0$, so wird nach dem vorhergehenden $[H\psi_0]' = [H\psi_0]'$. Nach dem letzten Theorem ist jedoch $[H\psi_0]' = [H\psi]'$, so dass wir die Gleichungen erhalten $[H\psi_0]' = [H\psi]' = [H\psi_0]'$. Ist aber $\psi_0 = \text{const.}$ eine Lösung des Systems H, so ist auch $[H\psi]' = 0$ und $[H\psi_0]' = 0$. Wir sind also zu folgendem Theorem gelangt:

Ist $\psi_0 = const.$ eine Lösung des Systems der Differentialgleichungen:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v_\sigma}\ ;\ \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_\sigma} \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu)$$

und lässt sich ψ_0 in die Form $\psi + \lambda_1' A_1 + \ldots \lambda'_{\mu-m} A_{\mu-m}$ zerlegen, wo $A_r = [F_r H]' = 0$ $(r = 1, 2, \ldots \mu - m)$ und $\lambda_1', \lambda_2' \ldots \lambda'_{\mu-m}$ vermittelst der Gleichungen $[F_1 \psi_0]' = 0\ ; \ldots$ $[F_{\mu-m} \psi_0]' = 0$ sich bestimmen lassen, so ist ψ eine Lösung des Systems

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v_\sigma}\ ;\ \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_\sigma} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial \xi_\sigma} \ldots + \lambda_{\mu-m} \frac{\partial F_{\mu-m}}{\partial \xi_\sigma} \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu$$

Zum Schlusse will ich direct beweisen, dass $[H\psi]' = [H\psi_0]'$ ist, wenn die Gleichungen $[F_i \psi_0]' = 0$ $(i = 1, 2, \ldots \mu - m)$ erfüllt werden sollen. Da $H + \lambda_1 F_1 + \ldots \lambda_{\mu-m} F_{\mu-m}$ für H gesetzt werden kann, so wird $[H\psi]' = [H\psi]' + \lambda_1 [F_1 \psi]' + \ldots \lambda_{\mu-m} [F_{\mu-m} \psi]'$.

Unter Berücksichtigung der Gleichungen 5) wird

$$[H\psi]' = \left\{ \frac{\beta_{11}}{B} [A_1 H]' + \frac{\beta_{12}}{B} [A_2 H]' + \ldots + \frac{\beta_{1,\mu-m}}{B} [A_{\mu-m} H] \right\} [F_1 \psi]'$$

$$+ \left\{ \frac{\beta_{21}}{B} [A_1 H]' + \frac{\beta_{22}}{B} [A_2 H]' + \ldots + \frac{\beta_{2,\mu-m}}{B} [A_{\mu-m} H] \right\} [F_2 \psi]'$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Aus den Gleichungen 5) ergiebt sich:

$$\lambda_1' [F_1 A_1]' + \lambda_2' [F_1 A_2]' + \cdots + \lambda'_{\mu-m} [F_1 A_{\mu-m}]' = - [F_1 \psi]'$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_1' [F_{\mu-m} A_1]' + \lambda_2' [F_{\mu-m} A_2]' + \cdots \lambda'_{\mu-m} [F_{\mu-m} A_{\mu-m}]' = - [F_{\mu-m} \psi]'.$$

Setzen wir das in die vorhergehende Gleichung ein, so erhalten wir unter Berücksichtigung von $[F_i A_k]' = b_{ik} = b_{ki}$,

$$[H\psi]' = [H\psi]' - \lambda_1' \left\{ [A_1 H]' \left(\frac{\beta_{11}}{B} b_{11} + \frac{\beta_{21}}{B} b_{21} + \cdots \right) \right.$$

$$\left. + [A_2 H]' \frac{\beta_{12}}{B} b_{11} + \cdots \right) + \cdots \Big\}$$

$$- \lambda_2' \Big\{ [A_1 H]' \left(\frac{\beta_{11}}{B} b_{11} + \frac{\beta_{21}}{B} b_{22} + \cdots \right) +$$

$$+ [A_2 H]' \frac{\beta_{12}}{B} b_{12} + \frac{\beta_{22}}{B} b_{22} + \cdots \Big) +$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Mit Hilfe bekannter Determinantensätze ergiebt sich dann

$$[H\psi]' = [H\psi]' - \lambda_1' [A_1 H]' - \lambda_2' [A_2 H]' \ldots,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$[H\psi]' = [H\psi_0]'.$$

Ist also $[H\psi]' = 0$, so ist auch $[H\psi_0]' = 0$, was zu zeigen war.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
515C126 C001 V009
CALCULUS [S.L.
3 0112 017225159